智能系统学报
CAAI TRANSACTIONS ON INTELLIGENT SYSTEMS

融合低秩预分离与随机抖动机制的非凸型TRPCA算法

潘昱妍, 张德, 李壮举

引用本文:
潘昱妍, 张德, 李壮举. 融合低秩预分离与随机抖动机制的非凸型TRPCA算法[J]. 智能系统学报, 2025, 20(4): 822-837.
PAN Yuyan, ZHANG De, LI Zhuangju. Nonconvex TRPCA algorithm combined with low-rank pre-separation and random jitter mechanism[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2025, 20(4): 822-837.

在线阅读 View online: https://dx.doi.org/10.11992/tis.202406003

您可能感兴趣的其他文章

自步稀疏最优均值主成分分析
Sparse optimal mean principal component analysis based on self-paced learning
智能系统学报. 2021, 16(3): 416-424 https://dx.doi.org/10.11992/tis.201911028

利用残差密集网络的运动模糊复原方法
Image restoration with residual dense network
智能系统学报. 2021, 16(3): 442-448 https://dx.doi.org/10.11992/tis.201912002

结合模糊特征检测的鲁棒核相关滤波跟踪法
Robust KCF tracking algorithm combined with fuzzy feature detection
智能系统学报. 2021, 16(2): 323-329 https://dx.doi.org/10.11992/tis.201912010

基于孪生变分自编码器的小样本图像分类方法
A small-sample image classification method based on a Siamese variational auto-encoder
智能系统学报. 2021, 16(2): 254-262 https://dx.doi.org/10.11992/tis.201906022

基于注意力机制的显著性目标检测方法
Salient object detection method based on the attention mechanism
智能系统学报. 2020, 15(5): 956-963 https://dx.doi.org/10.11992/tis.201903001

基于图像聚类的交通标志CNN快速识别算法
CNN-based image clustering algorithm for fast recognition of traffic signs
智能系统学报. 2019, 14(4): 670-678 https://dx.doi.org/10.11992/tis.201806026

DOI: 10.11992/tis.202406003
网络出版地址: https://link.cnki.net/urlid/23.1538.tp.20250224.1551.006

融合低秩预分离与随机抖动机制的非凸型 TRPCA 算法

潘昱妍, 张德, 李壮举
(北京建筑大学 电气与信息工程学院, 北京 100044)

摘　要: 为了解决张量鲁棒主成分分析 (tensor robust principal component analysis, TRPCA) 还原低秩结构时同等收缩奇异值造成的信息提取偏差问题, 本文考虑区别对待奇异值, 使用非凸加权张量 Schatten-p 范数 ($0<p<1$) 分析张量数据, 可减少对奇异值的惩罚。为解决数据受损严重难以恢复的问题, 提出低秩预分离的方法实现近似低秩部分和近似稀疏部分的预先分离; 为增强高阶张量之间相关性同时降低数据对特定噪声的敏感性, 提出随机抖动正则器的机制对预分离后成分分别选取随机区域优化, 利用噪声信息的随机性来正则化算法得以约束模型的复杂度; 最后使用不同类型的图像数据集, 包括彩色图像、核磁共振图像、高光谱及多光谱图像和灰度视频, 进行高维数据恢复实验。结果表明该方法在图像恢复性能上明显优于其他 TRPCA 方法, 并且在数据受损严重时同样具有优势, 有效提取主成分信息的同时减小数据对特定噪声的依赖, 具有较强的鲁棒性和适应性, 可为 TRPCA 方法在图像恢复领域中提供参考。

关键词: 主成分分析; 张量; 图像去噪; 图像处理; 机器学习; 计算机应用; 信号处理; 奇异值分解
中图分类号: TP391　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1673−4785(2025)04−0822−16

中文引用格式: 潘昱妍, 张德, 李壮举. 融合低秩预分离与随机抖动机制的非凸型 TRPCA 算法 [J]. 智能系统学报, 2025, 20(4): 822–837.
英文引用格式: PAN Yuyan, ZHANG De, LI Zhuangju. Nonconvex TRPCA algorithm combined with low-rank pre-separation and random jitter mechanism[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2025, 20(4): 822–837.

Nonconvex TRPCA algorithm combined with low-rank pre-separation and random jitter mechanism

PAN Yuyan, ZHANG De, LI Zhuangju
(School of Electrical and Information Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China)

Abstract: To address the issue of information extraction bias caused by uniform shrinkage of singular values in tensor robust principal component analysis (TRPCA) during low-rank structure recovery, this study considered treating singular values differently, using a nonconvex weighted tensor Schatten-p norm ($0<p<1$) to analyze tensor data, which reduced the penalty for singular values. In order to solve the problem of severe data damage that is difficult to recover, a low-rank pre-separation method was used to realize the pre-separation of the approximate low-rank component and the approximate sparse component. To enhance the correlation among high-order tensors while reducing the sensitivity of data to specific noise, the random jitter regularizer mechanism was proposed to optimize the selected random regions for the pre-separated components respectively, which constrained the complexity of the model by using the randomness of the noise information to regularize the algorithm. Finally, experiments were conducted on high-dimensional data recovery using different types of image datasets, including color images, MRI images, hyperspectral and multispectral images, and grayscale images. The results show that the proposed method significantly outperforms other TRPCA approaches in image recovery performance and maintains advantages even under severe data corruption. It effectively extracts principal component information while reducing dependence on specific noise patterns, demonstrating strong robustness and adaptability. This method can serve as a valuable reference for TRPCA-based image recovery applications.

Keywords: principal component analysis; tensor; image denoising; image processing; machine learning; computer application; signal processing; singular value decomposition

在计算机视觉和机器学习领域中, 主成分分析 (principal component analysis, PCA) 一直是备受关注的方法, 旨在分析高维数据的低维表示[1]。PCA 是一种非参数分析, 能够恢复被稀疏噪声轻微损坏的数据。在采集和传输视觉数据时, 不可避免地会引入异常值或大量噪声, 而 PCA 对这些异常值或噪声非常敏感而不够稳定。为解决

收稿日期: 2024−06−03.　**网络出版日期**: 2025−02−24.
基金项目: 国家自然科学基金项目(62271035); 北京市自然科学基金项目(4232021).
通信作者: 张德. E-mail: zhangde2000@163.com.

©《智能系统学报》编辑部版权所有

PCA 的低稳定性问题, 提出了鲁棒主成分分析 (robust principal component analysis, RPCA)[2], 旨在从被稀疏噪声破坏的观测矩阵中恢复低秩矩阵。其中矩阵的秩是唯一的, 由非零奇异值的个数决定。由于矩阵的秩函数是非凸函数难以凸优化求解, 所以 RPCA 采用核范数作为矩阵中秩函数的凸代替。假设观测矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2}$ 可以分解得为低秩矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和稀疏 (噪声) 矩阵 $\boldsymbol{E}$, 则可通过奇异值阈值 (singular value thresholding, SVT)[3] 方法进行有效求解。如今, RPCA 和其拓展模型已经应用到很多领域, 如图像恢复[4] 及对齐[5-6]、前景检测[7]、子空间聚类[8-9] 和人脸识别[10] 等。然而 RPCA 只能处理二维数据, 但在实际应用中, 高维数据的应用场景更为广泛且迅速增加。张量是矩阵的拓展, 更适合表示高维数据。例如, 彩色图像是大小为高×宽×通道数的三维张量, 而灰度图视频是具有列、行和时间模式的三阶张量。为了处理这些张量数据, 可以对张量的每个正面切片分别应用 RPCA 方法, 但这种方式会忽略张量背后的多维结构信息, 因此研究人员考虑将 RPCA 扩展到张量域中称为张量鲁棒主成分分析 (tensor robust principal component analysis, TRPCA)。

假设给定一个观测张量数据 $\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 同理, TRPCA 旨在从张量 $\mathcal{X}$ 中精确地恢复 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{E}$。这里, 与矩阵秩是唯一的性质不同, 张量秩的定义有很多种, 导致张量分解的方法不同。Tucker 秩[11] 是由 Tucker 分解所定义的, 表示沿给定张量的每个模态展开的秩向量。Tucker 秩只探讨张量的一个模态和其余模态之间的相关性。事实上, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}^{(i)}$ 都是通过将张量沿一个单模态矩阵化而得到的。因此, 它是不平衡的, 相应的秩不够大, 无法捕捉张量中元素之间的全局相关性[12]。由于直接最小化 Tucker 秩是多项式复杂程度的非确定性问题 (non-deterministic polynomial, NP) 困难的, 所以核范数之和 (sum of nuclear norm, SNN)[13] 被表示为 Tucker秩的凸松弛。Huang 等[14] 基于 SNN 提出了 SNN-TRPCA 模型, 利用了张量子空间沿各模态的低秩性。然而由于实际数据中每个模态的低秩程度通常不同, 因此很难设置正则化参数 λ_i。例如, 一个灰度图视频沿其时间模式的秩比沿其空间模式的秩低得多。此外, 单模态展开会破坏张量固有的结构信息。

因此近年来, 张量平均秩[15] 受到了更多的关注, 其定义为张量奇异值分解 (tensor singular value decomposition, t-SVD)[16], 其中块循环矩阵化以循环的方式排列张量的切片。研究表明, 与 Tucker 秩相比, 张量平均秩能保留更多的切片结构信息。由于张量平均秩的最小化同样是 NP 困难的, 因此张量核范数 (tensor nuclear norm, TNN) 被推导为张量平均秩的凸代替。目前基于 t-SVD, 研究人员提出了不同的 TNN 定义[15,17-18]。特别是 Lu 等[15] 推导出了一个新的张量核范数, 并给出了严格的理论保证: 张量核范数是张量谱范数单位球内张量平均秩的凸包络, 该模型可以通过乘法器交替方向进行求解[19], 其中张量奇异值阈值法 (tensor singular value thresholding, t-SVT) 是求解的关键步骤。为了实现凸性, t-SVT 根据阈值相等地缩小每个奇异值, 忽略了关于奇异值的先验条件[5]。此外, TNN-TRPCA 有一个潜在的局限性, 只是简单地假设整个底层张量是低秩的, 对于视觉数据 (如自然图像和视频) 这样的假设通常难以满足。因此, TNN-TRPCA 不能很好地恢复视觉数据中的细节信息, 特别是在结构复杂的数据中。

受到重加权 l_1 最小化方法[20] 的启发, 研究人员借助非凸正则化器更精确地评估矩阵的奇异值[21-24]。并且, 越来越多的理论和应用证明了非凸优化方法的优越性[25-27]。Gao 等[28] 将加权张量 Schatten-p 范数最小化 (weighted tensor Schatten-p norm minimization, WTSNM) 和 t-SVD 结合起来求解他们提出的模型 (enhanced tensor robust principal component analysis, ETRPCA), 并开发了一种高效的算法。然而, 张量 tubal 秩在表征高阶张量之间的相关性方面并不是很有效[29]。

针对上述问题, 本文基于 Gao 等[28] 的方法进行改进, 提出一种增强型 TRPCA 模型。首先引入加权非凸型张量 Schatten-p 范数对张量奇异值进行不同等级的收缩, 可自适应阈值来收缩不同的张量奇异值, 利用张量的全局低秩性更好地保留张量数据的重要信息。针对张量数据受损严重的问题, 为了减少噪声干扰并简化数据结构, 本文提出了一种可低秩预分离的方法, 可在大量噪声干扰下提前将数据分离成近似的低秩结构和近似的稀疏结构, 以便后续算法可分别逐次提高噪声分离效果。这样, 可解决张量数据受损严重的问题, 提高被噪声破坏的观测数据的恢复精确度。同时本文还提出了随机抖动机制, 解决了高阶张量之间相关性弱的问题。该机制利用噪声信息的随机性削弱周期性噪声的影响, 实现算法的正则化, 并约束了模型复杂度。为求解所提模型, 本文基于交替方向乘子法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) 进行优化, 将多优化变量问题转化为双闭式解问题简化处理。最后, 进行了

一系列的实验验证，将所提模型应用到高维数据恢复任务中，包括彩色图像恢复、核磁共振图像恢复、高光谱图像 (hyperspectral images, HIS) 及多光谱图像 (multispectral image, MSI) 恢复、灰度视频恢复等多个应用领域。在公开使用的标准数据集上对本文所提出的算法进行了评估和比较。实验结果表明，本文所提出的算法明显优于其他先进的 TRPCA 算法，并且随着受损数据包含噪声程度的不断增加，本文算法的恢复效果更好。

1　基础知识和符号

1.1　符号说明

本文引入关于张量的符号及相关定义，采用大写粗体花式字母表示张量，如$\mathcal{A}$；采用大写粗体字母表示矩阵，如$\boldsymbol{A}$；采用小写粗体字母表示向量，如$\boldsymbol{a}$；采用小写字母表示标量，如a。对于一个三维张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，$a_{ijk}$表示$\mathcal{A}$中的每一个元素，即$\mathcal{A}$自身。$\mathcal{A}(i,:,:)$$\mathcal{A}(:,j,:)$、$\mathcal{A}(:,:,k)$分别表示第$i$个水平切片、第$j$个侧面切片和第$k$个正面切片。通常，用$\boldsymbol{A}^{(i)}$表示$\mathcal{A}$的第$i$个正面切片，$\mathcal{A}(i,j,:)$表示$\mathcal{A}$的 tube。$\overline{\mathcal{A}}$表示$\mathcal{A}$沿着第三维度的快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT)，如$\overline{\mathcal{A}}=\text{fft}(\mathcal{A},[\,],3)$。同样地经过快速反傅里叶变换 (fast inverse Fourier transform, IFFT) 有，$\mathcal{A}=\text{ifft}(\overline{\mathcal{A}},[\,],3)$。

定义 1　（F 范数[16]）对于三维张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，$\mathcal{A}$的 Frobenius 范数为$\|\mathcal{A}\|_F=\sqrt{\Sigma_{ijk}|a_{ijk}|^2}$。

定义 2　（对角矩阵[16]）对于三维张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，存在对角矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$，其对角线上的每个块是$\overline{\mathcal{A}}$的正面切片$\overline{\boldsymbol{A}}^{(i)}$，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\text{bdiag}(\overline{\mathcal{A}})=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{A}}^{(1)} & & & \\ & \overline{\boldsymbol{A}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\boldsymbol{A}}^{(n_3)}\end{bmatrix}$$

定义 3　（块循环矩阵[16]）对于三维张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，其块循环矩阵是一种张量矩阵化方式，大小为$n_1n_3\times n_2n_3$，形式为

$$\text{bcirc}(\mathcal{A})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{(1)} & \boldsymbol{A}^{(n_3)} & \cdots & \boldsymbol{A}^{(2)}\\ \boldsymbol{A}^{(2)} & \boldsymbol{A}^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{A}^{(3)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}^{(n_3)} & \boldsymbol{A}^{(n_3-1)} & \cdots & \boldsymbol{A}^{(1)}\end{bmatrix}$$

定理 1[17]　块循环矩阵可通过下式块对角化：

$$(\boldsymbol{F}_{n_3}\otimes\boldsymbol{I}_{n_1})\cdot\text{bcirc}(\mathcal{A})\cdot(\boldsymbol{F}_{n_3}^{-1}\otimes\boldsymbol{I}_{n_2})=\overline{\boldsymbol{A}}$$

式中：⊗为克罗内克积，$\boldsymbol{F}_{n_3}$为大小是$n_3\times n_3$的离散傅里叶变换 (discrete fourier transform, DFT) 矩阵，$\boldsymbol{I}_{n_1}$和$\boldsymbol{I}_{n_2}$分别为大小是$n_1\times n_1$和$n_2\times n_2$的单位矩阵。

定义 4　（折叠和展开操作[16]）对于张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，有

$$\text{unfold}(\mathcal{A})=[\boldsymbol{A}^{(1)};\boldsymbol{A}^{(2)};\cdots;\boldsymbol{A}^{(n_3)}]$$
$$\text{fold}(\text{unfold}(\mathcal{A}))=\mathcal{A}$$

1.2　张量积和张量奇异值分解

定义 5　（张量积 (t-product)[16]）令$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，$\mathcal{B}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，则张量积$\mathcal{A}*\mathcal{B}$的运算结果为$\mathcal{C}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$。

$$\mathcal{C}=\mathcal{A}*\mathcal{B}=\text{fold}(\text{bcirc}(\mathcal{A})\cdot\text{unfold}(\mathcal{B}))$$

$n_1\times n_2\times n_3$的三维张量可以看作是$n_1\times n_2$的二维矩阵，矩阵中的每一个元素沿着第三维度方向，称为 tube。由此可见，张量积是矩阵积运算的拓展，使用循环卷积替代元素间的乘法运算。当$n_3=1$时，张量积退化为标准矩阵乘法。因此，使得矩阵 RPCA 模型成为 TRPCA 模型的一个特例。

$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的张量积可以通过以下步骤有效地计算：

1）计算$\overline{\mathcal{A}}=\text{fft}(\mathcal{A},[\,],3)$，$\overline{\mathcal{B}}=\text{fft}(\mathcal{B},[\,],3)$。

2）将$\overline{\mathcal{A}}$与$\overline{\mathcal{B}}$的每一个正面切片相乘得到$\overline{\mathcal{C}}$。

3）计算$\overline{\mathcal{C}}=\text{fft}(\mathcal{C},[\,],3)$。

定义 6　（共轭转置[16]）对于三维张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，首先将$\mathcal{A}$的每个正面切片进行共轭转置，再将转置运算后序号从 2 到n_3的正面切片按逆序排列（第一个正面切片的位置固定不变）。即得到$\mathcal{A}$的共轭转置为$\mathcal{A}^{\text{T}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_1\times n_3}$。

定义 7　（单位张量[16]）$\mathcal{I}\in\mathbb{R}^{n\times n\times n_3}$为单位张量，它的第一个正面切片为大小为$n\times n$的单位矩阵，其余正面切片均为零矩阵。

定义 8　（正交张量[16]）若$\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$满足$\mathcal{Q}^{\text{T}}*\mathcal{Q}=\mathcal{Q}*\mathcal{Q}^{\text{T}}=\mathcal{I}$，则$\mathcal{Q}$是正交的。

定义 9　（f-对角张量[16]）如果三维张量的每一个正面切片都是对角矩阵，则称为f-对角张量。

定理 2　（张量奇异值分解 (t-SVD)[16]）令$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，$\mathcal{A}$可以被分解为

$$\mathcal{A}=\mathcal{U}*\mathcal{S}*\mathcal{V}^{\text{T}}$$

式中：$\mathcal{U}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1\times n_3}$，$\mathcal{V}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2\times n_3}$，二者为正交张量；$\mathcal{S}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$为$f$-对角张量。

图 1 直观地给出了 t-SVD 分解。在数学计算软件中可调用内置函数，使用傅里叶变换快速计算 t-SVD。实现 t-SVD 的步骤如下：

1）对$\mathcal{A}$沿第三维度进行傅里叶变换，得到$\overline{\mathcal{A}}$。

2）对$\overline{\mathcal{A}}$的每个正面切片进行矩阵奇异值分解 (SVD)，得到分解后对应的 3 个张量$\overline{\mathcal{U}}^{(i)}$、$\overline{\mathcal{S}}^{(i)}$、$\overline{\mathcal{V}}^{(i)}$。

3) 对 3 个张量进行反傅里叶变换, 得到 t-SVD 的最终结果, 即$\mathcal{U}$、$\mathcal{S}$、$\mathcal{V}$。

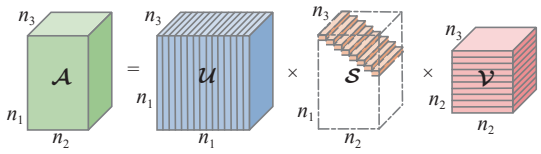


图 1　$n_1\times n_2\times n_3$张量的 t-SVD 示意

Fig. 1　Illustration of the t-SVD of an $n_1\times n_2\times n_3$ tensor

需要注意, 矩阵 SVD 分解是在复数域上进行的, 最后的反傅里叶变换后得到的必须是实数。

定义 10　(张量 tubal 秩 (Tensor tubal rank)[15]) 对于三维张量$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 其张量 tubal 秩记 $\text{rank}_t(\mathcal{A})$, 定义为$\mathcal{S}$的非零奇异管道数量, 可写为

$$\text{rank}_t(\mathcal{A})=\#\{i,\mathcal{S}(i,i,:)\}$$

式中$\mathcal{S}$来自 t-SVD 中$\mathcal{A}=\mathcal{U}*\mathcal{S}*\mathcal{V}^{\mathrm{T}}$。张量 tubal 秩是非凸的。

定义 11　(张量核范数[15]) 给定$\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$, $l=\min(n_1,n_2)$, 其核范数为

$$\|\mathcal{X}\|_{\circledast}=\sum_{i=1}^{n_3}\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}\|_*=\sum_{i=1}^{n_3}\sum_{j=1}^{l}\sigma_j(\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})$$

张量核范数为$\mathcal{S}$的第一个正面切片的对角线上奇异值之和, 该类凸模型的最大优点是可以计算最优解, 但是张量核范数只是张量秩的一种凸优化逼近, 在多数情况下会导致这种近似可能太松弛。因此, 本文考虑引入一种非凸函数来更好地逼近张量秩, 以获得更好的局部解。

2　增强型张量鲁棒主成分分析模型

2.1　模型的建立与目标

TRPCA 是一种典型的张量低秩表示方法。它可从被损坏的张量数据$\mathcal{X}$中精确地恢复低秩张量数据$\mathcal{L}$, 通过下述张量核范数模型[15]:

$$\min_{\mathcal{E},\mathcal{L}}\ \lambda\|\mathcal{E}\|_1+\|\mathcal{L}\|_{\circledast}\ \text{s.t.}\mathcal{X}=\mathcal{L}+\mathcal{E}\tag{1}$$

式中: $\mathcal{X}$为张量噪声数据; λ为平衡项的正则化参数; $\mathcal{L}$为低秩恢复张量, 其低秩性由l_*范数描述; $\mathcal{E}$为稀疏恢复张量, 其稀疏性由l_1范数描述。

根据定义 11, 在处理张量核范数最小化问题中, 所得模型 (1) 对输入的张量数据所有奇异值平等处理[30-31], 当数据中存在一些异常值或离群值时, 会导致这些异常值对结果产生过大影响, 降低算法的鲁棒性, 使得模型对数据中的异常值或噪声更为敏感。对所有奇异值进行同等收缩可能导致重要信息丢失, 不同的奇异值代表了数据中不同的重要特征, 同等收缩会使得这些特征之间的差异变得不那么明显, 从而难以区分和识别数据中的重要特征。

在实际应用中, 较大的奇异值通常与图像的颜色信息等一些突出信息相关联, 较小的奇异值通常含有过高的噪声信号或者异常值。而 TRPCA 在最小化张量核范数时并没有充分利用奇异值的先验信息。因此, 它不能很好地保留一些突出的信息, 如颜色信息。为解决这一问题, 张量奇异值部分和 (tensor partial sum of singular values, TPSSV) 被提出, 其目标函数为

$$\min_{\mathcal{E},\mathcal{L}}\ \lambda\|\mathcal{E}\|_1+\|\mathcal{L}\|_{p=r}\ \text{s.t.}\mathcal{X}=\mathcal{L}+\mathcal{E}\tag{2}$$

式中$\|\mathcal{L}\|_{p=r}=\sum_{i=1}^{n_3}\|\overline{\mathcal{L}}^{(i)}\|_{p=r}$。由式 (2) 可知, 在解决张量核范数最小化问题时, 它不会收缩前 r 个最大的奇异值, 这表明与前 r 个最大奇异值相关的信息与图像内容无关。然而由于这种假设条件极其严格, 在实际当中并不可行。

受上述启发, 为了保留主要信息同时减小冗余噪声干扰, 应该使较大的奇异值收缩减小, 同时使较小的奇异值收缩增大。因此, 引入加权张量 Schatten-p 范数。

定义 12　(加权张量 Schatten-p 范数) 对于给定的$\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$, $h=\min(n_1,n_2)$, $\mathcal{X}$的加权张量 Schatten-p 范数为

$$\|\mathcal{X}\|_{\omega,S_p}=\left(\sum_{i=1}^{n_3}\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}\|_{\omega,S_p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n_3}\sum_{j=1}^{h}\omega_j*\sigma_j(\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

由此, 本文提出一种新的 TRPCA 模型, 其目标函数为

$$\min_{\mathcal{E},\mathcal{L}}\ \lambda\|\mathcal{E}\|_1+\|\mathcal{L}\|_{\omega,S_p}^{p}\ \text{s.t.}\mathcal{X}=\mathcal{L}+\mathcal{E}\tag{3}$$

式中: $\mathcal{X}$为张量噪声数据; λ为平衡项正则化参数; $\mathcal{L}$为低秩恢复张量, 其低秩性由$l_{\text{Schatten}-p}$范数描述; $\mathcal{E}$为稀疏恢复张量, 其稀疏性由l_1范数描述。

2.2　算法优化

本节将介绍基于噪声预分离与随机抖动正则器的加权张量非凸型 Schatten-p 范数的 TRPCA 模型算法, 该方法可应用于高维数据恢复。这些正则项之和最小化问题的目标是找到一个最理想的损失函数满足惩罚函数与目标函数之间求解出最优闭式解的问题。通常, 给定一个受损张量数据$\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 惩罚函数$\Gamma$, 目标函数$\Gamma_0$, 找到最小目标函数:

$$\mathcal{X}^* = \arg\min_{\mathcal{L},\mathcal{E}} \| \mathcal{L} \|_{\omega,Sp}^p + \lambda \| \mathcal{E} \|_1 + C\ell(\Gamma,\Gamma_0) \quad \text{s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E} \tag{4}$$

式中：损失函数ℓ比较了惩罚函数Γ和目标函数Γ_0，常数C权衡损失函数和正则化项。

最小目标函数的求解取决于损失函数和正则化项的选择，具体过程描述如下。

2.2.1 加权张量非凸型 Schatten-p 范数最小化问题

前面提到本文使用加权张量非凸型 Schatten-p 范数的 TRPCA 模型 (3)，目标函数是需要获取$\mathcal{L}$的 tubal 秩最小化和$\mathcal{E}$的l_1范数最小化。假设它们满足稀疏先验性，但不一定具有低秩先验性。

在 TRPCA 最小化问题当中，主要研究的问题是如何从一个被稀疏噪声损坏的张量数据中恢复分别得到低秩部分$\mathcal{L}$和稀疏部分$\mathcal{E}$。而需要重点关注低秩$\mathcal{L}$的恢复，其包含原始数据的主要信息，可近似看成对损坏数据的精确恢复数据。下面将介绍本文所提出方法的基本框架，并在下述部分展开描述详细的实现方法。

通过使用定理 2 中的 t-SVD 方法，本文给出 ADMM 的细节来求解式 (3)。受增广拉格朗日函数的启发，可通过最小化下式来求解式 (3)：

$$\Gamma(\mathcal{L},\mathcal{E},\mathcal{Y},\mu) = \| \mathcal{L} \|_{\omega,Sp}^p + \lambda \| \mathcal{E} \|_1 + \langle \mathcal{Y}, \mathcal{L} + \mathcal{E} - \mathcal{X} \rangle + \frac{\mu}{2} \| \mathcal{L} + \mathcal{E} - \mathcal{X} \|_F^2 \tag{5}$$

式中：$\mathcal{Y}$为增广拉格朗日乘子，μ为避免线性约束的惩罚参数，为正标量。

同时优化所有这些变量是很困难的。因此可以通过最小化一个变量而固定其它变量来近似地解决这个优化问题。这个过程就是所谓的交替方向乘子法 ADMM。在多块 ADMM 框架下，通过交替最小化增广拉格朗日目标函数$\boldsymbol{\Gamma}$来更新$\mathcal{L}$和$\mathcal{E}$，在特定的权重排序下，式 (5) 对各变量的优化问题可以等价地转化为独立的非凸$l_{\text{Schatten}-p}$范数和凸优化l_1范数 2 个子问题，且 2 个子模型均有闭式解。利用 ADMM 得到的 2 个子模型及迭代增广拉格朗日乘子项为

$$\mathcal{L}_{k+1} = \arg\min_{\mathcal{L}} \| \mathcal{L} \|_{\omega,Sp}^p + \frac{\mu_k}{2} \| \mathcal{L} + \mathcal{E}_k - \mathcal{X} + \frac{\mathcal{Y}_k}{\mu_k} \|_F^2 \tag{6}$$

$$\mathcal{E}_{k+1} = \arg\min_{\mathcal{E}} \lambda \| \mathcal{E} \|_1 + \frac{\mu_k}{2} \| \mathcal{L}_{k+1} + \mathcal{E} - \mathcal{X} + \frac{\mathcal{Y}_k}{\mu_k} \|_F^2 \tag{7}$$

$$\mathcal{Y}_{k+1} = \mathcal{Y}_k + \mu_k(\mathcal{L}_{k+1} + \mathcal{L}_{k+1} - \mathcal{X}) \tag{8}$$

对此本文给出了解决以上 2 个子模型的求解细节：

$\mathcal{E}$子模型 固定$\mathcal{L}_{k+1}$，$\mathcal{Y}_k$，μ_k。根据软阈值算法，可将式 (7) 改写为

$$\mathcal{E}_{k+1} = D_{\frac{\lambda}{\mu_k}}\left(\mathcal{X} - \mathcal{L}_{k+1} - \frac{\mathcal{Y}_k}{\mu_k}\right) \tag{9}$$

式中$D_\tau(x)$是软阈值算子[32]，作用是改变稀疏部分$\mathcal{E}$的数值。其定义为

$$D_\tau(x) = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \tau), & |x| > \tau \\ 0, & |x| \leqslant \tau \end{cases}$$

$\mathcal{L}$子模型 同样地，固定$\mathcal{E}_k$，$\mathcal{Y}_k$，μ_k。为求解式 (6)，可使用广义软阈值算法 (generalized soft-thresholding algorithm, GST)[33] 求解其全局最优解。通过以下引理和定理展开讲解。

定理 3[28] 存在$\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$，$r = \min(n_1, n_2)$，$\tau > 0$，$0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_r$，令$\boldsymbol{Y}$的 SVD 为$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}_Y \Sigma_Y \boldsymbol{V}_Y^{\mathrm{T}}$，且$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，假设所有奇异值均为非升序，则下述模型

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}} \frac{1}{2} \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} \|_F^2 + \tau \| \boldsymbol{X} \|_{\omega,Sp}^p \tag{10}$$

根据 Von-Neumann 的迹不等式[34]，可以找到式 (10) 的一个闭型全局最优解为

$$\boldsymbol{X}_{\tau*\omega[Y]} = \boldsymbol{U}_Y \boldsymbol{\Delta}_{\tau*\omega[Y]} \boldsymbol{V}_Y^{\mathrm{T}}$$

且$\Delta_{\tau*\omega[\boldsymbol{Y}]} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_i)$，其中$\delta_i$由下式给出：

$$\begin{cases} \min\limits_{\delta_1,\cdots,\delta_r} \sum\limits_{i=1}^{r} \left[(\delta_i - \sigma_i)^2 + \omega_i \delta_i^p \right], \quad i = 1,2,\cdots,r \\ \text{s.t. } \delta_i \geqslant 0, \quad \delta_i \geqslant \delta_j, i \leqslant j \end{cases} \tag{11}$$

即使将模型 (10) 变换为简化后的式 (11)，由于目标函数的非凸性和非光滑性，加上附加的阶约束 (即$\delta_i \geqslant \delta_j, i \leqslant j$)，求解该问题仍然是困难的。在不失一般性的前提下，由于奇异值$\sigma_i \geqslant 0$，因此可以放弃非负约束$\delta_i \geqslant 0$。很显然，如果式 (11) 中的约束可以被丢弃，那么问题就可以解耦成 r 个独立的子问题，从而降低求解难度，将通过下述引理进行求解。

引理 1 对于下述优化模型：

$$\min_{\delta_i \geqslant 0} f_i(\delta) = (\delta_i - \sigma_i)^2 + \omega_i \delta_i^p, \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{12}$$

对于给定的p和ω_i，存在一个特定的阈值：

$$\tau_p^{\text{GST}}(\omega_i) = (2\omega_i(1-p))^{\frac{1}{2-p}} + \omega_i p(2\omega_i(1-p))^{\frac{p-1}{2-p}}$$

由此可以得出如下结论：

1）当$\sigma \leqslant \tau_p^{\text{GST}}(\omega_i)$时，式 (12) 的最优解$T_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i) = 0$。

2）当$\sigma > \tau_p^{\text{GST}}(\omega_i)$时，式 (12) 的最优解$T_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i) = \text{sign}(\sigma_i) S_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i)$，其中$S_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i)$可由$S_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i) - \sigma + \omega p (S_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i))^{p-1} = 0$求解得到。

由此可求得式 (10) 中δ_i，其中$\delta_i = T_p^{\text{GST}}(\sigma_i, \omega_i)$。

定理 4[28] 假设存在$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$，$r = \min(n_1, n_2)$，$\tau > 0$，$0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_r$，令$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^{\mathrm{T}}$，给出模型：

$$\arg\min_{\mathcal{X}} \frac{1}{2}\|\mathcal{X}-\mathcal{A}\|_F^2+\tau\|\mathcal{X}\|_{\omega,Sp}^p \tag{13}$$

然后, 由定理 3 可得模型 (13) 的全局最优解为

$$\mathcal{X}^*=\mathcal{X}_{\tau*\omega[\mathcal{A}]}=\mathcal{U}_{\mathcal{A}}*\text{ifft}(\mathcal{S}_{\tau*\omega[\overline{\mathcal{A}}]})*\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}$$

式中: $\mathcal{S}_{\tau*\omega[\overline{\mathcal{A}}]}$ 为一个三维张量, $\mathcal{S}_{\tau*\omega[\overline{\mathcal{A}}^{(i)}]}$ 为 $\mathcal{S}_{\tau*\omega[\overline{\mathcal{A}}]}$ 的第 i 个正面切片。

证明　在傅里叶域中, 式 (13) 等效为

$$\arg\min_{\overline{\mathcal{X}}} \frac{1}{2}\|\overline{\mathcal{X}}-\overline{\mathcal{A}}\|_F^2+\sum_{i=1}^{n_3}\tau\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}\|_{\omega,Sp}^p$$

根据定义 1, 可得到

$$\arg\min_{\overline{\mathcal{X}}} \sum_{i=1}^{n_3}\left(\frac{1}{2}\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}-\overline{\boldsymbol{A}}^{(i)}\|_F^2+\tau\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}\|_{\omega,Sp}^p\right) \tag{14}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}$ 为 $\overline{\mathcal{X}}$ 的第 i 个正面切片。

在式 (14) 中, 每一个变量 $\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}$ 都是独立的, 因此可将其拆解为 n_3 个独立的子问题考虑。对于第 i 个 ($i=1,2,\cdots,n_3$) 子问题, 有

$$\arg\min_{\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}} \frac{1}{2}\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}-\overline{\boldsymbol{A}}^{(i)}\|_F^2+\tau\|\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}\|_{\omega,Sp}^p$$

由定理 3 可知, 式 (14) 的全局最优解为

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)*}=\boldsymbol{X}_{\tau*\omega[\overline{\boldsymbol{A}}^{(i)}]}=\overline{\boldsymbol{U}}^{(i)}{}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Delta}_{\tau*\omega[\overline{\boldsymbol{A}}^{(i)}]}\overline{\boldsymbol{V}}^{(i)}{}_{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$$

式中全局最优解 $\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)*}$ 是 $\overline{\mathcal{X}}^*$ 的第 i 个正面切片。由于已经得到了所有子问题的全局最优解, 根据 1.1 小节中介绍过的反傅里叶变换, 可以得到优化模型 (13) 的全局最优解:

$$\mathcal{X}^*=\mathcal{X}_{\tau*\omega[\mathcal{A}]}=\mathcal{U}_{\mathcal{A}}*\text{ifft}(\mathcal{S}_{\tau*\omega[\overline{\mathcal{A}}]})*\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}},$$

式中: $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}=\text{ifft}(\overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}},[\,],3)$, $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}=\text{ifft}(\overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{A}},[\,],3)$。

阐述完引理及定理, 回到求解模型 (6)。根据定理 4 可知, $\boldsymbol{\Lambda}$ 子模型 (6) 的全局最优解为

$$\mathcal{L}_{k+1}=\mathcal{L}_{\mu_k^{-1}*\omega\left[\mathcal{X}-\mathcal{E}-\frac{\mathcal{Y}}{\mu_k}\right]}=\mathcal{U}_{\mathcal{X}-\mathcal{E}-\frac{\mathcal{Y}}{\mu_k}}*\text{ifft}\left(\mathcal{S}_{\mu_k^{-1}*\omega\left[\mathcal{X}-\mathcal{E}-\frac{\mathcal{Y}}{\mu_k}\right]}\right)*\mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{X}-\mathcal{E}-\frac{\mathcal{Y}}{\mu_k}} \tag{15}$$

下面使用算法 1 总结本文提出的加权张量 Schatten-p 范数 TRPCA 模型求解方法的整个优化过程。图 2 直观地给出了所提出模型针对高维数据恢复的流程。

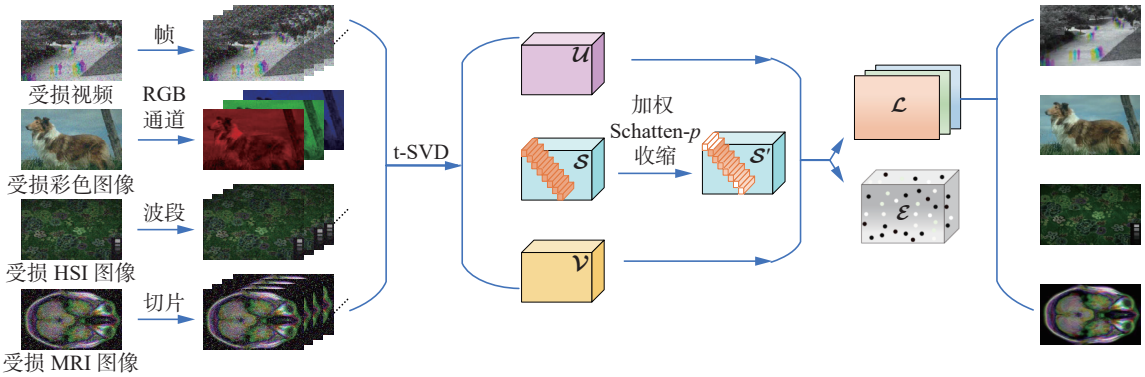


图 2　加权张量 Schatten-p 范数 TRPCA 模型概述

Fig. 2　Overview of the weighted tensor Schatten-p norm TRPCA model

算法 1　基于张量加权非凸型 Schatten-p 范数的 TRPCA 算法

输入　观测张量数据 $\mathcal{X}$, 权重向量 ω, 正则化参数 λ

输出　低秩恢复 $\mathcal{L}$, 稀疏恢复 $\mathcal{E}$

初始化　$\mu_0=1\times10^{-4},\rho=1.1,k=0,\mu_{\max}=1\times10^{10},\varepsilon=1\times10^{-8},\mathcal{L}_0=\mathcal{E}_0=0,\mathcal{Y}_0=0$

通过 ADMM 求解模型 (3):

while 不收敛 do

1)根据模型 (9) 更新 $\mathcal{E}_{k+1}$

2)根据模型 (15) 更新 $\mathcal{L}_{k+1}$

3)根据模型 (8) 更新 $\mathcal{Y}_{k+1}$

4)通过 $\mu_{k+1}=\min(\rho\mu_k,\mu_{\max})$ 更新 μ_{k+1}

5)判断收敛性

$\|\mathcal{E}_{k+1}-\mathcal{E}_k\|_F\leqslant\varepsilon$,$\|\mathcal{L}_{k+1}-\mathcal{L}_k\|_F\leqslant\varepsilon$,$\|\mathcal{L}_{k+1}+\mathcal{E}_{k+1}-\mathcal{X}\|_F\leqslant\varepsilon$

end while

2.2.2　低秩预分离

在上文中已知 TRPCA 是对受损数据去除噪声或异常值, 通过降维方法张量奇异值分解 t-SVD 从中提取主要信息使得受损数据得以恢复。而恢复后的数据包括低秩分量 $\mathcal{L}$ 和稀疏分量 $\mathcal{E}$ 共 2 部分。所以本文考虑高维数据可能受到较大程度损坏的情况, 对其进行预处理, 使得其在进行 TRPCA 方法之前已经提前获得近似含有低秩信息和稀疏噪声信息的两分支, 将噪声预分离后的 2 部分分别作为受损数据输入, 再次使用 TRPCA 降维处理。预处理阶段通过识别和分离出数据中的噪声成分, 从而使数据更加干净, 减少噪声对数据分析结果的影响, 有利于后续的分析和建模过程, 在此基础上再进行降维处理相较之前更具有明确性和鲁棒性。

基于低秩预分离的方法可以预先处理一个含有大量噪声的受损数据对低秩恢复数据及异常数

据的提前分离能力，其基本流程如下所述。

1）平滑化处理。为了减少噪声干扰并简化数据结构，本文考虑首先利用滤波算法[35-36]（如中值滤波、高斯滤波和小波变换滤波等，针对不同类型的噪声数据可分别选择其相对适宜的滤波算法）对受损张量数据$\mathcal{X}$进行分解。可将首次滤波后结果视为低秩恢复数据，即得到噪声预分离后的近似低秩部分$\mathcal{L}'$，实现初步筛选低秩结构。

2）作差处理。通过将受损张量数据$\mathcal{X}$与近似低秩部分$\mathcal{L}'$做差法计算，可自动筛选出近似异常数据，即得到噪声预分离后的近似稀疏部分$\mathcal{E}'$，其中$\mathcal{E}'=\mathcal{X}-\mathcal{L}'$。

通过上述预分离的思想可初步筛选出受损严重的张量数据$\mathcal{X}$中的近似低秩部分$\mathcal{L}'$和近似稀疏部分$\mathcal{E}'$，实现低秩结构的预分离。该方法的具体过程如图 3 所示。

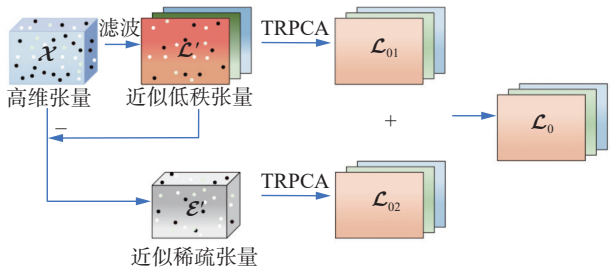


图 3　低秩预分离流程

Fig. 3　Flowchart of low-rank pre-separation

2.2.3　随机抖动机制

考虑到高维数据中第 3 维度相邻切片一致性较弱，提出随机抖动机制来增强一致性。如在连续视频帧中，使每一帧均加入随机的轻微抖动(jitter)，则信号或图像特征（如边缘和纹理）在相邻帧之间的位置差异会相对减小。由此，当对多帧进行平均或采用时域滤波时，随机出现且不随时间连续的噪点（其在不同帧之间不具有一致性）会被削弱，使得图像信息得以保留和加强。

张量数据受到噪声破坏时，通过 TRPCA 模型恢复低秩张量的过程中可能出现过拟合情况，加入随机抖动机制可破坏周期性噪声从而增加数据的随机性减少数据对特定噪声模式的依赖来削弱过拟合情况。jitter 可改变噪声在图像中的分布，使得噪声分布不规律从而破坏噪声的可预测性。正是通过利用受损数据中噪声信息的随机性来正则化算法，以减少过拟合并且提高鲁棒性，有助于约束 TRPCA 模型的复杂度，可简化上文所提出的非凸 TRPCA 后续恢复过程。

受文献 [37-38] 的启发，本文提出的随机抖动正则器具有隐式形式。在将输入图像数据传送到 TRPCA 损失函数ℓ之前，可随机选择区域优化。由此可将式 (4) 改写为

$$\mathcal{X}^{*}=\arg\min_{\mathcal{L},\mathcal{E}}\|\mathcal{L}\|_{\omega,S_p}^{p}+\lambda\|\mathcal{E}\|_1+CE_{\varsigma}[\ell(\Gamma(\text{jitter}(\mathcal{X};\varsigma)),\Gamma_0)]\quad s.t.\ \mathcal{X}=\mathcal{L}+\mathcal{E}$$

式中：ℓ为惩罚函数$\Gamma(\cdot)$和目标函数Γ_0之间的损失计算；$E[\cdot]$为数学期望；$\varsigma=(\varsigma_1,\varsigma_2)$为均匀分布在集合$\{0,\cdots,T-1\}^2$中的离散随机变量，表示最多$T-1$个像素的随机水平或垂直翻转。运算符$\text{jitter}(\cdot)$对张量数据$\mathcal{X}$进行如下转换和分割：

$$[\text{jitter}(\mathcal{X};\varsigma)](v,u)=\mathcal{X}(v+\varsigma_2,u+\varsigma_1)$$

式中：v为索引图像行，u为索引图像列，$1\leqslant v\leqslant n_1-T+1$且$1\leqslant u\leqslant n_2-T+1$。随机抖动正则化机制每次随机索引一个区域进行优化，期间可出现相互重叠情况（每次索引区域可不一致），经多次索引迭代过程后，将输入数据的完整区域全部进行索引，作为末次迭代终止项。随机抖动机制的示意如图 4 所示。

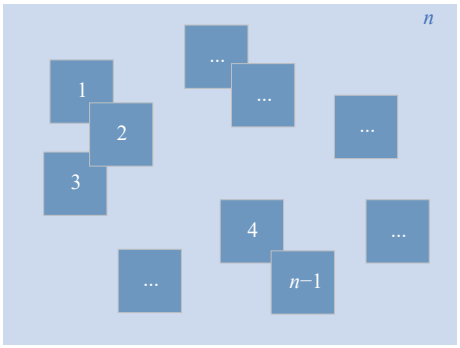


图 4　随机抖动机制示意

Fig. 4　Illustration of the random jitter mechanism

3　实验结果与分析

在实验中将选择一些先进的经典 TRPCA 模型方法作为对比方法，包括基于克罗内克基表示的 KBR 方法[39]、基于 t-SVD 的 TNN 方法[15]、基于凹凸分离型 t-SVD 的 CCSVS 方法[40] 与本文所提方法进行比较。分别在彩色图像恢复、核磁共振图像恢复、高光谱及多光谱图像恢复、灰度视频恢复 4 种应用中展开实验。实验将从定量和定性两方面分析实验结果，采用原始数据、受损数据和恢复数据肉眼定性评估。采用峰值信噪比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) E_{PSNR}（以 dB 为单位）、结构相似度 (structural similarity, SSIM) E_{SSIM}、特征相似度 (feature similarity, FSIM) E_{FSIM}、CPU 运行时间（以秒为单位）定量质量指标来评价方法的性能。前 3 个评估指标定义如下：

$$E_{\mathrm{PSNR}}=10\log_{10}\frac{N(\max_{\mathcal{L}})^2}{\|\mathcal{L}(:,:,i)-\mathcal{L}_0(:,:,i)\|_F^2} \tag{16}$$

$$E_{\mathrm{SSIM}}=\frac{(2\mu_L\mu_{L_0})(2\sigma_{LL_0}+c_2)}{(\mu_L^2+\mu_{L_0}^2+c_1)(\sigma_L^2+\sigma_{L_0}^2+c_2)} \tag{17}$$

$$E_{\mathrm{FSIM}}=\frac{\sum_{x\in\Omega}S_L(x)\cdot PC_m(x)}{\sum_{x\in\Omega}PC_m(x)} \tag{18}$$

式 (16) 中: $\mathcal{L}_0$为观测张量, $\mathcal{L}_0(:,:,i)$为第i帧图像, $\mathcal{L}$为恢复张量, $\max_{\mathcal{L}}$为$\mathcal{L}$的最大像素值。式 (17) 中: μ_L和μ_{L_0}分别为图像L和L_0的均值, σ_{LL_0}为L和L_0的协方差, σ_L和σ_{L_0}分别为L和L_0的标准方差, c_1和c_2均为常数。式 (18) 中$S_L(x)$是相位一致性特征 (phase congruency, PC) 和梯度特征 (gradient magnitude, GM) 的融合的相似度, $PC_m(x)$为衡量$S_L(x)$在 2 张图像中全局相似性的重要程度, Ω为整个图像空间域。对于 PSNR 值越高越好, SSIM 值和 FSIM 值越接近 1 越佳。

3.1　彩色图像恢复

在本实验中, 将验证并评估本文方法及其它对比方法对损坏的彩色图像的恢复效果。选择 Berkeley Segmentation 数据集作为图库, 随机选择 50 张彩色图像进行测试。每张图像的大小为 481×321×3 像素。对于每张图像, 人为添加随机噪声, 分别设置随机噪声, 使 10%、20%、30% 的像素被设置为 [0, 255] 中的随机值, 并且损坏像素的位置未知。每个彩色图像包括 3 个颜色通道, 即红、绿、蓝, 可以看作是一个三阶张量。所有 3 个通道的图像都在相同的像素位置进行损坏。对于其他的对比方法, 设置的参数与其参考原文相同。由于本文方法是在 Gao 等[28] 的方法上进行改进, 初始化设置正则化参数$\lambda=1/\sqrt{3\max(n_1,n_2)}$, $\mu_0=1\times10^{-4}$, $\rho=1.1$, $k=0$, $\mu_{\max}=1\times10^{10}$, $\varepsilon=1\times10^{-8}$, 均来自原文献。对于在不同噪声等级下可调参数 p 的选取, 同样参考原文献, 并在后续 3.2 小节中进行了参数敏感度的具体分析。通过仿真分析证明 p 值选取的合理性, 并在具体应用任务当中加以微调, 争取达到最优效果。低秩预分离平滑化过程选择中值滤波器, 随机抖动正则器每次迭代选择的区域大小均为 80 像素×80 像素, 迭代次数为 20 次。

表 1 给出了所有对比方法在不同噪声等级下对于 50 张彩色图像的平均恢复结果。从这些结果可以看出, 本文方法的 3 个评估指标均较对比方法有更好的性能, 几乎在所有情况下都达到了最高的 PSNR、SSIM 及 FSIM 值。该方法比较为先进的 TNN 方法在 PSNR 上平均提高 3.37~5.19 dB, 优于仅使用低秩信息的一般方法。KBR 与 CCSVS 方法随噪声等级的增加恢复效果明显变差, 具有较差的鲁棒性, 不如本文方法。但是由于本文方法每次迭代需要更多的计算量, 因此在运行时间指标上表现出一般的性能。此外在数据中显示, 当张量 Schatten-p 范数中的 p=0.9 时, 本文方法在处理较低噪声等级的数据时获得了最好的平均结果; 当 p=0.95 时, 在较高噪声等级的数据恢复中具有更好的性能。由此可得出结论: 随着噪声等级增加, 其他方法降噪效果明显下降, 本文方法仍可通过调节 p 的取值来保持较好恢复效果。

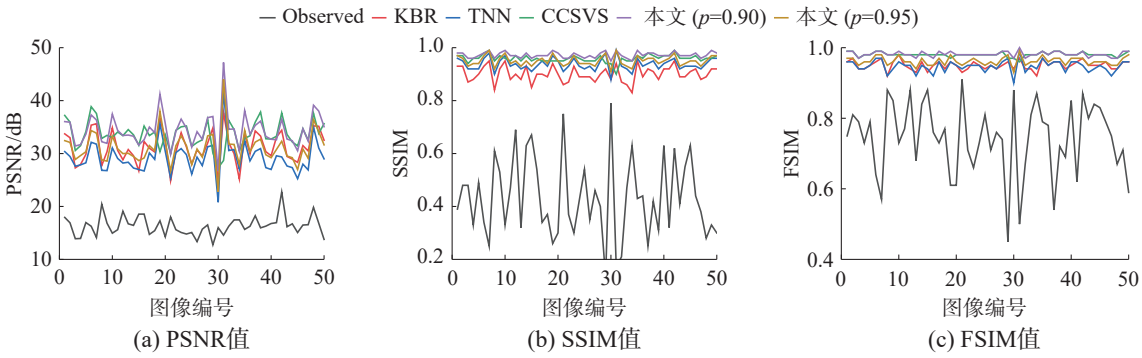
表 1　不同噪声等级下彩色图像恢复的平均质量评估指标比较

Table 1　Comparison of average quality assessment metrics for color image restorations at different noise levels

噪声等级	评估指标	Observed	KBR	TNN	CCSVS	本文方法	
						(p=0.9)	(p=0.95)
10%	PSNR	16.36	31.20	29.26	33.62	**34.45**	31.17
	SSIM	0.43	0.90	0.94	0.95	**0.97**	0.95
	FSIM	0.74	0.95	0.95	0.96	**0.98**	0.96
	CPUtime	—	16.53	**14.35**	15.07	33.16	31.87
20%	PSNR	13.35	25.24	26.31	25.13	24.10	**29.68**
	SSIM	0.31	0.75	0.87	0.74	0.83	**0.92**
	FSIM	0.74	0.89	0.91	0.90	0.87	**0.95**
	CPUtime	—	18.16	**13.83**	18.13	33.39	32.61
30%	PSNR	11.59	16.77	22.04	16.32	20.22	**25.62**
	SSIM	0.24	0.35	0.69	0.32	0.64	**0.82**
	FSIM	0.60	0.68	0.84	0.67	0.72	**0.86**
	CPUtime	0.00	19.25	**13.80**	19.02	31.93	30.54

注: 加黑和下划线代表最优和次优的结果, 下同。

图 5 以 50 张彩色图像为例，分别列出了各种对比方法的 PSNR、SSIM 和 FSIM 值，并定量地证明本文的恢复效果优于所有其他方法。可看出在 10% 噪声等级下，本文方法 p=0.9 时 3 个评估指标均取得最优效果，p=0.95 时在 SSIM 和 FSIM 评估指标中均取得次优效果。



(a) PSNR值　(b) SSIM值　(c) FSIM值

图 5　彩色图像恢复结果的 PSNR 值、SSIM 值及 FSIM 值比较 (10% 噪声等级)

Fig. 5　Comparison of the PSNR, SSIM and FSIM for color image restorations (10% noise level)

图 6 从 50 张彩色图像中任意选取 5 张图像为例，分别为 10% 噪声等级下本文方法与多种对比方法的原始图像、噪声图像及其恢复图像。从这些恢复图像中不难看出，本文方法的性能比其他方法好得多。原因是其他方法仅利用了低秩先验条件下数据的多维结构，而本文方法除了利用低秩先验之外，还利用了局部平滑先验。这比仅仅在矩阵上使用低秩先验要好。使用本文方法得到的恢复图像视觉更清晰，边缘更锐利，从而从视觉上证明了本文方法在测试数据集上取得良好的效果。总之，本文方法显示出强大的恢复能力，在可视化中产生更令人满意的去噪恢复结果，并且在定量上具有更高的 PSNR、SSIM 及 FSIM 指标。

(a) 原始图像　(b) 观测图像　(c) KBR　(d) TNN　(e) CCSVS　(f) (p=0.90) 本文方法　(g) (p=0.95) 本文方法

图 6　10% 噪声等级下的彩色图像恢复结果比较

Fig. 6　Comparison of color image restorations results at 10%noise level

3.2　MRI 图像恢复

为了证明所提出模型针对高维数据恢复的有效性，在本小节中测试了 MRI 数据集，大小为 181×217×40 像素，并对其分别加入 10%、20%、30% 的

随机噪声。本实验中本文方法及其他对比方法的参数配置与上一实验相同, 对于可调参数 p 值的选取最终以实验结果和敏感性分析加以确定。

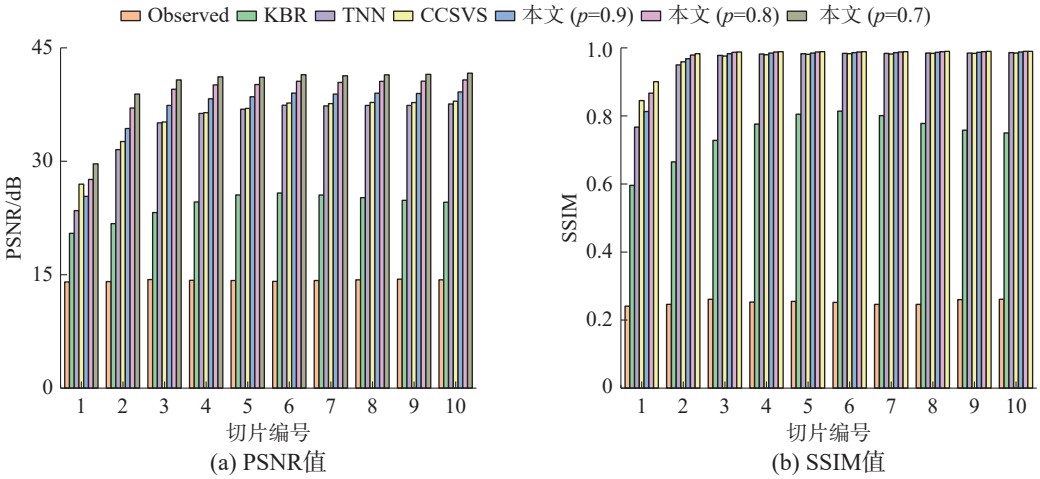
表 2 列出了不同噪声等级下 MRI 数据集各切片的平均 PSNR、SSIM、FSIM 值和运行时间。可以看出本文方法在噪声等级不断增加的情况下仍然保持较好的 PSNR、SSIM、FSIM 值。但由于本文方法需要较大的计算量, 所以在运行时间上没有明显优势, KBR 方法具有最短运行时间。从表 2 中明显可以看到当噪声等级为 10% 时, 本文方法 p=0.7 取得最优效果; 当噪声等级为 20% 时, 本文方法 p=0.8 取得最优效果; 当噪声等级为 30% 时, 本文方法 p=0.9 取得最优效果。由此可见随着噪声等级的增加, 可通过增大 p 的取值来保持本文方法的优势。

表 2　不同噪声等级下 MRI 数据所有切片恢复的平均质量评估指标比较

Table 2　Comparison of average quality assessment metrics for all slices of the MRI data restorations at different noise levels

噪声等级	评估指标	Observed	KBR	TNN	CCSVS	本文方法		
						(p=0.7)	(p=0.8)	(p=0.9)
10%	PSNR	14.41	24.464	35.782	36.273	**40.428**	39.302	37.490
	SSIM	0.262	0.756	0.970	0.972	**0.984**	0.981	0.975
	FSIM	0.714	0.841	0.974	0.976	**0.988**	0.985	0.979
	CPUtime	—	**26.029**	41.430	47.094	94.595	95.578	94.619
20%	PSNR	11.394	24.075	34.021	34.506	22.176	**37.156**	35.778
	SSIM	0.135	0.737	0.955	0.958	0.626	**0.966**	0.963
	FSIM	0.555	0.830	0.963	0.966	0.804	**0.976**	0.971
	CPUtime	—	**31.456**	40.911	43.785	106.219	94.387	93.969
30%	PSNR	9.635	22.840	32.086	32.457	18.138	20.451	**34.347**
	SSIM	0.085	0.688	0.925	0.926	0.593	0.625	**0.956**
	FSIM	0.459	0.807	0.948	0.949	0.769	0.830	**0.974**
	CPUtime	—	**21.718**	40.195	47.509	137.692	99.816	93.923

图 7 为 10% 噪声等级下, 针对 MRI 数据集中的每个图像, 提取 10 个相邻切片的 PSNR 和 SSIM 值对比。可直观地注意到本文方法明显优于其他对比方法。



(a) PSNR值　　(b) SSIM值

图 7　MRI 图像恢复中相邻 10 个切片的 PSNR 值及 SSIM 值比较 (10% 噪声等级)

Fig. 7　Comparison of the PSNR and SSIM of 10 adjacent slices of the MRI image restorations (10% noise level)

图 8 给出了调节参数 p 在 MRI 数据集上的灵敏度分析。通过对 p 值的敏感性分析, 可以发现当η介于 1.1~1.4 时, 算法能够取得较好的性能表现。随着 p 值的减小, 曲线的峰值有所右移, 进一步表明$\eta = 2.1 - p$的选择是合理的。为了验证这一选择的普适性, 对不同 p 值进行了进一步的实验分析。结果表明, p 值在 0.7~0.9 的设置与灵敏度η的变化相得益彰, 能够达到最佳的性能。因

此，通过敏感性分析，最终确定了 p 值范围的最优设置。该参数组合在不同数据集和应用场景中均能稳定表现，具有较强的通用性，避免了依赖先验知识的局限性，能够更好地推广到实际应用中。

图 9 给出了不同方法在噪声等级分别为 10%、20% 和 30% 的 MRI 图像中第 23 个切片及第 40 个切片的恢复结果，其中本文方法的恢复图像选取的为 p 取最优值时的结果。可明显看出 KBR 方法效果明显不佳，对比之下 CCSVS 方法逐渐占有优势，但随噪声等级增加，图像恢复后的轮廓及细节清晰度仍不及本文方法。本文方法恢复后的脑图纹路清晰度几乎高度还原于原始 MRI 图像。随着噪声等级的增加，其他对比方法的恢复效果明显降低，本文方法优势最佳。

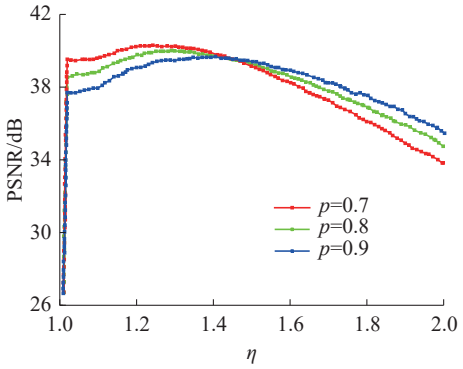


图 8　MRI 参数 η 调节的灵敏度

Fig. 8　Sensitivity for the parameter η tuning on MRI

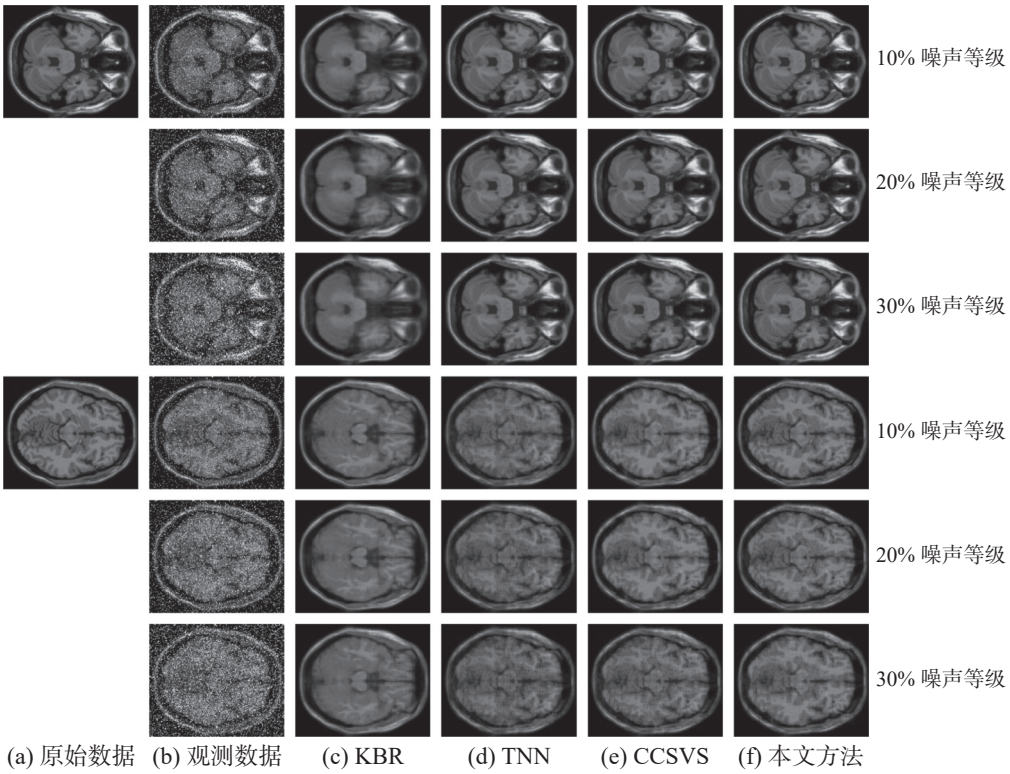


图 9　不同噪声等级下 MRI 图像的恢复结果比较

Fig. 9　Comparison of MRI image restorations at different noise levels

3.3　高光谱及多光谱图像恢复

本实验分别采用一张高光谱图像和一张多光谱图像，选自高光谱遥感数据库中的 Pavia Centre 和哥伦比亚 MSI 数据库中的 Cloth 进行测试，大小分别为 200×200×80 像素和 512×512×31 像素，并对其分别加入 10%、20%、30% 的随机噪声。本实验中本文方法及其他对比方法的参数配置与上一实验相同。

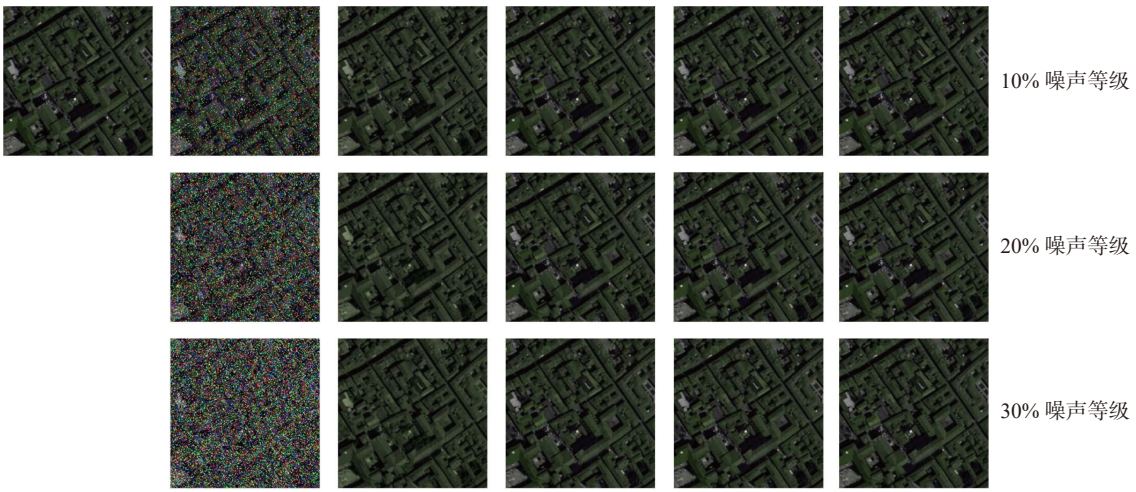
表 3 列出了各种方法对高光谱或多光谱图像在不同噪声等级下各波段的平均 PSNR、SSIM、FSIM 值和运行时间。从表 3 中可以看出随着噪声等级的增加，本文方法均在 PSNR、SSIM、FSIM 值中取得最优效果，且增大 p 的取值可获得更好效果，CCSVS 方法取得次优效果，KBR 方法效果明显不如其他方法，但在运行时间方面占据显著优势。

图 10 选取不同噪声等级下的所有对比方法恢复的高光谱或多光谱图像的第 23 波段，其中本文方法的恢复图像选取的为 p 取最优值时的结果。可以清楚地看到，本文方法的恢复效果与 CCSVS 方法相似，观测数据中噪声被去除，并且图像中的纹理和边缘也得到了很好的保留，多光谱图像 Cloth 中 KBR 方法在各个噪声等级中肉眼可见的恢复能力不及本文方法。

表 3　不同噪声等级下高光谱或多光谱图像所有波段恢复的平均质量评估指标比较

Table 3　Comparison of average quality assessment metrics for all bands of the HSI or MSI restorations at different noise levels

数据名称	噪声等级	评估指标	Observed	KBR	TNN	CCSVS	本文方法		
							(p=0.7)	(p=0.8)	(p=0.9)
Pavia Centre	10%	PSNR	14.517	33.914	46.808	48.527	**50.163**	49.352	47.580
		SSIM	0.275	0.968	0.990	0.989	**0.992**	0.990	0.990
		FSIM	0.723	0.980	0.993	0.993	**0.995**	0.994	0.993
		CPUtime	—	**53.861**	106.027	126.362	229.713	231.269	228.012
	20%	PSNR	11.508	32.752	44.382	46.076	32.478	**47.492**	45.590
		SSIM	0.128	0.960	0.987	0.987	0.954	**0.989**	0.988
		FSIM	0.578	0.976	0.991	0.991	0.966	**0.993**	0.992
		CPUtime	—	**44.452**	82.287	139.987	243.034	227.451	229.478
	30%	PSNR	9.752	31.424	41.670	43.070	30.634	33.508	**43.171**
		SSIM	0.075	0.948	0.983	0.983	0.899	0.938	**0.985**
		FSIM	0.491	0.968	0.989	0.989	0.923	0.959	**0.990**
		CPUtime	—	**40.477**	82.101	137.48	233.538	225.842	219.516
Cloth	10%	PSNR	14.299	32.044	43.785	44.377	**45.903**	44.730	42.774
		SSIM	0.220	0.910	0.982	0.981	**0.983**	0.982	0.979
		FSIM	0.747	0.974	0.993	0.993	**0.995**	0.994	0.992
		CPUtime	—	**167.142**	280.850	399.545	746.958	743.875	774.065
	20%	PSNR	11.279	30.515	41.125	42.002	26.831	**42.702**	40.792
		SSIM	0.098	0.876	0.976	**0.977**	0.742	**0.977**	0.974
		FSIM	0.645	0.960	0.991	0.991	0.904	**0.993**	0.991
		CPUtime	—	**192.463**	273.508	467.607	616.027	732.908	723.937
	30%	PSNR	9.522	29.902	37.837	37.097	20.881	**38.284**	38.283
		SSIM	0.057	0.856	0.960	0.959	0.361	0.956	**0.962**
		FSIM	0.589	0.952	0.988	0.988	0.899	**0.990**	0.989
		CPUtime	—	**172.350**	270.983	464.727	805.050	711.454	706.676



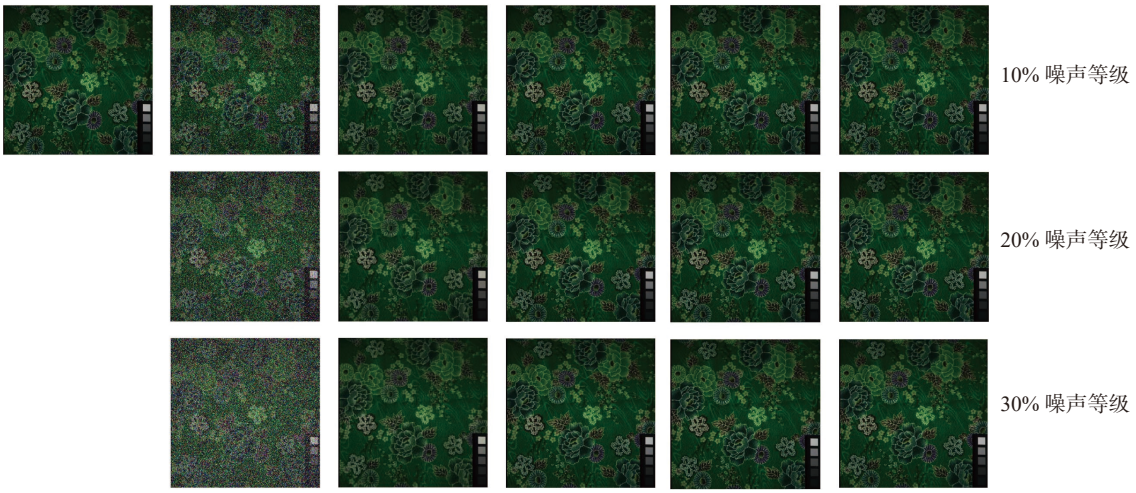


图 10　不同噪声等级下对高光谱和多光谱图像的恢复结果比较

Fig. 10　Comparison of HIS and MSI restorations at different noise levels

3.4　灰度视频恢复

灰度视频序列本质上是一个三阶张量，每一帧都是一个灰度图像，可以用一个低 tubal 秩张量来近似。在本实验中，测试视频来源于 YUR 视频数据库，从中选取了 2 个视频进行展示，即 Road 和 Suzie，测试视频的大小分别为 158 像素×238 像素×24 像素和 144 像素×176 像素×150 像素，并对其分别加入 10%、20%、30% 的随机噪声。本实验中本文方法及其他对比方法的参数配置与上一实验相同。

表 4 给出了各种方法对 2 个视频在不同噪声等级下每一帧的平均 PSNR、SSIM、FSIM 值和运行时间。从表 4 中可以看出不论哪一种噪声等级下，本文方法均在 PSNR、SSIM、FSIM 值中取得最优效果，KBR 方法在运行时间方面占据显著优势。在不同噪声等级下，KBR 方法恢复效果均明显低于其它方法，并且本文可通过调节增加 p 的取值来获得最好效果。

表 4　不同噪声等级下灰度视频恢复的逐帧平均质量评估指标比较

Table 4　Comparison of average quality assessment metrics for all frames of grayscale video restorations at different noise levels

数据名称	噪声等级	评估指标	Observed	KBR	TNN	CCSVS	本文方法		
							(p=0.7)	(p=0.8)	(p=0.9)
Road	10%	PSNR	15.085	22.416	27.416	28.643	**30.685**	29.511	28.456
		SSIM	0.271	0.870	0.945	0.953	**0.963**	0.956	0.948
		FSIM	0.719	0.908	0.951	0.960	**0.971**	0.964	0.956
		CPUtime	—	**13.732**	21.702	23.168	55.906	55.977	55.187
	20%	PSNR	12.064	22.365	27.175	28.199	20.781	**29.007**	28.985
		SSIM	0.146	0.857	0.937	0.941	0.786	**0.950**	0.942
		FSIM	0.565	0.903	0.947	0.952	0.833	**0.959**	0.952
		CPUtime	—	**11.576**	21.232	23.594	55.659	55.191	54.733
	30%	PSNR	10.300	22.112	25.587	26.690	18.613	20.613	**27.506**
		SSIM	0.096	0.806	0.896	0.930	0.742	0.767	**0.932**
		FSIM	0.473	0.882	0.940	0.943	0.806	0.832	**0.946**
		CPUtime	—	**10.246**	21.093	22.232	54.724	52.683	53.848
Suzie	10%	PSNR	15.702	25.885	34.099	34.554	25.191	**37.233**	35.485
		SSIM	0.152	0.771	0.943	0.944	0.765	**0.961**	0.951
		FSIM	0.595	0.848	0.959	0.961	0.883	**0.974**	0.966
		CPUtime	—	**63.796**	91.074	106.616	237.007	224.834	221.463

续表 4

数据名称	噪声等级	评估指标	Observed	KBR	TNN	CCSVS	本文方法		
							(p=0.7)	(p=0.8)	(p=0.9)
	20%	PSNR	12.690	25.217	33.263	33.612	22.425	24.425	**34.644**
		SSIM	0.070	0.750	0.932	0.930	0.684	0.744	**0.940**
		FSIM	0.424	0.832	0.952	0.953	0.731	0.831	**0.961**
		CPUtime	—	**64.217**	90.996	117.282	242.496	232.436	220.572
	30%	PSNR	10.933	24.967	32.326	31.512	20.133	23.133	**33.936**
		SSIM	0.043	0.744	**0.911**	0.888	0.535	0.725	0.891
		FSIM	0.337	0.829	0.943	0.932	0.767	0.802	**0.954**
		CPUtime	—	**62.648**	90.041	115.788	247.018	243.563	221.003

图 11 给出了不同噪声等级下的所有对比方法恢复的测试视频的第 23 帧, 其中本文方法的恢复图像选取的为 p 取最优值时的结果。可以清楚地看到, Road 视频中 KBR 方法恢复后有明显虚影, Suzie 视频中 KBR 方法恢复后的人物轮廓模糊, 在噪声等级较大时 CCSVS 方法仍存在部分噪声, 本文方法的人物边缘清晰度优于 TNN 方法与 CCSVS 方法, 且明显具有比 KBR 更好的性能特征。

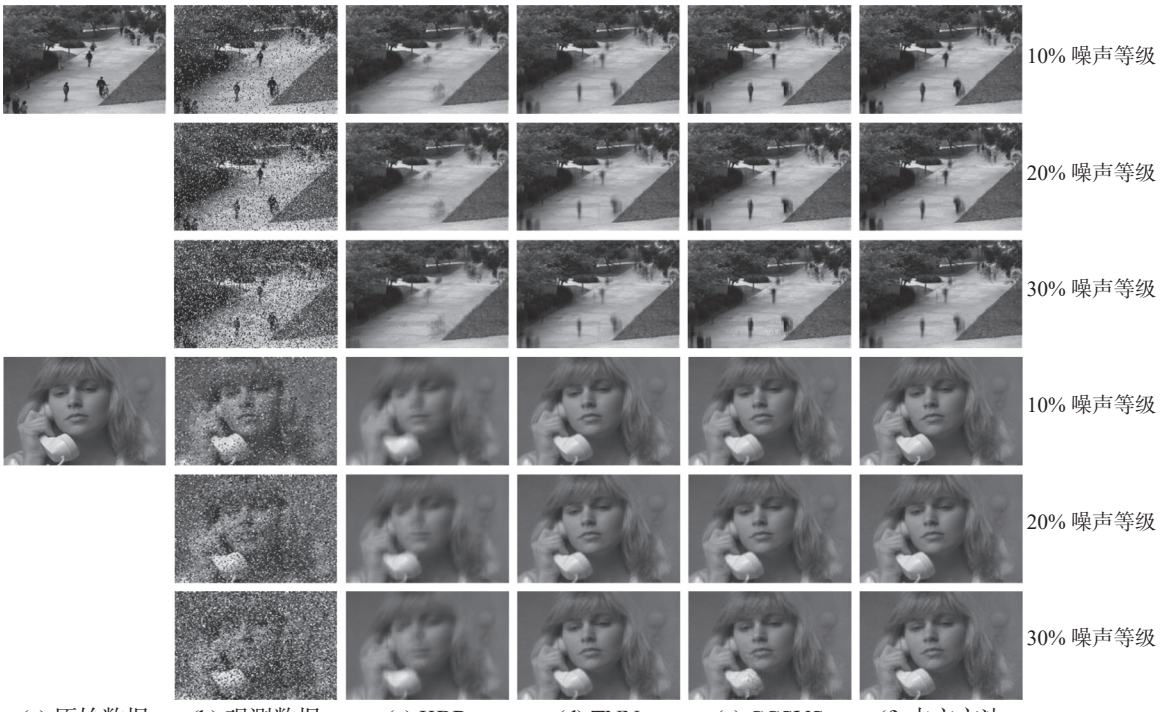


图 11　不同噪声等级下灰度视频的恢复结果比较

Fig. 11　Comparison of grayscale video restorations at different noise levels

4　结束语

本文提出了一种增强型 TRPCA 模型, 该模型同时利用了低秩先验结构和局部平滑性。本文模型利用加权张量非凸型 Schatten-p 范数对张量秩进行松弛, 通过区别对待奇异值来更大程度地保留重要信息同时去除稀疏噪声干扰。在面对受损张量数据噪声等级较大的情况, 针对性地提出了低秩预分离的方法实现受损数据的近似低秩部分和近似稀疏部分的提前分离, 同时利用随机抖动机制对受损数据中第三维度增加一致性且对噪声信息的随机性来正则化算法, 以减少过拟合并且提高鲁棒性。针对所提出的模型利用 ADMM 的算法进行求解, 并将该模型应用到高维数据恢复实验当中, 如彩色图像恢复、核磁共振图像恢复、高光谱或多光谱图像恢复及灰度视频恢复 4 个应用。

大量实验表明, 在多数情况下, 本文模型在定性和定量评估指标上均取得不错效果, 优于 KBR、

TNN、CCSVS 这 3 种最先进的方法。但是所需 CPU 运行时间较长，这是由于基于 Schatten-p 范数的非凸优化问题需要对每个张量奇异值进行不同等级的收缩，并且常常需要更多的迭代次数来收敛从而产生更多运算量，消耗了较多时间。不过在处理第 3 通道数目相对较低的张量数据时是可以接受的等待时间范围。考虑到本文方法能够实现优越的图像处理效果，可以平衡所需的时间代价，未来考虑可在运行速度上进一步提高。

参考文献：

[1] 倪怀发, 沈肖波, 孙权森. 基于低秩分解的鲁棒典型相关分析[J]. 智能系统学报, 2017, 12(4): 491−497.
NI Huaifa, SHEN Xiaobo, SUN Quansen. Robust canonical correlation analysis based on low rank decomposition[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2017, 12(4): 491−497.

[2] CANDÈS E J, LI Xiaodong, MA Yi, et al. Robust principal component analysis?[J]. Journal of the ACM, 2011, 58(3): 1−37.

[3] CAI Jianfeng, CANDÈS E J, SHEN Zuowei. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM journal on optimization, 2010, 20(4): 1956−1982.

[4] ASANTE-MENSAH M G, PHAN A H, AHMADI-ASL S, et al. Image reconstruction using superpixel clustering and tensor completion[J]. Signal processing, 2023, 212: 109158.

[5] ZHENG Jianwei, YANG Ping, YANG Xi, et al. Truncated low-rank and total p variation constrained color image completion and its Moreau approximation algorithm [J]. IEEE transactions on image processing, 2020, 29: 7861−7874.

[6] OH T H, TAI Y W, BAZIN J C, et al. Partial sum minimization of singular values in robust PCA: algorithm and applications[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2016, 38(4): 744−758.

[7] ZHU Lin, JIANG Xiurong, LI Jianing, et al. Motion-aware structured matrix factorization for foreground detection in complex scenes[J]. ACM transactions on multimedia computing, communications, and applications, 2020, 16(4): 1−23.

[8] ZHONG Guo, PUN C M. RPCA-induced self-representation for subspace clustering[J]. Neurocomputing, 2021, 437: 249−260.

[9] 王丽娟, 丁世飞, 夏菁. 基于多样性的多视图低秩稀疏子空间聚类算法[J]. 智能系统学报, 2022, 18(2): 399−408.
WANG Lijuan, DING Shifei, XIA Jing. Multiview low-rank sparse subspace clustering based on diversity[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2022, 18(2): 399−408.

[10] 吴小艺, 吴小俊. 结构化加权稀疏低秩恢复算法在人脸识别中的应用[J]. 智能系统学报, 2019, 14(3): 455−463.
WU Xiaoyi, WU Xiaojun. A low rank recovery algorithm for face recognition with structured and weighted sparse constraint[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(3): 455−463.

[11] KOLDA T G, BADER B W. Tensor decompositions and applications[J]. SIAM review, 2009, 51(3): 455−500.

[12] KILMER M E, BRAMAN K, HAO Ning, et al. Third-order tensors as operators on matrices: a theoretical and computational framework with applications in imaging[J]. SIAM journal on matrix analysis and applications, 2013, 34(1): 148−172.

[13] LIU Ji, MUSIALSKI P, WONKA P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2013, 35(1): 208−220.

[14] HUANG Bo, MU Cun, GOLDFARB Donald, et al. Provable models for robust low-rank tensor completion[J]. Pacific journal of optimization, 2015, 11(2): 339−64.

[15] LU Canyi, FENG Jiashi, CHEN Yudong, et al. Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2020, 42(4): 925−938.

[16] KILMER M E, MARTIN C D. Factorization strategies for third-order tensors[J]. Linear algebra and its applications, 2011, 435(3): 641−658.

[17] ZHANG Zemin, ELY G, AERON S, et al. Novel methods for multilinear data completion and de-noising based on tensor-SVD[C]//2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus: IEEE, 2014: 3842−3849.

[18] LU Canyi, FENG Jiashi, CHEN Yudong, et al. Tensor robust principal component analysis: exact recovery of corrupted low-rank tensors *via* convex optimization[C]//2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas: IEEE, 2016: 5249−5257.

[19] BOYD S. Distributed optimization and statistical learning *via* the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and trends® in machine learning, 2010, 3(1): 1−122.

[20] CANDÈS E J, WAKIN M B, BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted ℓ1 minimization[J]. Journal of fourier analysis and applications, 2008, 14(5): 877−905.

[21] GENG Xiaoyu, GUO Qiang, HUI Shuaixiong, et al. Tensor robust PCA with nonconvex and nonlocal regularization[J]. Computer vision and image understanding, 2024, 243: 104007.

[22] ZHANG Feng, WANG Hailin, QIN Wenjin, et al. Generalized nonconvex regularization for tensor RPCA and its applications in visual inpainting[J]. Applied intelligence, 2023, 53(20): 23124−23146.

[23] YANG Ming, LUO Qilun, LI Wen, et al. Nonconvex 3D

array image data recovery and pattern recognition under tensor framework[J]. Pattern recognition, 2022, 122: 108311.

[24] WANG Hailin, ZHANG Feng, WANG Jianjun, et al. Generalized nonconvex approach for low-tubal-rank tensor recovery[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2022, 33(8): 3305−3319.

[25] 苏雅茹, 刘耿耿, 刘文犀, 等. 基于 l_p 范数的非凸低秩张量最小化[J]. 模式识别与人工智能, 2019, 32(6): 494−503.
SU Yaru, LIU Genggeng, LIU Wenxi, et al. Nonconvex low-rank tensor minimization based on l_p norm[J]. Pattern recognition and artificial intelligence, 2019, 32(6): 494−503.

[26] GENG Xiaoyu, GUO Qiang, ZHANG Caiming. Color image denoising *via* tensor robust PCA with nonconvex and nonlocal regularization[C]//ACM multimedia Asia. Gold Coast: ACM, 2021: 1−5.

[27] WEN Fei, YING Rendong, LIU Peilin, et al. Robust PCA using generalized nonconvex regularization[J]. IEEE transactions on circuits and systems for video technology, 2020, 30(6): 1497−1510.

[28] GAO Quanxue, ZHANG Pu, XIA Wei, et al. Enhanced tensor RPCA and its application[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2021, 43(6): 2133−2140.

[29] YANG Jinghua, ZHAO Xile, MA Tianhui, et al. Tensor train rank minimization with hybrid smoothness regularization for visual data recovery[J]. Applied mathematical modelling, 2020, 81: 711−726.

[30] 杨栎皓. 基于截断核范数张量鲁棒主成分分析[J]. 人工智能与机器人研究, 2020, 9: 64.
YANG Lihao. Tensor Robust Principal Component Analysis Based on Truncated Nuclear Norm[J]. Artificial intelligence and robotics research, 2020, 9: 64.

[31] 陈利霞, 班颖, 王学文. 基于张量核范数与 3D 全变分的背景减除[J]. 计算机应用, 2020, 40(9): 2737−2742.
CHEN Lixia, BAN Ying, WANG Xuewen. Background subtraction based on tensor nuclear norm and 3D total variation[J]. Journal of computer applications, 2020, 40(9): 2737−2742.

[32] TIBSHIRANI R. Regression shrinkage and selection *via* the lasso: a retrospective[J]. Journal of the royal statistical society series B: statistical methodology, 2011, 73(3): 273−282.

[33] ZUO Wangmeng, MENG Deyu, ZHANG Lei, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding[C]//2013 IEEE International Conference on Computer Vision. Sydney: IEEE, 2013: 217−224.

[34] MIRSKY L. A trace inequality of john von Neumann[J]. Monatshefte für mathematik, 1975, 79(4): 303−306.

[35] 李坤来, 王雲龙, 秦琴, 等. MATLAB 中多种图像去噪算法的比较分析[J]. 信息技术与信息化, 2023(8): 62−67.
LI Kunlai, WANG Yunlong, QIN Qin, et al. Comparative analysis of various image denoising algorithms in MATLAB[J]. Information technology and informatization, 2023(8): 62−67.

[36] 史凯特, 孙浩东, 董秀芬, 等. 基于改进加权核范数最小化的图像去噪算法研究[J]. 电光与控制, 2024: 48−52.
SHI Kaite, SUN Haodong, DONG Xiufen, et al. Research on image denoising algorithm based on improved weighted kernel norm minimization[J]. China industrial economics, 2024: 48−52.

[37] MORDVINTSEV Alexander, OLAH Christopher, TYKA Mike. Inceptionism: going deeper into neural networks[J]. Google research blog, 2015, 20(14): 5−15.

[38] MAHENDRAN A, VEDALDI A. Visualizing deep convolutional neural networks using natural pre-images[J]. International journal of computer vision, 2016, 120(3): 233−255.

[39] XIE Qi, ZHAO Qian, MENG Deyu, et al. Kronecker-basis-representation based tensor sparsity and its applications to tensor recovery[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2018, 40(8): 1888−1902.

[40] LIU Youfa, DU Bo, CHEN Yongyong, et al. Convex–concave tensor robust principal component analysis[J]. International journal of computer vision, 2024, 132(5): 1721−1747.

作者简介:

潘昱妍, 硕士研究生, 主要研究方向为机器学习和图像处理。E-mail: 13439684118@163.com。

张德, 副教授, 博士, 主要研究方向为计算机视觉和模式识别。E-mail: zhangde2000@163.com。

李壮举, 副教授, 博士, 主要研究方向为机器人智能控制和建筑节能控制技术。E-mail: lizhuangju@bucea.edu.cn。