



三支决策的可视化概念与分析

徐健锋, 王书谊, 姚一豫, 苗夺谦

引用本文:

徐健锋, 王书谊, 姚一豫, 等. 三支决策的可视化概念与分析[J]. *智能系统学报*, 2026, 21(2): 542-552.

XU Jianfeng, WANG Shuyi, YAO Yiyu, et al. Visualization concepts and analysis of three-way decisions[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2026, 21(2): 542-552.

在线阅读 View online: <https://dx.doi.org/10.11992/tis.202507014>

您可能感兴趣的其他文章

相似度三支决策模糊粗糙集模型的决策代价研究

Decision costs of the similarity three-way decision-theoretic fuzzy rough set model

智能系统学报. 2020, 15(6): 1068-1078 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201909015>

基于知识距离的粗糙粒结构的评价模型

Evaluation model of rough granular structure based on knowledge distance

智能系统学报. 2020, 15(1): 166-174 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201904037>

三支决策基于粗糙集与粒计算研究视角

Three-way decisions: research perspectives for rough sets and granular computing

智能系统学报. 2019, 14(6): 1111-1120 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201905039>

面向混合数据的多伴随三支决策

Multi-adjoint three-way decisions on heterogeneous data

智能系统学报. 2019, 14(6): 1092-1099 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201905048>

不完备决策系统下的多特定类广义决策约简

The multi-class-specific generalized decision preservation reduction in incomplete decision systems

智能系统学报. 2019, 14(6): 1199-1208 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201905059>

三支决策的时空性

Temporality and spatiality of three-way decisions

智能系统学报. 2019, 14(1): 141-149 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201804045>

DOI: 10.11992/tis.202507014

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/23.1538.tp.20260125.1341.002>

三支决策的可视化概念与分析

徐健锋^{1,2,3}, 王书谊², 姚一豫³, 苗夺谦⁴

(1. 南昌大学 数学与计算机学院, 江西 南昌 330031; 2. 南昌大学 软件学院, 江西 南昌 330047; 3. 加拿大里贾纳大学 计算机系, 里贾纳 S4S 0A2; 4. 同济大学 计算机科学与技术学院, 上海 201804)

摘要: 三支决策是一种不确定问题求解新型理论, 如何提升该理论体系的解释性是其重要研究方向之一。可视化技术是计算机科学领域重要的解释性手段, 在三支决策相关研究中尚未开展系统的可视化理论研究, 亟需解释性较强的可视化研究工具。因此, 本文基于三支决策的经典模型, 提出了一套三支决策可视化建模和推理方法。本文在三支决策的基本概念可视化描述基础上, 针对决策理论粗糙集的可视化问题, 构造了一种概率-代价可视化空间, 分别对三支代价目标函数在可视化空间中的几何语义及其单调性进行可视化解读, 并在此基础上对三支决策的各个阈值进行可视化推导; 在上述研究基础上针对双量化三支决策的可视化问题, 进一步构建了相对条件概率-绝对条件概率可视化二维空间, 并在该二维空间中对 9 种双量化决策类型进行了可视化分析。最后, 本文通过一个蘑菇实例验证了所提出的三支可视化方法能够为复杂不确定性推理提供有效解释性决策支撑, 填补了三支决策领域在系统性可视化理论研究上的空白, 显示了较好的推广和应用价值。

关键词: 三支决策; 决策理论粗糙集; 贝叶斯风险理论; 三支概念分析; 可视化; 概率粗糙集; 双量化; 几何解释
中图分类号: TP182 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2026)02-0542-11

中文引用格式: 徐健锋, 王书谊, 姚一豫, 等. 三支决策的可视化概念与分析 [J]. 智能系统学报, 2026, 21(2): 542-552.

英文引用格式: XU Jianfeng, WANG Shuyi, YAO Yiyu, et al. Visualization concepts and analysis of three-way decisions[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2026, 21(2): 542-552.

Visualization concepts and analysis of three-way decisions

XU Jianfeng^{1,2,3}, WANG Shuyi², YAO Yiyu³, MIAO Duoqian⁴

(1. School of Mathematics and Computer Sciences, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 2. School of Software, Nanchang University, Nanchang 330047, China; 3. Department of Computer Science, University of Regina, Regina S4S 0A2, Canada; 4. School of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Three-way decision is a novel theory for solving uncertain problems, and enhancing its interpretability is a key research direction. While visualization is a powerful means of achieving interpretability in computer science, a systematic theoretical framework for visualizing three-way decisions has not yet been established, creating an urgent need for highly interpretable visualization tools. Therefore, based on the classic models of three-way decisions, this paper proposes a set of methods for visual modeling and reasoning. Firstly, building on a visual representation of the fundamental concepts, this paper addresses the visualization of Decision-Theoretic Rough Sets (DTRS) by constructing a Probability-Cost visualization space. Within this space, the geometric semantics and monotonicity of the three cost-objective functions are visually interpreted, which in turn enables a visual derivation of the decision thresholds. Secondly, extending this work to the visualization of Double-Quantitative Three-Way Decisions (DQ-TWD), we further construct a two-dimensional Relative Conditional Probability-Absolute Conditional Probability space for the visual analysis of the nine double-quantitative decision types. Finally, a case study using a mushroom dataset verifies that the proposed visualization tools provide effective and interpretable decision support for complex uncertain reasoning applications, demonstrating strong potential for generalization and practical application.

Keywords: three-way decisions; decision-theoretic rough sets; Bayesian risk theory; three-way concept analysis; visualization; probabilistic rough sets; double-quantitative; geometric interpretation

收稿日期: 2025-07-10. 网络出版日期: 2026-01-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62266032).

通信作者: 徐健锋. E-mail: jianfeng_x@ncu.edu.cn.

三支决策 (three-way decisions, 3WD) 理论^[1-2]是在粗糙集^[3]研究基础上拓展出的一种新型不确定问题求解理论。该理论思想来源于人类处理不

确定问题时常用的朴素思想,即具有充分信息的对象往往被快速决策,而信息不充分的对象往往被延迟决策。三支决策理论目前已成为粒计算与知识发现领域中一个重要的研究方向。

近年来众多学者在模糊集^[3]和区间集^[4]、商空间^[5]、概念格^[6]等模型的基础上,拓展了多种三支决策理论^[7-10]。其中决策理论粗糙集是在经典三支决策模型的基础上引入了贝叶斯决策思想,提出了一种代价敏感三支决策方法^[11],其理论和应用研究的成果非常丰富。如文献^[12]提出了一种基于分数模糊决策理论粗糙集的三支决策新方法。文献^[13]将多粒度粗糙集与三支决策再结合,利用可变程度的多粒度决策理论粗糙集实现最佳性能。文献^[14]构建两种基于粒度加权策略的粗糙集模型实施相关的三支决策。文献^[15]基于概率的思想,对区间值模糊集的概率和条件概率进行改进,提高了概率的精确度。文献^[16]从几何视角解析决策粗糙集,通过可视化成本函数与阈值关系,为理论应用提供直观分析框架。文献^[17]则将经典多粒度及双量化研究与决策粗糙集进行了结合,提出了多粒度双量化决策粗糙集理论框架。文献^[18]则提出一种代价敏感三支决策与深度神经网络相融合的深度学习模型。上述研究显示了三支决策及其理论拓展蓬勃的学术生命力与持续创新活力。

可视化技术的起源可追溯至公元 2 世纪,彼时已采用行列结构实现数据管理的基础形式。到中世纪时期,人们已开始使用包含等值线的地磁图、表示海上主要风向的天象图等。在 20 世纪,随着计算技术和显示技术的发展,可视化技术更是得到了飞速发展。近十多年来,随着大数据技术的发展,现有的可视化技术面临海量、高维、多源、动态数据及可视化决策等挑战,数据可视化技术也随之迎来了新的发展机遇。其中可视化决策是一门辅以交互可视界面进行可解释性分析及复杂决策的科学^[19-21],其主要通过耦合人的分析能力与机器的可视化能力智能地解决由于数据量、问题的复杂性等带来的决策难题,目前已广泛地应用于大数据分析、知识图谱、医疗健康、生物医药、工业矿业等领域的辅助决策工作上^[22-25]。

上述研究显示可视化决策技术是计算机科学领域人机交互的重要手段。优秀的可视化技术不但能够直观地展示抽象数据、而且有助与人们快速理解复杂的模型并制定决策。在三支决策研究领域,研究者也通常有意或无意将可视化技术应用到其理论分析与概念阐述之中。例如,文献^[26]

对三支决策理论的相关概念进行了几何描述、文献^[27]也采用了可视化的方法,研究和提出了分段延迟代价敏感三支决策模型。这些研究显示了可视化方法既能够将较抽象的三支决策理论研究较直观表达,也能够有助于复杂推理的可视化解释。然而,目前在三支决策研究领域可视化技术都是作为辅助手段被应用于各种三支决策理论和应用研究中,尚未有文献将可视化三支决策作为三支决策理论研究的拓展方向之一,系统地构建可视化三支决策理论体系。

因此,构建可视化三支决策理论,采用可视化方法对三支决策的基本概念、代价敏感分析及典型推理问题进行系统研究,构建统一的三支决策可视化分析工具,为复杂不确定性推理提供有效的可解释性决策支撑,是当前可视化三支决策领域待解决的关键问题,也是本文研究的核心动机。

1 三支决策的概念及可视化

在经典二支决策理论框架下,论域被严格划分为两个互不相交的决策区域:正域 $C(\text{POS})$ 与负域 $C(\text{NEG})$,其核心假设要求每个对象 x 必须被严格划分到接受域或拒绝域。但是在现实世界中往往还普遍存在着对象无法被划分到正决策域与负决策域的不确定情况。为应对这一决策困境,三支决策理论引入了延迟域 $C(\text{BND})$ 。

如图 1 所示,三支决策理论是在经典二支决策域的分类基础上引入延迟区域,即将论域划分为 3 个互不相交的决策区域:正域 $C(\text{POS})$ 、负域 $C(\text{NEG})$ 和延迟域 $C(\text{BND})$ 。

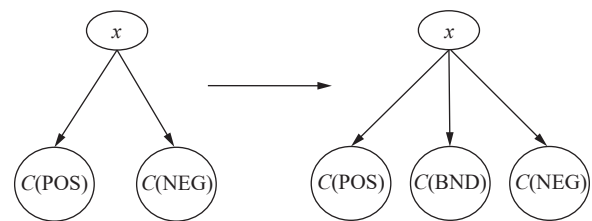


图 1 从二支决策概念到三支决策概念

Fig. 1 Evolution from two-way decision concept to three-way decision concept

这种将决策或者论域划分为 3 个部分的思想,是人类处理不确定问题思维方式的理论化成果之一。

概率粗糙集^[28]是三支决策理论的基本模型之一,其主要概念如下:

假设某个论域空间 U 中, $C \in U$ 表示一个目标概念, $[x]_R$ 是等价关系 $[x]_R \in U$ 的某个等价类, $[x]_R \in U$,条件概率 P_C 表示对象 $x \in U$ 相对于 $C \in U$ 的隶属

度,公式表示为

$$P_r = P_r(C|[x]_R) = \frac{|[x]_R \cap C|}{|[x]_R|}$$

对于某个等价类 $[x]_R$, 决策者可以通过设定的一对阈值 (α, β) ($0 \leq \beta < \alpha \leq 1$) 并且根据该等价类的条件概率 P_r , 做出 3 种不同的决策:

若 $P_r \geq \alpha$, 则接受 $[x]_R \in C$;

若 $P_r \leq \beta$, 则拒绝 $[x]_R \in C$;

若 $\beta < P_r < \alpha$, 则不接受也不拒绝 $[x]_R \in C$ 。

在概率粗糙集理论中, 上述 3 种不同的决策可表示为等价类 $[x]_R$ 被划分为 3 个论域空间, 即正域、负域和延迟决策域。这 3 个论域空间可分别表示如下

$$C_{\alpha, \beta}(\text{POS}) = \{x \in U | P_r \geq \alpha\}$$

$$C_{\alpha, \beta}(\text{BND}) = \{x \in U | \beta < P_r < \alpha\}$$

$$C_{\alpha, \beta}(\text{NEG}) = \{x \in U | P_r \leq \beta\}$$

基于可视化视角, 此处以条件概率 P_r 作为坐标轴, 可得到概率粗糙集理论中三支划分的可视化示意图, 如图 2 所示, 其中三支决策的正域集合可以由单个阈值 α 控制, 负域集合可由单个阈值 β 控制, 延迟决策域集合取决于阈值对 (α, β) 。

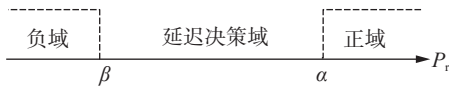


图 2 概率粗糙集三支划分的可视化

Fig. 2 Visualization of three-way partition in probabilistic rough sets

2 决策理论粗糙集及三支决策可视化分析

2.1 决策理论粗糙集及三支决策基本概念

决策理论粗糙集是三支决策理论中的重要研究发现之一, 其在经典三支决策模型基础上引入了贝叶斯决策思想, 提出了一种代价敏感三支决策方法。

在决策粗糙集理论中, 不同的决策会产生不同的代价损失。决策代价矩阵如表 1 所示, 该表定义了 3 种决策动作在面对两种对象实际类别时所产生的代价。列标表示元素 x 的实际类别, $x \in C$ 表示某一元素 x 实际为正对象, $x \in C^c$ 表示某一元素 x 实际为负对象, 其中, $C^c = U - C$ 。行标表示决策动作, a_p 动作表示某一元素 x 被划分至正域, a_b 动作表示某一元素 x 被划分至延迟域, a_n 动作表示某一元素 x 被划分至负域。单元格内 λ_{pp} 、 λ_{pn} 表示为正类元素 $x \in C$ 和负类元素 $x \in C^c$ 分别被划分为正域 $C_{\alpha, \beta}(\text{POS})$ 的代价; λ_{np} 、 λ_{nn} 表示为正类

元素 $x \in C$ 和负类元素 $x \in C^c$ 分别被划分为负域 $C_{\alpha, \beta}(\text{NEG})$ 的代价; λ_{bp} 、 λ_{bn} 表示为正域元素 $x \in C$ 和负域元素 $x \in C^c$ 分别被划分为延迟域 $C_{\alpha, \beta}(\text{BND})$ 的代价。

表 1 决策代价矩阵
Table 1 Cost matrix of decisions

类别	a_p	a_b	a_n
$x \in C$	λ_{pp}	λ_{bp}	λ_{np}
$x \in C^c$	λ_{pn}	λ_{bn}	λ_{nn}

当任一等价类 $[x]_R$ 被分别划分至 3 个决策域 $C_{\alpha, \beta}(\text{POS})$, $C_{\alpha, \beta}(\text{NEG})$, $C_{\alpha, \beta}(\text{BND})$ 后, 其各自对应的决策代价可被描述为 3 个代价函数: 正域决策的代价目标函数 T_p 、负域决策的代价目标函数 T_n 和延迟决策的代价目标函数 T_b 。其公式为

$$T_p = \lambda_{pp}P_r(C|[x]_R) + \lambda_{pn}P_r(C^c|[x]_R)$$

$$T_n = \lambda_{np}P_r(C|[x]_R) + \lambda_{nn}P_r(C^c|[x]_R)$$

$$T_b = \lambda_{bp}P_r(C|[x]_R) + \lambda_{bn}P_r(C^c|[x]_R)$$

三支决策整体期望目标可以表示为

$$T(\alpha, \beta) = \sum_{[x]_R \in C_{\alpha, \beta}(\text{POS})} T_p \times P_r([x]_R) + \sum_{[x]_R \in C_{\alpha, \beta}(\text{NEG})} T_n \times P_r([x]_R) + \sum_{[x]_R \in C_{\alpha, \beta}(\text{BND})} T_b \times P_r([x]_R)$$

根据贝叶斯决策理论, 三支决策整体期望目标可以表示为

$$\arg \min_{(\alpha, \beta)} T(\alpha, \beta)$$

其中 $\arg \min$ 表示使函数 $T(\alpha, \beta)$ 取得最小值的函数自变量的值, 整体期望目标函数的语义为寻找到一对阈值 (α, β) , 使得 (α, β) 的整体代价最小。

2.2 决策理论粗糙集代价目标函数在概率-代价空间的可视化分析

在经典决策理论粗糙集理论中, 由于 $P_r(C|[x]_R) + P_r(C^c|[x]_R) = 1$, 正域决策的代价目标函数 T_p 、负域决策的代价目标函数 T_n 和延迟决策的代价目标函数 T_b 可表示为线性函数的形式:

$$\begin{aligned} T_p &= (\lambda_{pp} - \lambda_{pn})P_r(C|[x]_R) + \lambda_{pn} \\ T_b &= (\lambda_{bp} - \lambda_{bn})P_r(C|[x]_R) + \lambda_{bn} \\ T_n &= (\lambda_{np} - \lambda_{nn})P_r(C|[x]_R) + \lambda_{nn} \end{aligned} \quad (1)$$

其中正域决策的代价目标函数 T_p 的转化过程为

$$\begin{aligned} T_p &= \lambda_{pp}P_r(C|[x]_R) + \lambda_{pn}P_r(C^c|[x]_R) = \\ &= \lambda_{pp}P_r(C|[x]_R) + \lambda_{pn}(1 - P_r(C|[x]_R)) = \\ &= (\lambda_{pp} - \lambda_{pn})P_r(C|[x]_R) + \lambda_{pn} \end{aligned}$$

T_n 和 T_b 的转化过程与 T_p 相同。

根据式 (1) 中各个线性函数的几何特点, 各代价目标函数 (T_p 、 T_n 或 T_b) 和条件概率之间的可

可视化关系可以在二维概率-代价 ($P_r \sim T$) 空间中使用直线来被表示。

以正域决策代价目标函数 T_p 作为例子。在 $P_r \sim T$ 空间中 T_p 函数的可视化如图 3 所示, 其横轴 P_r 表示各代价目标函数的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 值, 纵轴 T 表示各代价目标函数的行动代价取值。其中 $(\lambda_{pp} - \lambda_{pn})$ 为 T_p 的斜率, 当 $P_r = 0$ 时, T_p 行动的代价取值为 λ_{pn} ; 当 $P_r = 1$ 时, T_p 行动的代价取值为 λ_{pp} 。

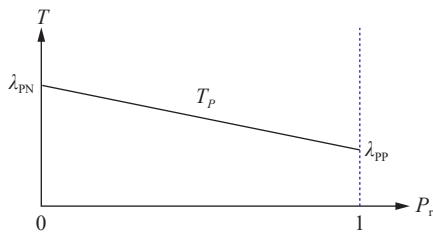


图 3 在 $P_r \sim T$ 空间中 T_p 函数的可视化图形
Fig. 3 Visualization of the T_p function in $P_r \sim T$ space

在经典决策粗糙集理论中通常约定 $(\lambda_{pp} - \lambda_{pn}) < 0$, 其可视化语义为 T_p 的正域决策代价随着条件概率 P_r 的增加而减小, 即对象集合 $[x]_R$ 被决策为正域 C 的代价随着条件概率 P_r 的增加而减小。

同理, 如图 4(a) 所示, 负域决策的代价目标函数可表示为直线 T_N 。其中, $(\lambda_{np} - \lambda_{nn})$ 为 T_N 的斜率, 同时, 当 $P_r = 0$ 时, T_N 行动的代价取值为 λ_{nn} ; 当 $P_r = 1$ 时, T_N 行动的代价取值为 λ_{np} 。经典决策粗糙集理论中通常约定 $(\lambda_{np} - \lambda_{nn}) > 0$, 其可视化语义为 T_N 的负域决策的代价随着条件概率 P_r 的增加而增加。

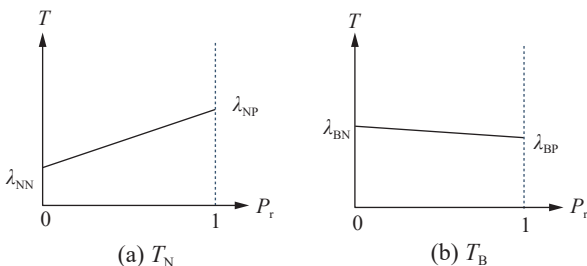


图 4 目标代价函数 T_N 、 T_B 的可视化图形
Fig. 4 Visualization of the cost functions T_N and T_B

如图 4(b) 所示, 延迟域决策的代价目标函数可表示为直线 T_B 。其中, $(\lambda_{bp} - \lambda_{bn})$ 为 T_B 的斜率, 同时, 当 $P_r = 0$ 时, T_B 行动的代价取值为 λ_{bn} ; 当 $P_r = 1$ 时, T_B 行动的代价取值为 λ_{bp} 。经典决策粗糙集理论中通常对 T_B 的斜率不作要求, 其可视化语义为延迟域决策代价 T 与条件概率 P_r 的单调关系无法确定。

2.3 三支决策阈值的可视化推理

在经典决策粗糙集理论中通常约定 $\lambda_{pp} \leq \lambda_{bp} < \lambda_{np}$, $\lambda_{nn} \leq \lambda_{bn} < \lambda_{pn}$ 。 T_p 、 T_N 、 T_B 之间的几何关系如图 5 所示, 其几何语义为当 $P_r = 1$ 时, T_N 的取值大于 T_B 的取值, 同时 T_B 的取值大于 T_p 的取值。当 $P_r = 0$ 时, T_p 的取值大于 T_B , 同时 T_B 的取值大于 T_N 的取值。在此情况下, 两条直线 T_p 和 T_B 一定会相交, 经典决策粗糙集理论将直线 T_p 和 T_B 的交点对应的 P_r 值设为 α , 并且约定 $0 < \alpha \leq 1$ 。两条直线 T_N 和 T_B 也一定会相交, 其中直线 T_N 和 T_B 的交点对应的 P_r 值被设为 β , 并且约定 $0 \leq \beta < 1$ 。

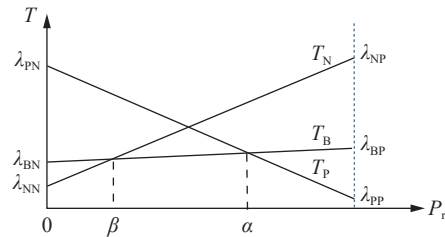


图 5 T_p 、 T_N 、 T_B 之间的几何关系 1
Fig. 5 Geometric relationships one between T_p 、 T_N 、 T_B

根据 α 与 β 的几何语义可得

$$\alpha = \left(1 + \frac{\lambda_{bp} - \lambda_{pp}}{\lambda_{pn} - \lambda_{bn}} \right)^{-1}$$

$$\beta = \left(1 + \frac{\lambda_{np} - \lambda_{bp}}{\lambda_{bn} - \lambda_{nn}} \right)^{-1}$$

证明

由于 α 为直线 T_p 和 T_B 的交点对应的 P_r 值, 所以通过求解 $T_p = T_B$, 得到的 P_r 值为 α 。

根据 T_p 和 T_B 对应的以 P_r 为自变量的方程

$$T_p = (\lambda_{pp} - \lambda_{pn})P_r(C|[x]_R) + \lambda_{pn}$$

$$T_B = (\lambda_{bp} - \lambda_{bn})P_r(C|[x]_R) + \lambda_{bn}$$

可以得到等式

$$(\lambda_{pp} - \lambda_{pn})P_r + \lambda_{pn} = (\lambda_{bp} - \lambda_{bn})P_r + \lambda_{bn}$$

解得 $P_r = \left(1 + \frac{\lambda_{bp} - \lambda_{pp}}{\lambda_{pn} - \lambda_{bn}} \right)^{-1}$

故 $\alpha = \left(1 + \frac{\lambda_{bp} - \lambda_{pp}}{\lambda_{pn} - \lambda_{bn}} \right)^{-1}$ 得证。

由 α 的取值公式可得, α 随着 $(\lambda_{bp} - \lambda_{pp}) / (\lambda_{pn} - \lambda_{bn})$ 的增大而减小。当 $(\lambda_{bp} - \lambda_{pp}) / (\lambda_{pn} - \lambda_{bn})$ 趋向于正无穷时, α 趋向于 0; 当 $(\lambda_{bp} - \lambda_{pp}) / (\lambda_{pn} - \lambda_{bn})$ 趋向于 0 时, α 趋向于 1。

同理, 运用与证明 α 取值类似的方法, 可得

$$\beta = \left(1 + \frac{\lambda_{np} - \lambda_{bp}}{\lambda_{bn} - \lambda_{nn}} \right)^{-1}$$

由 β 的取值公式可得, β 随着 $(\lambda_{np} - \lambda_{bp}) / (\lambda_{bn} - \lambda_{nn})$ 的增大而减小。当 $(\lambda_{np} - \lambda_{bp}) / (\lambda_{bn} - \lambda_{nn})$ 趋向于正无穷时, β 趋向于 0; 当 $(\lambda_{np} - \lambda_{bp}) / (\lambda_{bn} - \lambda_{nn})$ 趋向于 0 时, β 趋向于 1。

2.4 三支决策目标代价最小化的可视化推理

经典决策粗糙集理论中,同时约定各损失函数之间满足

$$(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})/(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) < (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})/(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})$$

其几何语义为此时直线 T_P 和 T_B 的交点对应的横坐标取值大于直线 T_N 和 T_B 的交点对应的横坐标取值,即此时 $\alpha > \beta$ 。

根据图 5 所示,此时当横坐标 $P_r \geq \alpha$ 时,直线 T_P 的代价取值最小;当横坐标 $P_r \leq \beta$ 时,直线 T_N 的代价取值最小;当横坐标 $\beta < P_r < \alpha$ 则,直线 T_B 的代价取值小。

同样,如果各损失函数之间满足

$$(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})/(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) > (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})/(\lambda_{NN} - \lambda_{NN})$$

根据 $P_r \sim T$ 空间中各代价目标函数 T_P 、 T_N 或 T_B 的几何语义,可得 $\beta > \alpha$ 。 T_P 、 T_N 、 T_B 之间的几何关系 2 如图 6 所示,此时经典决策粗糙集理论将两条直线 T_P 和 T_N 交点的横坐标值设为 γ ,并且 $0 \leq \gamma \leq 1$ 。

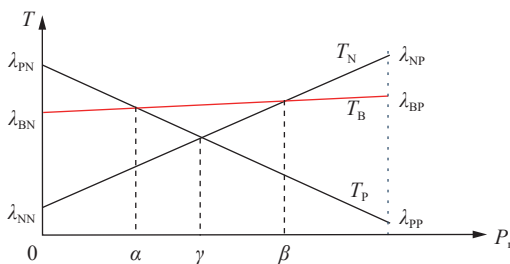


图 6 T_P 、 T_N 、 T_B 之间的几何关系 2

Fig. 6 The geometric relationship two between T_P 、 T_N 、 T_B

根据上述 γ 的几何特征,通过求解 $T_P = T_N$,可得

$$\gamma = \left(1 + \frac{\lambda_{NP} - \lambda_{PP}}{\lambda_{PN} - \lambda_{NN}}\right)^{-1} \quad (2)$$

γ 取值的证明过程与证明 α 的取值证明过程类似。

由式(2)可得,直线 T_P 和 T_N 交点的对应的 P_r 值 γ ,随着 $(\lambda_{NP} - \lambda_{PP})/(\lambda_{PN} - \lambda_{NN})$ 的增大而减小。

此时,当横坐标 $P_r \geq \gamma$ 时,直线 T_P 的代价取值最小;当横坐标 $P_r < \gamma$ 时,直线 T_N 的代价取值最小。因此,图 6 所示的三支决策已经退化为两支决策。

综上所述,在 $P_r \sim T$ 空间中线性函数的斜率与交点的可视化分析,为动态调整不同决策方案和降低决策风险提供了可视化的理论依据。

3 双量化三支决策的可视化分析

双量化三支决策理论(double-quantitative three-way decision, DQ-TWD)^[29]是张贤勇教授在传统三支决策框架基础上提出的创新性扩展模

型,旨在通过融合相对条件概率 P_r 与绝对条件概率 P_a ,克服单一量化视角的局限性,提升决策的全面性与鲁棒性。该理论的核心在于结合局部信息纯度与全局贡献度,通过双重量化指标动态优化决策阈值,实现更精细化的分类与推理。

3.1 三支关注的基本概念

传统三支决策模型基于贝叶斯风险理论,利用相对条件概率 P_r 将论域划分为正域 $C_{\alpha,\beta}(\text{POS})$ 、延迟域 $C_{\alpha,\beta}(\text{BND})$ 和负域 $C_{\alpha,\beta}(\text{NEG})$ 。然而,相对条件概率 P_r 仅反映局部纯度(如等价类内目标实例的比例),忽略了等价类对整体目标的全局贡献(如该等价类在全局目标中的占比)。例如,某等价类虽具有高 P_r (局部表现优秀),但其规模有限,导致其对全局决策的贡献度不足;反之,低 P_r 但大规模的等价类可能对全局具有显著影响。这种矛盾促使双量化理论的提出,通过引入绝对条件概率 P_a 与三支关注机制,实现局部与全局的互补性融合。其中,绝对条件概率 P_a 被定义为等价类 $[x]_R$ 对目标概念 C 整体的贡献比例,其数学表达为

$$P_a = P_r([x]_R|C) = \frac{|[x]_R \cap C|}{|C|}$$

与经典决策粗糙三支决策类似,三支关注对于某个等价类 $[x]_R$,决策者可以通过设定的一对阈值 (μ, ν) $(0 \leq \mu < \nu \leq 1)$ 并且根据该等价类的绝对条件概率 P_a ,做出 3 种不同的关注决策:

若 $P_a \geq \mu$,则高关注 $[x]_R$;

若 $P_a \leq \nu$,则低关注 $[x]_R$;

若 $\nu < P_a < \mu$,则中关注 $[x]_R$ 。

在三支关注理论中,上述 3 种不同的关注决策可表示为等价类 $[x]_R$ 被划分为 3 个论域空间,即高关注域HIG、中关注域NEU和低关注域LOW。

$$\text{HIG: } C_{u,v}(\text{HIG}) = \{x: P_a \geq u\}$$

$$\text{NEU: } C_{u,v}(\text{NEU}) = \{x: P_a \in (v, u)\}$$

$$\text{LOW: } C_{u,v}(\text{LOW}) = \{x: P_a \leq v\}$$

根据高关注区域、中关注区域、低关注区域的定义,可以建立三支关注概念的可视化模型,如图 7 所示。



图 7 三支关注概念的可视化模型

Fig. 7 Visualization model of the three-way attentions concept

3.2 三支决策与三支关注集成类型

三支决策与三支关注的双量化集成类型主要采用串行集成策略,即在三支决策基础上添加三支关注。

因为相对条件概率 P_r 与绝对条件概率 P_a 是独立的, 在讨论三支关注与三支决策的集成问题上, 双量化三支决策可视化模型如图 8 所示, 以 P_r 为横轴、 P_a 为纵轴构建二维 $P_r \sim P_a$ 空间, 并以空间中的 4 条直线: $P_r = \beta$ 、 $P_r = \alpha$ 、 $P_a = \mu$ 和 $P_a = \nu$ 将 $P_r \sim P_a$ 空间划分为 9 个决策区域。

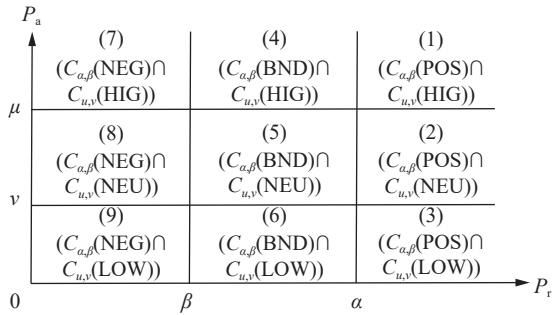


图 8 双量化三支决策可视化模型

Fig. 8 Visualization model of double-quantitative three-way decisions

- (1) 接受且高关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{POS}) \cap C_{u,v}(\text{HIG}))$;
- (2) 接受且中关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{POS}) \cap C_{u,v}(\text{NEU}))$;
- (3) 接受且低关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{POS}) \cap C_{u,v}(\text{LOW}))$;
- (4) 延迟且高关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{BND}) \cap C_{u,v}(\text{HIG}))$;
- (5) 延迟且中关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{BND}) \cap C_{u,v}(\text{NEU}))$;
- (6) 延迟且低关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{BND}) \cap C_{u,v}(\text{LOW}))$;
- (7) 拒绝且高关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{NEG}) \cap C_{u,v}(\text{HIG}))$;
- (8) 拒绝且中关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{NEG}) \cap C_{u,v}(\text{NEU}))$;
- (9) 拒绝且低关注区域 $(C_{\alpha,\beta}(\text{NEG}) \cap C_{u,v}(\text{LOW}))$ 。

每个等价类 $[x]_R$ 根据其相对条件概率 P_r 值与绝对条件概率 P_a 值映射为 $P_r \sim P_a$ 空间中的一个二维数据点, 决策者根据该数据点处于 $P_r \sim P_a$ 空间中的某个决策区域, 作出相应的双量化三支决策。

该九域划分突破了传统单量化三支决策的粒度限制, 通过三支决策与三支关注实现了局部-全局信息的协同推理。在 $P_r \sim P_a$ 空间中每个子域对应特定的决策动作与可靠性评价。例如, 处于区域 1 中的等价类, 具有局部置信度与全局覆盖度上的双重优势, 往往被视为核心决策支撑域;

而处于区域 9 中的等价类, 具有双维度低价值, 往往直接拒绝并被剔除。

这种细粒度划分不仅增强了复杂非均衡数据下的决策鲁棒性, 更通过九域间的动态映射关系 (如区域 2 → 区域 1 的升域转化需提升 P_a 值) 构建了多目标优化的量化路径。

综上所述, 在二维 $P_r \sim P_a$ 空间中构建的双量化三支决策可视化模型, 通过二维空间中的区域可视化映射, 实现了局部信息纯度与全局贡献度的协同分析, 便于决策者直观理解传统单量化模型的粗粒度局限, 提升了非均衡数据下的决策精细化水平。

4 三支决策可视化分析实例

4.1 决策理论粗糙集三支决策分析实例

为验证本文所提可视化分析方法的有效性与实用性, 本章选取文献 [30] 所使用的 UCI 蘑菇数据集作为实例进行研究。该实例旨在清晰地展示, 在面对一个具体的分类问题时, 本文构建的 $P_r \sim T$ 空间不仅能够静态呈现决策结果, 更能动态、直观地揭示代价参数如何驱动决策阈值变化, 并最终影响决策规则的内在机理。

数据集包含了 8124 个蘑菇样本, 每一个样本拥有 22 个描述性属性以及一个最终的类别标签, 目标概念 C 定义为“可食用蘑菇”。决策的目标是在引入决策代价的前提下, 将蘑菇划分为“接受”(判断为毒蘑菇)、“拒绝”(判断为可使用)或“延迟决策”(无法判断是否可食用, 需进一步检查) 3 个域。

根据概率粗糙集理论, 本节将论域 U (全体蘑菇样本) 基于菌褶颜色划分为 10 个等价类 $\{[x_1], [x_2], \dots, [x_{10}]\}$, 并计算每个等价类 $[x_i]$ 对于目标概念 C 的相对条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 。等价类条件概率信息如表 2 所示, 其中 $[x_i]$ 表示第 i 个等价类, 描述表示每个代价类的菌褶颜色。

表 2 基于菌褶颜色划分的等价类条件概率信息表

Table 2 Conditional probabilities of equivalence classes partitioned by gill color

等价类	$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_4]$	$[x_5]$	$[x_6]$	$[x_7]$	$[x_8]$	$[x_9]$	$[x_{10}]$
描述	粉色	白色	紫色	灰色	橙色	黑色	棕色	黄色	绿色	红色
$P_r(C [x]_R)$	0.126	0.266	0.447	0.58	0.721	0.843	0.893	1.000	1.000	1.000

同时 3 种决策动作在面对两种对象实际类别时所产生的代价为:

$\lambda_{PN}=30$, 即将毒蘑菇误判为可食用, 风险最

高; $\lambda_{NP}=15$, 即将可食用蘑菇误判为有毒, 造成机会成本; $\lambda_{BP}=5$, $\lambda_{BN}=10$, 即延迟决策本身也存在相应的时间或检测成本; $\lambda_{PP}=0$, $\lambda_{NN}=0$, 即正确决策

无代价, 其数值根据决策粗糙集理论, 满足 $\lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$, $\lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$ 。

根据上述损失函数可以获得的正域、负域和延迟域的决策代价目标函数为

$$T_P = (0 - 30)P_r(C|[x]_R) + 30$$

$$T_B = (5 - 10)P_r(C|[x]_R) + 10$$

$$T_N = (15 - 0)P_r(C|[x]_R) + 0$$

正域、负域和延迟域的决策代价目标函数在二维 $P_r \sim T$ 空间之间的可视化关系如图 9 所示。

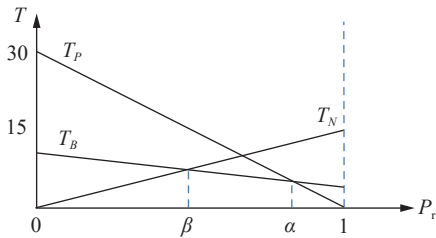


图 9 决策代价函数 T_P 、 T_N 、 T_B 在 $P_r \sim T$ 空间中的几何关系

Fig. 9 Geometric relationships between decision cost function T_P 、 T_N 、 T_B in $P_r \sim T$ space

根据贝叶斯最小风险决策理论, 对于任意一个等价类 $[x_i]$, 最优决策应是选择使其期望代价最小的行动方案。这一抽象原则在本研究构建的 $P_r \sim T$ 二维可视化空间中获得了清晰的可视化解释。

如图 9 所示, 正域、负域和延迟域的决策代价目标函数被表达为 3 条独立的直线, 对于给定的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$, 确定最优决策的过程在几何上对应为——在该概率点上, 选择 3 条代价直线中纵坐标值最小的决策代价目标函数。

决策区域的转换点, 即决策阈值 α 和 β , 在几何上体现为这些代价函数直线的交点横坐标。通过计算各函数交点可以得到: $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.5$ 。这种几何关系确立了清晰的三支决策规则:

当一个等价类的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 处于区间 $[0, 0.5]$ 时, 直线 T_N 的取值最小, 因此应采取拒绝决策, 将其划入负域 $C_{\alpha, \beta}(\text{NEG})$;

当一个等价类的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 处于区间 $(0.5, 0.8)$ 时, 直线 T_B 的取值最小, 因此应采取延迟决策, 将其划入延迟域 $C_{\alpha, \beta}(\text{BND})$;

当一个等价类的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 处于区间 $[0.8, 1]$ 时, 直线 T_P 的取值最小, 因此应采取接受决策, 将其划入正域 $C_{\alpha, \beta}(\text{POS})$ 。

本节将使用上述决策规则对表 2 中实验对象数据实施三支分类, 此时可以根据各个等价类 $[x_i]$ 的条件概率值, 将决策代价函数几何关系和等价类映射到 $P_r \sim T$ 空间的横轴上, 如图 10 所示, 图 10

中, $P_{r x_i}$ 代表第 i 个等价类 $[x_i]$ 所对应的相对条件概率 $P_r(C|[x_i]_R)$ 的值。根据其对应的条件概率值与 α 和 β 的关系, 可以直观地得到如下三支决策域分类

$C_{\alpha, \beta}(\text{POS}) = \{[x_6], [x_7], [x_9], [x_{10}]\}$ 集合中的元素被判断为可食用。

$C_{\alpha, \beta}(\text{BND}) = \{[x_4], [x_5]\}$ 集合中的元素被要求接受进一步的检验。

$C_{\alpha, \beta}(\text{NEG}) = \{[x_1], [x_2], [x_3]\}$ 集合中的元素被判断为有毒。

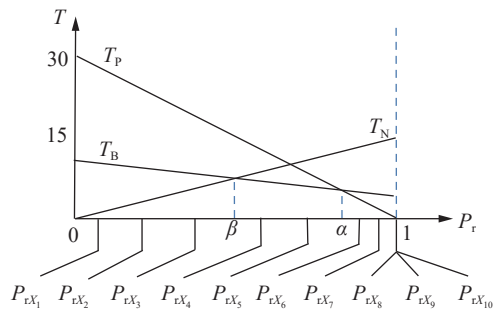


图 10 $P_r \sim T$ 空间中决策代价函数几何关系和等价类映射

Fig. 10 Geometry of decision cost functions and equivalence class projections in $P_r \sim T$ space

该可视化方法的一个关键优势在于, 它能清晰地预演决策者风险偏好变化所带来的后果, 而这种变化在模型中即体现为代价参数的调整。

例如, 假设决策者获得了更经济的检测手段, 导致延迟决策的成本显著降低。此时可食用蘑菇进行延迟决策的成本 λ_{BP} 由 5 大幅下调至 1, 其余代价保持不变。在 $\lambda_{BP}=1$ 情况下, $P_r \sim T$ 空间中的决策代价函数几何关系和等价类映射如图 11 所示, 这一调整在几何上表现为直线 T_B 的斜率减小。其带来的决策后果是延迟域范围的扩张: 延迟域的右边界 α 增加, 左边界 β 则减少。

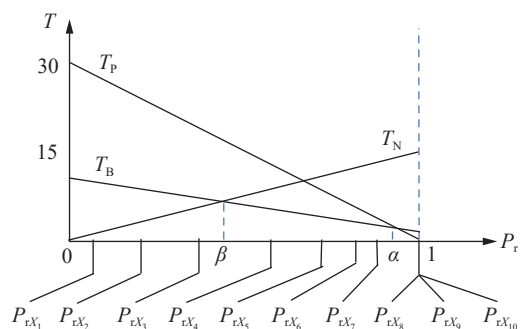


图 11 在 $\lambda_{BP}=1$ 情况下, $P_r \sim T$ 空间中的决策代价函数几何关系和等价类映射

Fig. 11 Geometry of decision cost functions ($\lambda_{BP}=1$) and equivalence class projections in $P_r \sim T$ space

这在决策语义上意味着, 决策者现在更倾向于将更多不确定的样本纳入延迟观察, 而不是草率地接受或拒绝, 这体现了一种更为审慎的决策策略。

此时, 通过计算各函数交点可以得到: $\alpha=0.95$ 、 $\beta=0.42$ 。对应的三支决策域分类改变为

$C_{\alpha,\beta}(\text{POS}) = \{[x_8], [x_9], [x_{10}]\}$ 集合中的元素被判断为可食用。

$C_{\alpha,\beta}(\text{BND}) = \{[x_4], [x_5], [x_6], [x_7]\}$ 集合中的元素被要求接受进一步的检验。

$C_{\alpha,\beta}(\text{NEG}) = \{[x_1], [x_2], [x_3]\}$ 集合中的元素被判断为有毒。

最后, 探讨三支决策退化到二支决策的情况。例如, 将延迟可食用蘑菇的成本大幅提高至 $\lambda_{BP}=12$, 即对可食用蘑菇做出延迟决策的成本由 5 增加至 12, 其余保持不变, 由图 12 所示。此行为导致直线 T_B 的斜率增大, 带来的变化是 α 的值会减小, β 的值会增加, 同时 α 的值小于 β 的值。

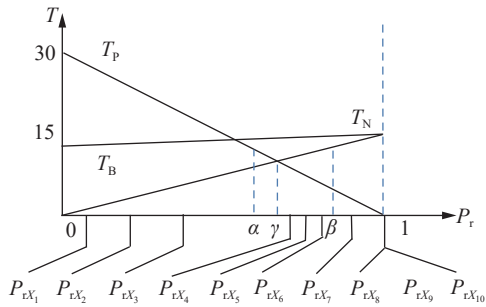


图 12 $\lambda_{BP}=12$ 情况下, $P_r \sim T$ 空间中的决策代价函数几何关系和等价类映射

Fig. 12 Geometry of decision cost functions ($\lambda_{BP}=12$) and equivalence class projections in $P_r \sim T$ space

在上文中提到, 对于给定的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$, 其最优决策便对应于 3 条直线中在该点函数值 (即纵坐标) 最低的那一条, 而此时对于任何 $P_r(C|[x]_R)$, T_B 都不是最小值。在图 11 对应退化的

情况下可以看出, 决策区域的转换点变成了决策阈值 γ 。通过计算各函数交点可以得到: $\alpha=0.63$ 、 $\beta=0.77$ 、 $\gamma=0.67$ 。

这种几何关系确立了新的二支决策规则:

当一个等价类的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 处于区间 $[0, 0.67]$ 时, 直线 T_N 的值最小, 因此应采取拒绝决策, 将其划入负域 $C_{\alpha,\beta}(\text{NEG})$ 。

当一个等价类的条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 处于区间 $(0.67, 1]$ 时, 直线 T_P 的值最小, 因此应采取接受决策, 将其划入正域 $C_{\alpha,\beta}(\text{POS})$ 。

使用上述决策规则对表 2 中实验对象数据实施三支分类, 得到如下二支决策域分类

$C_{\alpha,\beta}(\text{POS}) = \{[x_5], [x_6], [x_7], [x_8], [x_9], [x_{10}]\}$ 集合中的元素被判断为可食用。

$C_{\alpha,\beta}(\text{NEG}) = \{[x_1], [x_2], [x_3], [x_4]\}$ 集合中的元素被判断为有毒。

4.2 双量化三支决策实例与可视化决策分析

为从实证角度进一步检验该可视化模型的有效性, 本小节延续 4.1 节的研究, 继续采用 UCI 蘑菇数据集。与前述基于“菌褶颜色”属性的分析不同, 本节将选取在双量化空间中分布模式更为清晰的“气味”属性作为划分等价类的依据, 进行深入的实例分析, 展示该可视化方法如何清晰、直观地揭示一个高效分类属性在双量化决策空间中的分布模式, 从而辅助决策者识别关键规则, 并验证模型的决策效能。

根据概率粗糙集理论, 本节将论域 U (全体蘑菇样本) 基于气味划分为 9 个等价类 $\{[x_1], [x_2], \dots, [x_9]\}$, 并计算每个等价类 $[x_i]$ 对于目标概念 C 的相对条件概率 $P_r(C|[x]_R)$ 。基于气味属性划分的等价类条件概率信息表如表 3 所示, 其中 $[x_i]$ 表示第 i 个等价类, 描述表示每个代价类的气味特征, $P_r(C|[x]_R)$ 为对应等价类的相对条件概率。

表 3 基于气味属性划分的等价类条件概率信息表
Table 3 Conditional probabilities of equivalence classes partitioned by odor

等价类	$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_4]$	$[x_5]$	$[x_6]$	$[x_7]$	$[x_8]$	$[x_9]$
描述	无	恶臭	辛辣	鱼腥	杏仁	茴香	刺激性	煤焦油	霉味
$P_r(C [x]_R)$	0.966	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
$P_r([x]_R C)$	0.151	0.431	0.147	0.077	0.020	0.050	0.065	0.049	0.009

$P_r \sim P_a$ 可视化空间的构建基于 4 条阈值直线: 相对条件概率 P_r 的阈值设为 $\alpha = 0.8$ 和 $\beta = 0.5$; 绝对条件概率 P_a 的阈值取 $\mu = 0.15$ 和 $\nu = 0.05$ 。由此, $P_r \sim P_a$ 平面被划分为 9 个语义明确的决策区域。

当基于“气味”属性划分的 9 个等价类被映射

到该决策空间时, 它们展现出一种高度结构化、高区分度的分布模式, 如图 13 所示。

图 13 中, 各个等价类 $[x_i]$ 根据其对应的绝对条件概率和相对条件概率被映射为空间中的一个红点。

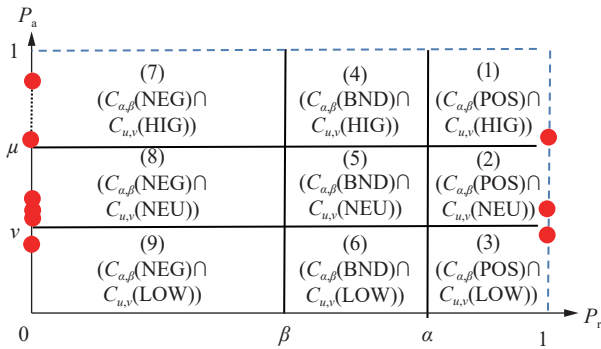


图 13 基于“气味”属性的等价类在 $P_r \sim P_a$ 空间中的分布

Fig. 13 Distribution of “odor” equivalence classes in the $P_r \sim P_a$ space

此时，基于气味属性划分的等价类双量化三支决策域分类为

- (1)接受且高关注区域: $\{[x_1]\}$;
- (2)接受且中关注区域: $\{[x_6]\}$;
- (3)接受且低关注区域: $\{[x_5]\}$;
- (4)延迟且高关注区域: $\{\emptyset\}$;
- (5)延迟且中关注区域: $\{\emptyset\}$;
- (6)延迟且低关注区域: $\{\emptyset\}$;
- (7)拒绝且高关注区域: $\{[x_2]\}$;
- (8)拒绝且中关注区域: $\{[x_3], [x_4], [x_7]\}$;
- (9)拒绝且低关注区域: $\{[x_8], [x_9]\}$ 。

从图 13 及其对应的分类结果可以看出，基于“气味”属性的等价类在本文构建的可视化空间中呈现出高度结构化的分布模式。该方案成功地将论域内的对象划分到意义明确的决策簇中，其核心优势在于决策的高确定性与规则的高价值性得到了完美结合。具体分析如下：

首先，对于“无气味”的等价类，其相对条件概率 P_r 和绝对条件概率 P_a 双高，精准地映射在“接受且高关注”区域，构成了判断蘑菇可食用的强有力规则。与此同时，“恶臭”作为具有最高全局重要性的负类特征，被映射在“拒绝且高关注”区域，成为了识别不可食用蘑菇的最关键指标。

其次，决策空间利用高效。绝大多数样本都被少数几个高确定性、高价值的核心规则所覆盖。这种分布模式使得整个决策空间结构清晰、层次分明，避免了信息分散和决策模糊的问题。

综上所述，通过“气味”属性的实例可以看出，本章提出的双量化可视化模型能够有效识别出具有卓越分类效能的关键属性。该方法不仅直观地展示了不同等价类在决策中的确定性（局部价值）和重要性（全局价值），还为决策者提供了一种强大的、可解释的分析方法，能够快速洞察数

据背后的核心模式。

5 结束语

本文的研究结果展示了所提可视化分析方法在三支决策领域的可拓展性。与以往将可视化作为辅助阐述的手段不同，本文系统性地构建了 $P_r \sim T$ 和 $P_r \sim P_a$ 两种二维可视化空间。这些模型不仅为理解三支决策的语义提供了直观支撑，更重要的是，它们将抽象的代价函数、决策阈值和多维量化指标之间的交互关系转化为清晰的几何关系。通过这种方式，抽象的决策规则得以在统一的框架内进行可视化推导、解释和集成，从而为复杂不确定性推理提供了更具系统性和可解释性的分析路径，显著提升了决策效率。

未来研究可从以下方向推进：其一，将可视化技术深度整合至三支决策的拓展模型中，以增强复杂场景下的理论适用性；其二，在实际应用中使用本文提出的可视化技术，通过本文方法实时反馈机制提升决策效率与用户协作能力。

参考文献：

- [1] YAO Yiyu. Three-way decision: an interpretation of rules in rough set theory[C]//Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2009: 642–649.
- [2] YAO Yiyu. An outline of a theory of three-way decisions[C]//Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer, 2012: 1–17.
- [3] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338–353.
- [4] JAULIN L, KIEFFER M, DIDRIT O, et al. Interval analysis[M]//Applied Interval Analysis. London: Springer London, 2001: 11–43.
- [5] 张燕平, 张铃, 吴涛. 不同粒度世界的描述法: 商空间法[J]. 计算机学报, 2004, 27(3): 328–333.
ZHANG Yanping, ZHANG Ling, WU Tao. The representation of different granular worlds: a quotient space[J]. chinese journal of computers, 2004, 27(3): 328–333.
- [6] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[C]//Ordered Sets. Dordrecht: Springer, 1982: 445–470.
- [7] 陈清利. 粗糙集与商空间融合的粒计算模型理论研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2012, 40(1): 161–163.
CHEN Qingli. Theory research of the granular computing unified model[J]. Journal of Henan Normal University (natural science edition), 2012, 40(1): 161–163.

- [8] YAO Yiyu. The Dao of three-way decision and three-world thinking[J]. *International journal of approximate reasoning*, 2023, 162: 109032.
- [9] WANG Tianxing, HUANG Bing, LI Huaxiong. Optimized third-generation prospect theory-based three-way decision approach for conflict analysis in multi-scale Z-number information systems[J]. *Information sciences*, 2024, 663: 120309.
- [10] QIN Hongwu, PENG Qiangwei, MA Xiuqin. A novel interval-valued Fermatean fuzzy three-way decision making method with probability dominance relations[J]. *Expert systems with applications*, 2024, 242: 122727.
- [11] YAO Yiyu. Decision-theoretic rough set models[C]// *Rough sets and Knowledge Technology*. Berlin: Springer, 2007: 1–12.
- [12] ABDULLAH S, AL-SHOMRANI M M, LIU Peide, et al. A new approach to three-way decisions making based on fractional fuzzy decision-theoretical rough set[J]. *International journal of intelligent systems*, 2022, 37(3): 2428–2457.
- [13] YU Ying, WAN Ming, QIAN Jin, et al. Feature selection for multi-label learning based on variable-degree multi-granulation decision-theoretic rough sets[J]. *International journal of approximate reasoning*, 2024, 169: 109181.
- [14] 王茜, 张贤勇. 不完备邻域加权多粒度决策理论粗糙集及三支决策[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2023, 58(9): 94–104.
WANG Qian, ZHANG Xianyong. Incomplete neighborhood weighted multi-granularity decision-theoretic rough sets and three-way decision[J]. *Journal of Shandong University (natural science edition)*, 2023, 58(9): 94–104.
- [15] 金雨馨, 冯涛, 王荣欣, 等. 概率区间值模糊覆盖粗糙集及其三支决策[J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2025, 37(1): 131–146.
JIN Yuxin, FENG Tao, WANG Rongxin, et al. Probability interval-valued fuzzy covering rough set and its three-way decision[J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (natural science edition)*, 2025, 37(1): 131–146.
- [16] XU Jianfeng, MIAO Duoqian, ZHANG Li, et al. Algebraic formulations and Geometric interpretations of Decision-theoretic rough sets[C]// *Rough Sets*. Cham: Springer, 2023: 31–45.
- [17] XU Weihua, GUO Yanting. Generalized multigranulation double-quantitative decision-theoretic rough set[J]. *Knowledge-based systems*, 2016, 105: 190–205.
- [18] LI Huaxiong, ZHANG Libo, ZHOU Xianzhong, et al. Cost-sensitive sequential three-way decision modeling using a deep neural network[J]. *International journal of approximate reasoning*, 2017, 85: 68–78.
- [19] MUNTWILER C, EPPLER M J. Improving decision making through visual knowledge calibration[J]. *Management decision*, 2023, 61(8): 2374–2390.
- [20] LIU S, MIAO H, LI Z, et al. AVA: towards autonomous visualization agents through visual perception-driven decision-making[J]. *Computer graphics forum*, 2024, 43(3): e15093.
- [21] WAZZAN A, WRIGHT M, MACNEIL S, et al. Evaluating the impact of AI-generated visual explanations on decision-making for image matching[C]// *Proceedings of the 30th International Conference on Intelligent User Interfaces*. Cagliari: ACM, 2025: 672–684.
- [22] 骆昱宇, 秦雪迪, 谢宇鹏, 等. 智能数据可视分析技术综述[J]. *软件学报*, 2024, 35(1): 356–404.
LUO Yuyu, QIN Xuedi, XIE Yupeng, et al. Intelligent data visualization analysis techniques: a survey[J]. *Journal of software*, 2024, 35(1): 356–404.
- [23] KRIL D N, BRODHEAD M T, MOOREHOUSE A G. Further evaluation of a decision-making algorithm supporting visual analysis of time-series data[J]. *Behavioral interventions*, 2022, 37(4): 1030–1042.
- [24] 高宁, 李玉榕, 陈泓, 等. 心电形态与节律特征融合的轻量房颤检测模型及可解释性研究[J]. *电子学报*, 2025, 53(2): 503–513.
GAO Ning, LI Yurong, CHEN Hong, et al. Lightweight atrial fibrillation model based on feature fusion of morphology and rhythmic and interpretability analysis[J]. *Acta electronica sinica*, 2025, 53(2): 503–513.
- [25] 田淙海, 于万荣, 刘澎, 等. 气象与环境监测管理可视化设计与实现[J]. *兵工自动化*, 2025, 44(4): 32–36, 52.
TIAN Conghai, YU Wanrong, LIU Peng, et al. Design and implementation of visualization of meteorological and environmental monitoring management[J]. *Ordnance industry automation*, 2025, 44(4): 32–36, 52.
- [26] TU Jing, RAO Hong, XU Jianfeng, et al. The visual analysis of three-way decision based on decision-theoretic rough set: a perspective of fusing two-way decision pair[C]// *Rough Sets*. Cham: Springer, 2024: 3–13.
- [27] 徐健锋, 苗夺谦, 张远健. 分段延迟代价敏感三支决策[J]. *软件学报*, 2022, 33(10): 3754–3775.
XU Jianfeng, MIAO Duoqian, ZHANG Yuanjian. Piecewise delay cost-sensitive three-way decisions[J]. *Journal*

of software, 2022, 33(10): 3754–3775.

- [28] YAO Yiyu, HU Qinghua, YU Hong, et al. Rough sets, fuzzy sets, data mining, and granular computing[C]//Proceedings of the 15th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing. Loden: Springer Science & Business Media, 2005.
- [29] 张贤勇, 杨霖琳, 唐孝. 三支决策与三支关注的双量化集成[J]. 模式识别与人工智能, 2017, 30(5): 394–402.
ZHANG Xianyong, YANG Jilin, TANG Xiao. Double-quantitative integration of three-way decisions and three-way attentions[J]. Pattern recognition and artificial intelligence, 2017, 30(5): 394–402.
- [30] ARSLAN M, AZAM M, AII M, et al. A comparative study of machine learning methods for optimizing mushroom classification[J]. Journal of computing & biomedical informatics, 2024, 8(1): 726-08012024.

作者简介:



徐健锋, 教授, 南昌大学智慧医疗研究院常务副院长, 江西省虚拟现实重点实验室副主任, 中国人工智能学会粒计算与知识发现专委会委员, 江西省 03 专项专家组特聘专家, 江西省首届教育数字化专家委员会首席专家, 中国知网高被引学者。主要研究方向为人工智能、智慧医疗、粒计算和流计算。近 5 年主持

国家自然科学基金项目 2 项、国家重大专项子课题任务 1 项、省厅级纵向课题 7 项、企业横向课题 50 余项。获江西省科技进步二等奖, 获省级教学成果二等奖 1 项, 校级教学成果奖 6 项, 省级精品课程 1 项。获发明专利授权 16 项。发表学术论文 90 余篇。E-mail: jianfeng_x@ncu.edu.cn。



王书谊, 硕士研究生, 主要研究方向为粒计算和不确定性人工智能。E-mail: w592969166@126.com。



姚一豫, 加拿大里贾纳大学计算机科学系教授、博士生导师。主要研究方向为决策粗糙集、粒计算。提出三支决策理论、粒计算三元论, 提出决策粗糙集理论, 网络智能研究领域发起者之一。《International Journal of Approximate Reasoning》区域编辑, 《Information Sciences》和《Knowledge-based Systems》副主编, 8 个国际刊物的编委会成员, 国际粗糙集协会副主席。2008 年获 PAKDD 最具影响力论文奖 (1999-2008), 2010 年获中国人工智能学会粗糙集与软计算专业委员会华侨友谊奖, 2014 年获里贾纳大学校友会杰出科研奖, 2015 年全球高被引科学家。从 1992 年至今, 连续获得加拿大自然科学基金项目资助。发表学术论文 300 多篇; 与其他学者合作出版专著 10 多部。E-mail: Yiyu.Yao@uregina.ca。

[责任编辑: 刘冰洁]