DOI:10.11992/tis.201704026
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20170703.1853.012.html

犹豫模糊集的 α-截集及其应用

郑婷婷,桑小双,马斌斌
(安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230601)

摘　要:经典截集是联系模糊集和清晰集的桥梁。犹豫模糊集作为经典模糊集的拓展,它的相关理论研究还不够深入,特别是它与经典Ⅰ型模糊集以及其他模糊集之间的关系还缺少讨论。通过分析犹豫模糊集与Ⅰ型模糊集、区间Ⅱ型模糊集之间的关系,引入了犹豫模糊集的 α-截集的概念并讨论其性质,根据该截集推导出犹豫模糊集的分解(表示)定理和更普适的扩展原则。通过分析相关性质及仿真实例,说明了犹豫模糊集的截集概念的合理性,为犹豫模糊多属性决策和聚类分析等问题提供了新的方法。这些结果也极大丰富了犹豫模糊集的相关基础理论。

关键词:犹豫模糊集;Ⅰ型模糊集;区间Ⅱ型模糊集;α-截集;分解定理;扩展原则;多属性决策;聚类分析
中图分类号:TP18;O159　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-4785(2017)03-0362-09

中文引用格式:郑婷婷,桑小双,马斌斌.犹豫模糊集的 α-截集及其应用[J]. 智能系统学报, 2017, 12(3): 362-370.
英文引用格式:ZHENG Tingting, SANG Xiaoshuang, MA Binbin. α-cut sets of hesitant fuzzy sets and their applications[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2017, 12(3): 362-370.

α-cut sets of hesitant fuzzy sets and their applications

ZHENG Tingting, SANG Xiaoshuang, MA Binbin
(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: The typical cut set is a bridge between fuzzy sets and clarity sets. The hesitant fuzzy set (HFS) theory, as an extension of the classical fuzzy set theory, has not been thoroughly studied till date; furthermore, there is less discussion regarding the relation between the HFS and classical type-I fuzzy set theory or other fuzzy set theories. This study analyzed the relations between the HFS and type-1 fuzzy set theory and between HFS and interval type-2 fuzzy set theory, proposed the concept of α-cut sets of HFS, and discussed their properties. Meanwhile, the decomposition (representation) theorems and the more general extension principles of HFS based on α-cut sets were deduced. The corresponding properties were studied. The results of the simulation prove the rationality of the α-cut set concept and provide a novel method for hesitant fuzzy multiple attribute decision-making and clustering analysis. All these conclusions deeply enrich the fundamental theory of HFS.

Keywords: hesitant fuzzy set; type-1 fuzzy set; interval type-2 fuzzy set; α-cut set; decomposition theorem; extension principle; multiple attribute decision-making; clustering analysis

作为直觉模糊集和模糊多值集的一种新的拓展,犹豫模糊集(hesitant fuzzy set, HFS)由 Torra 于 2009 年提出[1-2],它的隶属函数是由[0,1]上所有可能的不同值的子集所组成的。Torra 介绍了 HFS 的运算及 HFS 套的概念。此外,为定义集成算子,Torra 提出了 HFS 的扩展原则,并将此原则用于证实他定义的运算的合理性[1]。还有很多学者讨论了 HFS 上的距离和相似性度量[3-4]、相关系数[5]及信息测度[6]等。之后,人们开始逐渐将 Torra 的经典犹豫模糊集拓展到更复杂的情形。Zhu 等[7]利用犹豫集的隶属度和非隶属度提出了双重犹豫模糊集的概念。Chen 等[8]提出了一种隶属度为区间值的区间值犹豫模糊集模型。Qian 等[9]利用一些直

收稿日期:2017-04-20.　**网络出版日期**:2017-07-03.
基金项目:安徽省自然科学基金面上项目(1708085MF163).
通信作者:郑婷婷.E-mail:tt-zheng@163.com.

觉模糊集的并作为隶属度定义广义犹豫模糊集。Yu[10]介绍了三角模糊犹豫模糊集,其隶属度为一些三角模糊数。Rodriguez 等[11]将 HFS 扩展到语言环境,并提出了犹豫模糊语言术语集的概念。如今,HFS 及其扩展模型已经成功应用于决策[7,8,11-17]、评价[10]和聚类[18-19]等领域。

然而,关于经典犹豫模糊集的基本模糊理论还没有被完全研究,目前主要的研究仍主要集中在经典犹豫模糊集及其拓展形式的运算法则与集成算子[15]、相关测度研究[6,18-19]等。本文首先提出 HFS 的 α-截集的概念,将其定义为Ⅰ型模糊集,在此基础上建立分解定理和更一般的扩展原理,并讨论其性质。最后,通过实例说明其在多属性决策和聚类分析中的应用。

1　预备知识

本节回顾Ⅰ型模糊集、区间Ⅱ型模糊集和犹豫模糊集等的相关概念。为后面讨论需要,假设本文所讨论的论域均为非空有限论域。

1.1　Ⅰ型模糊集(T1FS)

Ⅰ型模糊集也称为 Zadeh 模糊集或者经典模糊集。

定义 1[20]　论域 X 上的Ⅰ型模糊集(type-1 fuzzy set,T1FS) A,记作 $A=\{\langle x,\mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$。它由隶属(特征)函数 μ_A 表示,满足:

$$\mu_A:X\to[0,1]$$
$$x\mapsto\mu_A(x)$$

式中 $\mu_A(x)$ 表示 x 属于 A 的隶属度。X 上所有的Ⅰ型模糊集全体组成的集合为 T1FS(X)。

定义 2[21-22]　设 $A\in$ T1FS(X),对任意 $\alpha\in[0,1]$,定义 α-截集 A_α 和 α-强截集 $A_{\underline{\alpha}}$,它们都是 X 上的精确集,分别满足:

$$A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_A(x)\geqslant\alpha\}$$
$$A_{\underline{\alpha}}=\{x\in X \mid \mu_A(x)>\alpha\}$$

有关这一类截集的性质以及 T1FS 的分解定理和扩展原理详见文献[21-24]。

1.2　区间Ⅱ型模糊集(IT2FS)

区间Ⅱ型模糊集是Ⅱ型模糊集的特例,Zadeh 将它们均视为经典模糊集的扩展。

定义 3[25]　论域 X 上的Ⅱ型模糊集(type-2 fuzzy set,T2FS) $\tilde{A}$,记为

$$\tilde{A}=\{\langle x,(u,\tilde{A}_x(u))\rangle \mid x\in X,\mu\in[0,1]\}$$

它满足:

$$\tilde{A}:X\to[0,1]^{[0,1]}$$
$$x\mapsto\tilde{A}_x$$

式中 $\tilde{A}_x$ 为[0,1]上的函数,即

$$\tilde{A}_x:[0,1]\to[0,1]$$
$$u\mapsto\tilde{A}_x(u)$$

对任意 $x\in X$,定义 $J_A(x)=\{u \mid \tilde{A}_x(u)\neq0\}\subseteq[0,1]$,称 $J_A(x)$ 为 x 的主隶属度,$\tilde{A}_x(u)$ 为 x 在 $J_A(x)$ 上的次隶属度[26]。X 上所有的Ⅱ型模糊集组成的集合记为 T2FS(X)。

若对任意 $x\in X$,$\tilde{A}_x(u)$ 仅为 0 或 1 时,称Ⅱ型模糊集为区间Ⅱ型模糊集(interval type-2 fuzzy set,IT2FS)。

对于 IT2FS,当且仅当 $u\in J_A(x)$ 时,$\tilde{A}_x(u)=1$ 成立;当且仅当 $u\notin J_A(x)$ 时,$\tilde{A}_x(u)=0$ 成立。这说明,只要给定每个元素的主隶属度,其次隶属度就可以确定。也就是说,$\tilde{A}_x$ 可以视为清晰集的特征函数。故 IT2FS 的定义可视为定义 4。

定义 4　设[0,1]上的所有闭子区间组成的类为 $D[0,1]$,区间Ⅱ型模糊集 $\tilde{A}$ 可由 X 上的函数表示为

$$\tilde{A}=\{\langle x,J_{\tilde{A}}(x)\rangle \mid x\in X\},\tag{1}$$

式中:

$$J_{\tilde{A}}:X\to D[0,1]\quad x\mapsto J_{\tilde{A}}(x)$$

式中 $J_{\tilde{A}}(x)$ 可能是离散的 $\{u_{\tilde{A}i}(x) \mid i=1,2,\cdots,n_x\}$ 或者为连续的 $[J_{\tilde{A}L}(x),J_{\tilde{A}R}(x)]$。$X$ 上的所有区间Ⅱ型模糊集的全体组成的集合记为 IT2FS(X)。

定义 5　设 $\tilde{A},\tilde{B}\in$ IT2FS(X),定义区间Ⅱ型模糊集的运算如下:

1)若设 $x\in X$,$J_{\tilde{A}}(x)=\{u_{\tilde{A}i}(x) \mid i=1,2,\cdots,m_x\}$,$J_{\tilde{B}}(x)=\{u_{\tilde{B}j}(x) \mid j=1,2,\cdots,n_x\}$,则

①$J_{\tilde{A}^C}(x)=\{1-u_{\tilde{A}i}(x) \mid i=1,2,\cdots,m_x\}$;

②$J_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\{\max\{u_{\tilde{A}i}(x),u_{\tilde{B}j}(x)\} \mid i=1,2,\cdots,m_x,j=1,2,\cdots,n_x\}$;

③$J_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\{\min\{u_{\tilde{A}i}(x),u_{\tilde{B}j}(x)\} \mid i=1,2,\cdots,m_x,j=1,2,\cdots,n_x\}$。

2)若设 $x\in X$,$J_{\tilde{A}}(x)=[J_{\tilde{A}L}(x),J_{\tilde{A}R}(x)]$,$J_{\tilde{B}}(x)=[J_{\tilde{B}L}(x),J_{\tilde{B}R}(x)]$,则

①$J_{\tilde{A}^C}(x)=[1-J_{\tilde{A}R}(x),1-J_{\tilde{A}L}(x)]$;

②$J_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=[\max\{J_{\tilde{A}L}(x),J_{\tilde{B}L}(x)\},\max\{J_{\tilde{A}R}(x),J_{\tilde{B}R}(x)\}]$;

③$J_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=[\min\{J_{\tilde{A}L}(x),J_{\tilde{B}L}(x)\},\min\{J_{\tilde{A}R}(x),J_{\tilde{B}R}(x)\}]$。

1.3 犹豫模糊集(HFS)

Torra 和 Narukawa 在直觉模糊集和模糊多值集的基础上首次提出犹豫模糊集的概念[1-2],它可以描述决策中某些犹豫不定的情况,例如某个专家可能会给某个元素定义一组可能的隶属度。

定义 6[2,15] 论域 X 上的犹豫模糊集 E 记为

$$E = \{\langle x, h_E(x)\rangle \mid x \in X\}, \tag{2}$$

式中

$$h_E: X \to P([0,1])$$
$$x \mapsto h_E(x)$$

式中,$h_E(x) \subseteq [0,1]$ 表示元素 x 属于集合 E 的可能隶属度,称为 x 的犹豫模糊隶属度。X 上的所有犹豫模糊集的全体组成的集合记为 HFS(X)。

元素的犹豫隶属度可能为[0,1]上的可数或不可数子集。若 h_E 仅将 X 上的元素映射到[0,1]上的有限离散点集,这种犹豫模糊集称为经典犹豫模糊集[27]。本文不加说明,所讨论的犹豫模糊集(HFS)均为经典犹豫模糊集。

定义 7[2] 设 $E \in \mathrm{HFS}(X)$,其上、下界分别为

$$h_E^-(x) = \min\{r \mid r \in h_E(x)\}$$
$$h_E^+(x) = \max\{r \mid r \in h_E(x)\}$$

定义 8[2] 设 $E, E_1, E_2 \in \mathrm{HFS}(X)$,定义犹豫模糊集的基本运算如下:

1) $h_{E^C}(x) = \{1-r \mid r \in h_E(x)\}$;

2) $h_{E_1 \cup E_2}(x) = \{r \in h_{E_1}(x) \cup h_{E_2}(x) \mid r \geqslant \max\{h_{E_1}^-(x), h_{E_2}^-(x)\}\}$,或者等价于 $\{\max\{r_1, r_2\} \mid r_1 \in h_{E_1}(x), r_2 \in h_{E_2}(x)\}$;

3) $h_{E_1 \cap E_2}(x) = \{r \in h_{E_1}(x) \cup h_{E_2}(x) \mid r \leqslant \min\{h_{E_1}^+(x), h_{E_2}^+(x)\}\}$,或者等价于 $\{\min\{r_1, r_2\} \mid r_1 \in h_{E_1}(x), r_2 \in h_{E_2}(x)\}$。

2 犹豫模糊集的 α-截集

2.1 犹豫模糊集与离散区间二型模糊集的关系

经典犹豫模糊集中 $h_E(x)$ 是[0,1]上的一组有限离散值,这些离散值均是 x 在 E 上的可能隶属度值,可视为主隶属度值。比较式(1)和式(2),不难发现,在离散情况下 IT2FS 的概念与经典 HFS 的概念是一致的,且根据定义 5 和定义 8 可知,离散 IT2FS 的补、并和交运算分别相当于 HFS 的补、并和交。接下来的例子将进一步说明这一结果。

例 1 设 $E_1, E_2 \in \mathrm{HFS}(X)$,对某个 $x \in X$,令 $h_{E_1}(x) = \{0.2, 0.4, 0.6\}$,$h_{E_2}(x) = \{0.4, 0.8, 1\}$,则 $h_{E_1}^-(x) = 0.2$,$h_{E_2}^-(x) = 0.4$,$h_{E_1}^+(x) = 0.6$,$h_{E_2}^+(x) = 1$,$h_{E_1}(x) \cup h_{E_2}(x) = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$。

依据定义 8,故 $h_{E_1 \cup E_2}(x) = \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$,$h_{E_1 \cap E_2}(x) = \{0.2, 0.4, 0.6\}$,$h_{E_1^C}(x) = \{0.4, 0.6, 0.8\}$。

若令 $J_{\tilde{A}_1}(x) = \{0.2, 0.4, 0.6\}$,$J_{\tilde{A}_2}(x) = \{0.4, 0.8, 1\}$,则 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 可视为 X 上的两个区间Ⅱ型模糊集。

由定义 5 可知:

$$J_{\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2}(x) = \{0.4, 0.6, 0.8, 1\} = h_{E_1 \cup E_2}(x)$$
$$J_{\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2}(x) = \{0.2, 0.4, 0.6\} = h_{E_1 \cap E_2}(x)$$
$$J_{\tilde{A}_1^C} = \{0.4, 0.6, 0.8\} = h_{E_1^C}(x)$$

2.2 犹豫模糊集的截集

由上讨论可知,离散 IT2FS 与 HFS 是有关联的。Zadeh[25]、Liu[28]、Mendel[29]和 Hamrawi[30-32]均讨论过基于 α-平面的 T2FS 的表现定理(实际上是分解定理)。离散 IT2FS 是 T2FS 的特殊形式,它也符合上述讨论的表现定理。袁[32-34]也曾突破“截集必须是经典集合”的限制,利用三值模糊集和五值模糊集分别作为直觉模糊集和区间直觉模糊集的截集的定义。进一步,Shang[35]提出了 n 维模糊集的概念,并指出 n 维模糊集的截集是一个具有 $n+1$ 个值的模糊集。受这些截集概念的启发,本节将 HFS 的 α-截集定义为 T1FS。

定义 9 设 $E \in \mathrm{HFS}(X)$ 且 $\alpha \in [0,1]$,定义 E 的 α-上截集,记为 E_α,其满足 $E_\alpha = \{\langle x, \mu_{E_\alpha}(x)\rangle \mid x \in X\} \in \mathrm{T1FS}(X)$,其中

$$\mu_{E_\alpha}(x) = \begin{cases} \min\{r \in h_E(x) \mid r \geqslant \alpha\}, \\ \qquad \{r \in h_E(x) \mid r \geqslant \alpha\} \neq \varnothing \\ 0, \quad \{r \in h_E(x) \mid r \geqslant \alpha\} = \varnothing \end{cases} \tag{3}$$

若将式(3)中 $\{r \in h_E(x) \mid r \geqslant \alpha\}$ 更改为 $\{r \in h_E(x) \mid r > \alpha\}$,且其余部分不变,则可定义 E 的 α-强上截集 $E_{\underline{\alpha}} = \{\langle x, \mu_{E_{\underline{\alpha}}}(x)\rangle \mid x \in X\}$。

同样,也可定义 E 的 α-下截集 $E^\alpha = \{\langle x, \mu_{E^\alpha}(x)\rangle \mid x \in X\}$,其中

$$\mu_{E^\alpha}(x) = \begin{cases} \max\{r \in h_E(x) \mid r \leqslant \alpha\}, \\ \qquad \{r \in h_E(x) \mid r \leqslant \alpha\} \neq \varnothing \\ 0, \quad \{r \in h_E(x) \mid r \leqslant \alpha\} = \varnothing \end{cases} \tag{4}$$

若将式(4)中 $\{r \in h_E(x) \mid r \leqslant \alpha\}$ 更改为 $\{r \in h_E(x) \mid r < \alpha\}$,且其余部分不变,则可得到 E 的 α-强下截集 $E^{\underline{\alpha}} = \{(x, \mu_{E^{\underline{\alpha}}}(x)) \mid x \in X\}$。

例 2 设 $E \in \mathrm{HFS}(X)$,其中 $X = \{x_1, x_2\}$,$E = \{\langle x_1, \{0.2, 0.4, 0.6\}\rangle, \langle x_2, \{0.3, 0.7\}\rangle\}$。由定义 9 有

$$\mu_{E_\alpha}(x_1)=\begin{cases}0.2, & 0\leqslant\alpha\leqslant0.2\\0.4, & 0.2<\alpha\leqslant0.4\\0.6, & 0.4<\alpha\leqslant0.6\\0, & 0.6<\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E_{\underline{\alpha}}}(x_1)=\begin{cases}0.2, & 0\leqslant\alpha<0.2\\0.4, & 0.2\leqslant\alpha<0.4\\0.6, & 0.4\leqslant\alpha<0.6\\0, & 0.6\leqslant\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E^\alpha}(x_1)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\alpha<0.2\\0.2, & 0.2\leqslant\alpha<0.4\\0.4, & 0.4\leqslant\alpha<0.6\\0.6, & 0.6\leqslant\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E^{\underline{\alpha}}}(x_1)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\alpha\leqslant0.2\\0.2, & 0.2<\alpha\leqslant0.4\\0.4, & 0.4<\alpha\leqslant0.6\\0.6, & 0.6<\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E_\alpha}(x_2)=\begin{cases}0.3, & 0\leqslant\alpha\leqslant0.3\\0.7, & 0.3<\alpha\leqslant0.7\\0, & 0.7<\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E_{\underline{\alpha}}}(x_2)=\begin{cases}0.3, & 0\leqslant\alpha<0.3\\0.7, & 0.3\leqslant\alpha<0.7\\0, & 0.7\leqslant\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E^\alpha}(x_2)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\alpha<0.3\\0.3, & 0.3\leqslant\alpha<0.7\\0.7, & 0.7\leqslant\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$\mu_{E^{\underline{\alpha}}}(x_2)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\alpha\leqslant0.3\\0.3, & 0.3<\alpha\leqslant0.7\\0.7, & 0.7<\alpha\leqslant1\end{cases}$$

故

$$E_\alpha=\begin{cases}\{(x_1,0.2),(x_2,0.3)\}, & 0\leqslant\alpha\leqslant0.2\\\{(x_1,0.4),(x_2,0.3)\}, & 0.2<\alpha\leqslant0.3\\\{(x_1,0.4),(x_2,0.7)\}, & 0.3<\alpha\leqslant0.4\\\{(x_1,0.6),(x_2,0.7)\}, & 0.4<\alpha\leqslant0.6\\\{(x_2,0.7)\}, & 0.6<\alpha\leqslant0.7\\\varnothing, & 0.7<\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$E_{\underline{\alpha}}=\begin{cases}\{(x_1,0.2),(x_2,0.3)\}, & 0\leqslant\alpha<0.2\\\{(x_1,0.4),(x_2,0.3)\}, & 0.2\leqslant\alpha<0.3\\\{(x_1,0.4),(x_2,0.7)\}, & 0.3\leqslant\alpha<0.4\\\{(x_1,0.6),(x_2,0.7)\}, & 0.4\leqslant\alpha<0.6\\\{(x_2,0.7)\}, & 0.6\leqslant\alpha<0.7\\\varnothing, & 0.7\leqslant\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$E^\alpha=\begin{cases}\varnothing, & 0\leqslant\alpha<0.2\\\{(x_1,0.2)\}, & 0.2\leqslant\alpha<0.3\\\{(x_1,0.2),(x_2,0.3)\}, & 0.3\leqslant\alpha<0.4\\\{(x_1,0.4),(x_2,0.3)\}, & 0.4\leqslant\alpha<0.6\\\{(x_1,0.6),(x_2,0.3)\}, & 0.6\leqslant\alpha<0.7\\\{(x_1,0.6),(x_2,0.7)\}, & 0.7\leqslant\alpha\leqslant1\end{cases}$$

$$E^{\underline{\alpha}}=\begin{cases}\varnothing, & 0\leqslant\alpha\leqslant0.2\\\{(x_1,0.2)\}, & 0.2<\alpha\leqslant0.3\\\{(x_1,0.2),(x_2,0.3)\}, & 0.3<\alpha\leqslant0.4\\\{(x_1,0.4),(x_2,0.3)\}, & 0.4<\alpha\leqslant0.6\\\{(x_1,0.6),(x_2,0.3)\}, & 0.6<\alpha\leqslant0.7\\\{(x_1,0.6),(x_2,0.7)\}, & 0.7<\alpha\leqslant1\end{cases}$$

性质 1　设 $E,F\in\mathrm{HFS}(X)$,$\alpha\in[0,1]$,$\{\alpha_t\mid t\in T\}\subseteq[0,1]$,则

1)$E_\alpha\subseteq E_{\underline{\alpha}}$;$E^{\underline{\alpha}}\subseteq E^\alpha$;

2)$\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow E^{\alpha_1}\subseteq E^{\alpha_2}$,$E^{\underline{\alpha_1}}\subseteq E^{\underline{\alpha_2}}$;

若 $\alpha_1<\alpha_2\leqslant\bigwedge_{x\in X}\{h_E^+(x)\}$,则 $E_{\alpha_1}\subseteq E_{\alpha_2}$;

若 $\alpha_1<\alpha_2<\bigwedge_{x\in X}\{h_E^+(x)\}$,则 $E_{\underline{\alpha_1}}\subseteq E_{\underline{\alpha_2}}$;

3)$(E\cup F)_\alpha\subseteq E_\alpha\cup F_\alpha$;$(E\cup F)_{\underline{\alpha}}\subseteq E_{\underline{\alpha}}\cup F_{\underline{\alpha}}$;

$(E\cup F)^\alpha\subseteq E^\alpha\cup F^\alpha$;$(E\cup F)^{\underline{\alpha}}\subseteq E^{\underline{\alpha}}\cup F^{\underline{\alpha}}$;

4)$(E\cap F)_\alpha\supseteq E_\alpha\cap F_\alpha$;$(E\cap F)_{\underline{\alpha}}\supseteq E_{\underline{\alpha}}\cap F_{\underline{\alpha}}$;

$(E\cap F)^\alpha\supseteq E^\alpha\cap F^\alpha$;$(E\cap F)^{\underline{\alpha}}\supseteq E^{\underline{\alpha}}\cap F^{\underline{\alpha}}$;

5)设 $\{\alpha_t\mid t\in T\}$ 满足 $a=\bigwedge_{t\in T}\{\alpha_t\}$,$b=\bigvee_{t\in T}\{\alpha_t\}<\bigwedge_{x\in X}\{h_E^+(x)\}$,则

$\bigcap_{t\in T}E_{\alpha_t}=E_a$;$\bigcap_{t\in T}E_{\underline{\alpha_t}}=E_{\underline{a}}$;$\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}=E_b$;$\bigcup_{t\in T}E_{\underline{\alpha_t}}=E_{\underline{b}}$;

$\bigcap_{t\in T}E^{\alpha_t}=E^a$;$\bigcap_{t\in T}E^{\underline{\alpha_t}}=E^{\underline{a}}$;$\bigcup_{t\in T}E^{\alpha_t}=E^b$;$\bigcup_{t\in T}E^{\underline{\alpha_t}}=E^{\underline{b}}$;

6)若 $\alpha<\bigwedge_{x\in X}\{h_E^+(x)\}$,则

$(E_\alpha)^C=(E^C)^{1-\alpha}$;$(E^C)_\alpha=(E^{1-\alpha})^C$;

$(E_{\underline{\alpha}})^C=(E^C)^{\underline{1-\alpha}}$;$(E^C)_{\underline{\alpha}}=(E^{\underline{1-\alpha}})^C$;

7)$E_{\underline{0}}=E_0=E^1=E$;$E_{\underline{1}}=E^0=E^{\underline{0}}=\varnothing$。

证明:易证性质 1)、2)和 7),因此此处证明略。

证明 3),即$(E\cup F)_\alpha\subseteq E_\alpha\cup F_\alpha$ 成立。

对于 $x\in X$,以下依据 α 的取值进行讨论:

①当 $\alpha>\max\{h_E^+(x),h_F^+(x)\}$ 时,$\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha\}=\{r\in h_F(x)\mid r\geqslant\alpha\}=\{r\in h_{E\cup F}(x)\mid r\geqslant\alpha\}=\varnothing$,故 $\mu_{E_\alpha}(x)=\mu_{F_\alpha}(x)=\mu_{(E\cup F)\alpha}(x)=0$,从而 $\mu_{(E\cup F)\alpha}(x)=\max\{\mu_{E_\alpha}(x),\mu_{F_\alpha}(x)\}=\mu_{E_\alpha\cup F_\alpha}(x)=0$。

②当 $\max\{h_E^+(x),h_F^+(x)\}\geqslant\alpha>\max\{h_E^-(x),h_F^-(x)\}$ 时,有 $\{r\in h_E(x)\cup h_F(x)\mid r\geqslant\alpha\}\supseteq\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha\}$ 且 $\{r\in h_E(x)\cup h_F(x)\mid r\geqslant\alpha\}\supseteq\{r\in h_F(x)\mid r\geqslant\alpha\}$,故 $\mu_{(E\cup F)_\alpha}(x)=\min\{r\in h_{E\cup F}(x)\mid r\geqslant\alpha\}=\min\{r\in h_E(x)\cup h_F$

$(x)\mid r\geqslant\max\{h_E^-(x),h_F^-(x),\alpha\}\}=\min\{r\in h_E(x)\cup h_F(x)\mid r\geqslant\alpha\}\leqslant\max\{\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha\},\min\{r\in h_F(x)\mid r\geqslant\alpha\}\}=\max\{\mu_{E_\alpha}(x),\ \mu_{F_\alpha}(x)\}=\mu_{E_\alpha\cup F_\alpha}(x)$。

③当 $\max\{h_E^-(x),h_F^-(x)\}\geqslant\alpha>\min\{h_E^-(x),h_F^-(x)\}$ 时,不妨设 $h_E^-(x)<\alpha\leqslant h_F^-(x)$,则 $\mu_{(E\cup F)_\alpha}(x)=\min\{r\in h_E(x)\cup h_F(x)\mid r\geqslant h_F^-(x)\}=h_F^-(x)$,$\mu_{E_\alpha}(x)=\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha\}\geqslant\alpha$,$\mu_{F_\alpha}(x)=\min\{r\in h_F(x)\mid r\geqslant h_F^-(x)\}=h_F^-(x)\geqslant\alpha$;故 $\mu_{(E\cup F)_\alpha}(x)=h^-{}_F(x)\leqslant\max\{\mu_{E_\alpha}(x),\mu_{F_\alpha}(x)\}=\mu_{E_\alpha\cup F_\alpha}(x)$。

④当 $\min\{h_E^-(x),h_F^-(x)\}\geqslant\alpha$ 时,也可类似证明 $\mu_{(E\cup F)_\alpha}(x)=\max\{\mu_{E_\alpha}(x),\mu_{F_\alpha}(x)\}=\mu_{E_\alpha\cup F_\alpha}(x)$。

归纳可知,$(E\cup F)_\alpha\subseteq E_\alpha\cup F_\alpha$。

用类似的方法可以得到结论 3)的其余情况和结论 4)。

⑤这里仅证明结论 5)中 $\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}=E_b$ 成立,其余情况类似证明。

$\forall x\in X,t\in T$,因为 $\bigvee_{t\in T}\{\alpha_t\}<\bigwedge_{x\in X}\{h_E^+(x)\}$,所以 $\mu_{E_{\alpha_t}}(x)=\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha_t\}$,$\mu_{E_b}(x)=\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t\}$。

设 $c=\mu_{E_b}(x)$,则 $c=\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t\}$,故 $\forall t\in T,c\geqslant\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha_t\}$,从而 $c\geqslant\bigvee_{t\in T}\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha_t\}=\mu_{\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}}(x)$,故 $E_b\supseteq\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}$。

设 $d=\mu_{\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}}(x)=\bigvee_{t\in T}\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha_t\}$,则 $\forall t\in T,d\geqslant\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha_t\}$。

若令 $r_t=\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha_t\}$,则 $\forall t\in T,d\geqslant r_t\geqslant\alpha_t$,故 $d\geqslant\bigvee_{t\in T}r_t\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t$。因为 $h_E(x)$ 是有限集,$r_t\in h_E(x)$。所以必存在 $t_0\in T$,使得 $r_{t_0}=\bigvee_{t\in T}r_t\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t$,故 $d\geqslant r_{t_0}\geqslant\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t\}$,从而 $E_b\subseteq\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}$。

因此 $\bigcup_{t\in T}E_{\alpha_t}=E_b$。

⑥这里仅证明结论 6)中 $(E_\alpha)^C=(E^C)^{1-\alpha}$ 成立,其余类似。

因为 $\alpha<\bigwedge_{x\in X}\{h_E^+(x)\}$,所以 $\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha\}\neq\varnothing$,故 $\mu_{(E_\alpha)^C}(x)=1-\mu_{E_\alpha}(x)=1-\min\{r\in h_E(x)\mid r\geqslant\alpha\}=\max\{1-r\mid r\in h_E(x),r\geqslant\alpha\}=\max\{r'\in h_{E^C}(x)\mid r'\leqslant1-\alpha\}=\mu_{(E^C)^{1-\alpha}}(x)$。

考虑到 α-上截集与 α-下截集的对称性,在下面的讨论中,只讨论 α-上截集,并称其为 E 的 α-截集。

3 犹豫模糊集的分解(表示)定理

由于 HFS 的 α-截集是 T1FS,根据 T1FS 的分解定理可得:

性质 2 设 $E\in\mathrm{HFS}(X)$,$\alpha\in[0,1]$,E 的 α-截集可分解为

$$E_\alpha=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\,(E_\alpha)_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda\,(E_\alpha)_{\underline{\lambda}}$$

其中,$(E_\alpha)_\lambda=\{x\mid\mu_{E_\alpha}(x)\geqslant\lambda\}$ 和 $(E_\alpha)_{\underline{\lambda}}=\{x\mid\mu_{E_\alpha}(x)>\lambda\}$ 均为 X 上的精确集。

定理 1 (HFS 的分解定理Ⅰ) 设 $E\in\mathrm{HFS}(X)$,则 $E=\{E_\alpha\mid\alpha\in[0,1]\}=\{\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(E_\alpha)_\lambda\mid\alpha\in[0,1]\}=\{\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda(E_\alpha)_{\underline{\lambda}}\mid\alpha\in[0,1]\}$。

这意味着,$\forall x\in X$,有 $h_E(x)=\{\mu_{E_\alpha}(x)\mid\alpha\in[0,1]\}=\{\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\cdot\chi_{(E_\alpha)_\lambda}(x)\mid\alpha\in[0,1]\}=\{\bigvee_{\lambda\in[0,1)}\lambda\cdot\chi_{(E_\alpha)_{\underline{\lambda}}}(x)\mid\alpha\in[0,1]\}$。

定理 2 (HFS 的分解定理Ⅱ) 设 $E\in\mathrm{HFS}(X)$,则 $E=\{E_{\underline{\alpha}}\mid\alpha\in[0,1)\}=\{\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda(E_{\underline{\alpha}})_{\underline{\lambda}}\mid\alpha\in[0,1)\}=\{\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(E_{\underline{\alpha}})_{\underline{\lambda}}\mid\alpha\in[0,1)\}$。

证明 定理 1 和定理 2 的证明可以由定义 9 和 T1FS 的分解定理直接得到。

例 3 在例 2 的前提下,当 $0\leqslant\alpha\leqslant0.2$ 时,有

$$\lambda\,(E_\alpha)_\lambda=\begin{cases}\{(x_1,\lambda),(x_2,\lambda)\}, & 0\leqslant\lambda\leqslant0.2\\ \{(x_1,0),(x_2,\lambda)\}, & 0.2<\lambda\leqslant0.3\\ \{(x_1,0),(x_2,0)\}, & 0.3<\lambda\leqslant1\end{cases}$$

$$\lambda\,(E_\alpha)_{\underline{\lambda}}=\begin{cases}\{(x_1,\lambda),(x_2,\lambda)\}, & 0\leqslant\lambda<0.2\\ \{(x_1,0),(x_2,\lambda)\}, & 0.2\leqslant\lambda<0.3\\ \{(x_1,0),(x_2,0)\}, & 0.3\leqslant\lambda<1\end{cases}$$

故 $\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\,(E_\alpha)_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda\,(E_\alpha)_{\underline{\lambda}}=\{(x_1,0.2),(x_2,0.3)\}=E_\alpha$。

类似地,对 α 取其余值的情况也可得到同样结论,因此 $E=\{E_\alpha\mid\alpha\in[0,1]\}$。

4 犹豫模糊集的扩展原则

Torra 等人[1]曾介绍了 HFS 的扩展原理。

定义 10[1] 令 $\Theta:[0,1]^n\to[0,1]$ 为一个函数,H 为论域 X 上的 n 个犹豫模糊集,记为 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$,则 Θ 在 H 上的扩展定义如下:

$$\forall x\in X$$

$$\Theta_H(x)=\bigcup_{r\in h_1(x)\times h_2(x)\times\cdots\times h_n(x)}\{\Theta(r)\}$$

显然这个定义仅仅是清晰集中运算的扩展,而不是一般 HFS 函数的扩展。本文依据 Zadeh 提出的 T1FS 的扩展原则,提出如下的 HFS 的扩展原则。

定义 11 (HFS 的扩展原则 I) 设 $E\in\mathrm{HFS}(X)$,$F\in\mathrm{HFS}(Y)$,若 $f:X\to Y$,则可以定义一个从 HFS(X)到 HFS(Y)的犹豫模糊函数,满足

$$h_{f(E)}:Y\to P([0,1])$$

$$y \mapsto h_{f(E)}(y)$$

设 $f^{-1}(y)=\{x\in X \mid f(x)=y\}$,则

$$h_{f(E)}(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{r(x)\mid r(x)\in h_E(x)\}, & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}$$

且 f 也可诱导一个从 HFS(Y)到 HFS(X)的犹豫模糊逆函数,满足

$$h_{f^{-1}(F)}:X\to P([0,1])$$

$$x\mapsto h_{f^{-1}(F)}(x)=\{r\in h_F(y)\mid y=f(x)\in Y\}。$$

例 4　设 $E\in$ HFS(X),$F\in$ HFS(Y),其中 $X=\{-1,1,2\}$,$Y=\{0,1,4\}$,$E=\{\langle -1,\{0.2,0.3,0.8\}\rangle,\langle 1,\{0.4,0.6\}\rangle,\langle 2,\{0.1,0.2\}\rangle\}$,$F=\{\langle 0,\{0.2,0.6\}\rangle,\langle 1,\{0.3,0.4\}\rangle,\langle 4,\{0.7\}\rangle\}$,令 $f:X\to Y$,$x\mapsto f(x)=x^2$,则由定义 11 知 $f(E)=\{\langle 0,\{0\}\rangle,\langle 1,\{0.4,0.6,0.8\}\rangle,\langle 4,\{0.1,0.2\}\rangle\}$,$f^{-1}(F)=\{\langle -1,\{0.3,0.4\}\rangle,\langle 1,\{0.3,0.4\}\rangle,\langle 2,\{0.7\}\rangle\}$ 均为犹豫模糊集。

性质 3　设 $f:X\to Y$,$E,G\in$ HFS(X),$T,H\in$ HFS(Y),则 $\forall\alpha\in[0,1]$,有

1) $f(E)_\alpha\subseteq f(E_\alpha)$,$f(E)_{\underline{\alpha}}\subseteq f(E_{\underline{\alpha}})$;

2) $f^{-1}(F)_\alpha=f^{-1}(F_\alpha)$,$f^{-1}(F)_{\underline{\alpha}}=f^{-1}(F_{\underline{\alpha}})$;

3) $f(E\cup G)_\alpha\subseteq f(E)_\alpha\cup f(G)_\alpha$,

$f^{-1}(F\cap H)_\alpha\supseteq f^{-1}(F)_\alpha\cap f^{-1}(H)_\alpha$;

4) $f(E_\alpha)^C\subseteq f(E_\alpha^C)$,$f^{-1}(F_\alpha^C)=f^{-1}(F)_\alpha^C$。

证明　1) $\forall y\in Y$,若 $f^{-1}(y)=\varnothing$,则 $h_{f(E)}(y)=0$。从而 $\forall\alpha\in[0,1]$,有 $\mu_{f(E_\alpha)}(y)=\mu_{f(E)_\alpha}(y)=0$。若 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$,则分成以下两种情形讨论:

①当 $\{r\in h_{f(E)}(y)\mid r\geqslant\alpha\}=\varnothing$ 时,$\mu_{f(E)_\alpha}(y)=0$。也就是说,$\forall x\in f^{-1}(y)$,若 $r(x)\in h_E(x)$,则 $r(x)<\alpha$,即 $\mu_{E_\alpha}(x)=0$。故 $\mu_{f(E_\alpha)}(y)=\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\mu_{E_\alpha}(x)=0=\mu_{f(E)_\alpha}(y)$。

②当 $\{r\in h_{f(E)}(y)\mid r\geqslant\alpha\}\neq\varnothing$ 时,$\mu_{f(E)_\alpha}(y)=\min\{r'\in h_{f(E)}(y)\mid r'\geqslant\alpha\}=\min\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{r(x)\mid r(x)\in h_E(x)\wedge r(x)\geqslant a\}$。且 $\mu_{f(E_\alpha)}(y)=\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_{E_\alpha}(x)\}=\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\min\{r(x)\mid r(x)\in h_E(x)\wedge r(x)\geqslant a\}$。

由性质 1 的结论 3)得,$\mu_{f(E)_\alpha}(y)\leqslant\mu_{f(E_\alpha)}(y)\Rightarrow f(E)_\alpha\subseteq f(E_\alpha)$。

2)对于 $\forall x\in X$,分以下分两种情况讨论:

①当 $\mu_{f^{-1}(F)_\alpha}(x)=0$ 时,$f^{-1}(F)_\alpha=\varnothing$。说明 $\forall r\in h_{f^{-1}(F)}(x)$,$r<\alpha$。考虑到 $r\in h_F(y)$,这里 $y=f(x)$,因此 $\mu_{F_\alpha}(y)=0\Rightarrow\mu_{f^{-1}(F_\alpha)}(x)=0$。故 $\mu_{f^{-1}(F)_\alpha}(x)=\mu_{f^{-1}(F_\alpha)}(x)$。

②当 $\mu_{f^{-1}(F)_\alpha}(x)\neq 0$ 时,$\mu_{f^{-1}(F)_\alpha}(x)=\min\{r\in h_{f^{-1}(F)}(x)\mid r\geqslant\alpha\}=\min\{r\in h_F(y)\mid y=f(x),r\geqslant\alpha\}=\mu_{F_\alpha}(y)$,这里 $y=f(x)$,且 $\mu_{f^{-1}(F_\alpha)}(x)=\mu_{F_\alpha}(y)$。故 $\mu_{f^{-1}(F)_\alpha}(x)=\mu_{f^{-1}(F_\alpha)}(x)$,即 $f^{-1}(F)_\alpha=f^{-1}(F_\alpha)$。

③ $f(E\cup G)_\alpha\subseteq f((E\cup G)_\alpha)\subseteq f(E_\alpha\cup G_\alpha)=f(E_\alpha)\cup f(G_\alpha)\subseteq f(E)_\alpha\cup f(G)_\alpha$;

$f^{-1}(F\cap H)_\alpha=f^{-1}((F\cap H)_\alpha)\supseteq f^{-1}(F_\alpha\cap H_\alpha)=f^{-1}(F_\alpha)\cap f^{-1}(H_\alpha)=f^{-1}(F)_\alpha\cap f^{-1}(H)_\alpha$。

④因为 $\mu_{f(E_\alpha)^C}(y)=1-\mu_{f(E_\alpha)}(y)=1-\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_{E_\alpha}(x)\}=\bigwedge\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{1-\mu_{E_\alpha}(x)\}$,$\mu_{f(E_\alpha^C)}(y)=\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_{E_\alpha^C}(x)\}=\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{1-\mu_{E_\alpha}(x)\}$,所以 $\mu_{f(E_\alpha)^C}(y)\leqslant\mu_{f(E_\alpha^C)}(y)\Rightarrow f(E_\alpha)^C\subseteq f(E_\alpha^C)$。

另由 T1FS 的性质和性质 3 的结论 2 可知,$f^{-1}(F_\alpha^C)=(f^{-1}(F_\alpha))^C=f^{-1}(F)_\alpha^C$。

进一步,此函数也可拓展到多元函数情形。

定义 12　(HFS 的扩展原则Ⅱ) 设 $E_i\in$ HFS(X_i),($i=1,2,\cdots,n$),$F\in$ HFS(Y),若 $f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$,则可推导出一个从 HFS($X_1$)×HFS($X_2$)×⋯×HFS($X_n$)到 HFS($Y$)的犹豫模糊函数,满足:

$\forall(E_1,E_2,\cdots,E_n)\in$ HFS(X_1)×HFS(X_2)×⋯×HFS(X_n)

$$h_{f(E_1,E_2,\cdots,E_n)}:Y\to P([0,1])$$

$$y\mapsto h_{f(E_1,E_2,\cdots,E_n)}(y)$$

设 $f^{-1}(y)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y,x_i\in X_i,i=1,2,\cdots,n\}$,则当 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$ 时

$$h_{f(E_1,E_2,\cdots,E_n)}(y)=\{\bigvee\limits_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in f^{-1}(y)}\{\bigwedge_{i=1}^{n}r_i(x_i)\mid r_i(x_i)\in h_{E_i}(x_i),\ i=1,2,\cdots,n\}\}$$

当 $f^{-1}(y)=\varnothing$ 时,$h_{f(E)}(y)=0$。

扩展原则Ⅱ不仅适用于函数,也适用于关系运算。当考虑关系运算时,它与定义 10 是一致的。

5　应用实例

5.1　HFS 的 α-截集在多属性决策中的应用

犹豫模糊多属性决策问题中需要考虑方案的综合属性的集结与排序问题,这需要对犹豫模糊数进行相似性度量和比较。由于犹豫模糊数本身就较复杂,从而导致整个决策算法较复杂且效率不高。通过截集的方法可以使犹豫模糊集转换成Ⅰ型模糊集,从而在数据预处理时就能降低算法复杂度。且由于阈值 α 的可变性,使得聚类结果能更加灵活地符合实际需求。

定义 13　设 $E\in$ HFS(X),$\alpha\in[0,1]$,$x,y\in X$,定义 $E_\alpha(x)>E_\alpha(y)$ 的可能度 $P(E_\alpha(x)>E_\alpha(y))$ 满足

1) 当 $\mu_{E_\alpha}(x)>\mu_{E_\alpha}(y)$ 且 $h_E^+(x)\geqslant h_E^+(y)$,或

$\mu_{E_\alpha}(x)=\mu_{E_\alpha}(y)$ 且 $h_E^+(x)>h_E^+(y)$ 时，则 $P(E_\alpha(x)>E_\alpha(y))=1$；

2）当 $\mu_{E_\alpha}(x)<\mu_{E_\alpha}(y)$ 且 $h_E^+(x)\leqslant h_E^+(y)$，或 $\mu_{E_\alpha}(x)=\mu_{E_\alpha}(y)$ 且 $h_E^+(x)<h_E^+(y)$ 时，则 $P(E_\alpha(x)>E_\alpha(y))=0$；

3）除以上两种情况外，$P(E_\alpha(x)>E_\alpha(y))=\dfrac{1}{2}$。

显然，$P(E_\alpha(x)>E_\alpha(y))$ 满足下列性质：

$$P(E_\alpha(x)>E_\alpha(y))+P(E_\alpha(y)>E_\alpha(x))=1。$$

以下为采用文献[36]所举的例子。

例 5　设某一投资公司可对 5 个能源项目 x_i $(i=1,2,\cdots,5)$ 进行投资，几位专家分别按照 4 个评价指标（属性）来进行评估，这 4 个指标包括技术（E_1）、环境（E_2）、社会政策（E_3）和经济状况（E_4），各指标的权重向量为 $\omega=(0.15,0.3,0.2,0.35)$。已知专家的评估结果用下列犹豫模糊决策矩阵表示，如表 1 所示.

表 1　投资评估结果

Table 1　Evaluation results of investment

X	E_1	E_2	E_3	E_4
x_1	{0.5,0.4,0.3}	{0.9,0.8,0.7,0.1}	{0.5,0.4,0.2}	{0.9,0.6,0.5,0.3
x_2	{0.5,0.3}	{0.9,0.7,0.6,0.5,0.2}	{0.8,0.6,0.5,0.1}	{0.7,0.5,0.4}
x_3	{0.7,0.6}	{0.9,0.6}	{0.7,0.5,0.3}	{0.6,0.4}
x_4	{0.8,0.7,0.4,0.3}	{0.7,0.4,0.2}	{0.8,0.1}	{0.9,0.8,0.6}
x_5	{0.9,0.7,0.6,0.3,0.1}	{0.8,0.7,0.6,0.4}	{0.9,0.8,0.7}	{0.9,0.7,0.6,0.3}

具体算法如下：

1）给定 $\alpha\in[0,1]$，任意 $x\in X$，计算

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{4}\omega_k\mu_{E_{k\alpha}}(x),\ h_E^+(x)=\sum_{k=1}^{4}\omega_k h_{E_k}^+(x)。$$

2）根据定义 13，令 $p_{ij}=P(E_\alpha(x_i)>E_\alpha(x_j))$，得到可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{5\times5}$。

3）令 $p_i=\sum_{j=1}^{5}p_{ij}$ 得每个项目的可能值，则可按照 p_i 从大到小顺序来决定方案。

本例所得 p_i 大小如表 2 所示，从该表中不难发现，随着 α 取值不同，p_i 的大小顺序并不完全一致。但总体来看 x_5 的评分都是最高的，所以我们可以认定选择项目 x_5 进行投资。这结果与文献[36]是一致的。同时由于 α 的取值可以根据需要进行改变，从而可以更加灵活地进行决策。

表 2　p_i 的可能值

Table 2　The possible value p_i

α	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	2.5	1	1	4	4
0.6	1.5	1.5	1.5	4	4
0.7	2.5	2.5	0.5	3.5	4.5
0.8	2.5	1.5	0.5	3.5	4.5
0.9	3	1.5	0.5	3	4.5

5.2　HFS 的 α-截集在聚类分析中的应用

Chen[18] 和 Liao[37] 都曾讨论过犹豫模糊环境下的聚类算法，他们的算法都是需要先通过某种犹豫模糊数的相似测度度量构建相关矩阵，从而进行聚类。本文采取的原理是通过截集将 HFS 转换成 T1FS，将犹豫模糊数聚类问题转换成经典模糊数聚类问题，从而使问题解决变得简单。

例 6　上市公司的经营绩效是公司金融领域的研究热点。例如，研究农业类上市公司的经营绩效，可通过考察其盈利能力（A_1）、偿债能力（A_2）、营运能力（A_3）、成长能力（A_4）和股本扩张能力（A_5）等[38]情况获得。本例中基于这 5 个指标对国内十家农业类上市公司 $x_i(i=1,2,\cdots,10)$ 的经营绩效进行聚类分析。不同专家对这些公司关于这 5 个指标的考核也有不同的评价。现对他们的评价值采用犹豫模糊集的形式给出，如表 3。

表 3　经营绩效评估结果

Table 3　Evaluation results of business performance

X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x_1	{0.4,0.6}	{0.6,0.8}	{0.2,0.3}	{0.3,0.4}	{0.6,0.7,0.9}
x_2	{0.3,0.4,0.5}	{0.4,0.5}	{0.8}	{0.5}	{0.2,0.3}
x_3	{0.5,0.7}	{0.9}	{0.3,0.4}	{0.3}	{0.8,0.9}
x_4	{0.4,0.5,0.6}	{0.2,0.3}	{0.9,1}	{0.5}	{0.3,0.4,0.5}
x_5	{0.9,1}	{0.7,0.8}	{0.4,0.5}	{0.5,0.6}	{0.7}
x_6	{0.8,1}	{0.8,1}	{0.4,0.6}	{0.8}	{0.7,0.8}
x_7	{0.3,0.4,0.5}	{0.8,0.9}	{0.7,0.9}	{0.1,0.2}	{0.9,1}
x_8	{0.6}	{0.7,0.9}	{0.8}	{0.3,0.4}	{0.4,0.7}
x_9	{0.9}	{0.6,0.7}	{0.5,0.8}	{1}	{0.7,0.8,0.9}
x_{10}	{0.4,0.6}	{1}	{0.6,0.7}	{0.2,0.3}	{0.9,1}

具体算法如下:

1)给定 $\alpha \in [0,1]$,则可得到第 i 个公司关于第 k 个指标在阈值 α 上的隶属度,即 $\mu_{E_{k_\alpha}}(x_i)$。

2)采用最大最小法建立不同公司间的模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{10\times 10}$,其中

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{5}\min\{\mu_{E_{k_\alpha}}(x_i),\mu_{E_{k_\alpha}}(x_j)\}}{\sum_{k=1}^{5}\max\{\mu_{E_{k_\alpha}}(x_i),\mu_{E_{k_\alpha}}(x_j)\}},\quad i,j=1,2,\cdots,10。$$

3)求出 $\boldsymbol{R}$ 的闭包,即模糊等价矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$。

4)从大到小取不同阈值 $\lambda \in [0,1]$,利用模糊等价矩阵的截矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda$ 进行聚类。

表 4 给出了本例聚类结果。

表 4 聚类结果

Table 4 Clustering results

水平阈值	聚类情况
$\alpha=0.8,\lambda=1$	$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}$
$\alpha=0.8,\lambda=0.8$	$\{x_1,x_3,x_{10}\},\{x_2,_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\}$
$\alpha=0.8,\lambda=0.6$	$\{x_1,x_3,x_7,x_{10}\},\{x_2,x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_8\},\{x_9\}$
$\alpha=0.5,\lambda=0.6$	$\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\},\{x_2,x_4\}$
$\alpha=0.4,\lambda=0.6$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$

由表 4 可以看出,若国内 10 家农业类上市公司分为 2 组,则 x_1、x_3、x_5、x_6、x_7、x_8、x_9、x_{10} 这 8 家上市公司的经营绩效略高于 x_2、x_4 两家上市公司的经营绩效;若国内 10 家农业类上市公司分为 6 组,则经营绩效按照 x_1、x_3、x_7、x_{10} 四家上市公司,x_2、x_4 两家上市公司,及 x_5、x_6、x_8、x_9 依次降低。总体来看,在所有国内 10 家农业类上市公司中,x_1、x_3、x_{10} 的经营绩效能力最高,3 家上市公司的能力基本一致。

6 结束语

本文通过分析经典犹豫模糊集与离散区间Ⅱ型模糊集之间的关系,提出了犹豫模糊集的 α-截集的概念,并讨论其性质及应用。利用这种截集将经典犹豫模糊集分解成若干个Ⅰ型模糊集,并将此概念应用于犹豫模糊集的分解(表现)定理和两个更一般的扩展原则。这极大地丰富了犹豫模糊集的基本理论。同时,我们也举例说明了该截集方法在多属性决策和聚类分析中的应用。今后我们将继续将该截集的方法推广至其他扩展的犹豫模糊集理论中,以便解决更多的实际应用问题。

参考文献:

[1] TORRA V, NARUKAWA Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]//The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Jeju Island, Korea, 2009: 1378-1382.

[2] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International journal of intelligent systems, 2010, 25(6): 529-539.

[3] LI D Q, ZENG W Y, LI J H. New distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets and their applications in multiple criteria decision making [J]. Engineering applications of artificial intelligence, 2015, 40: 11-16.

[4] XU Z S, XIA M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[5] XU Z S, XIA M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information [J]. International journal of intelligent systems, 2011, 26(5): 410-425.

[6] XU Z S, XIA M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multi-attribute decision making [J]. International journal of intelligent systems, 2012, 27(9): 799-822.

[7] ZHU B, XU Z S, XIA M M. Dual hesitant fuzzy sets[J]. Journal of applied mathematics, 2012(11): 1-13.

[8] CHEN N, XU Z S, XIA M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge-based systems, 2013, 37(2): 528-540.

[9] QIAN G, WANG H, FENG X Q. Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system[J]. Knowledge-based systems, 2013, 37(4): 357-365.

[10] YU D J. Triangular hesitant fuzzy set and its application to teaching quality evaluation[J]. International journal of information and computer science, 2013, 10(7): 1925-1934.

[11] RODRIGUEZ R M, MARTINEZ L, HERRERA F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2012, 20(1): 109-119.

[12] CHEN N, XU Z S. Properties of interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Journal of intelligent and fuzzy systems, 2014, 27(1): 143-158.

[13] HE Y, WANG G, CHEN H. Hesitant fuzzy power Bonferroni means and their application to multiple attribute decision making[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2015, 23(5): 1655-1668.

[14] LIAO H C, XU Z S, ZENG X J. Hesitant fuzzy linguistic VIKOR method and its application in qualitative multiple criteria decision making[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2015, 23(5): 1343-1355.

[15] XIA M M, XU Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International journal of approximate

reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[16] XIA M M, XU Z S, CHEN N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making[J]. Group decision negotiation, 2013, 22(2): 259-279.

[17] YU D J, WU Y Y, ZHOU W. Generalized hesitant fuzzy Bonferroni mean and its application in multi-criteria group decision making[J]. International journal of information and computer science, 2012, 9(2): 267-274.

[18] CHEN N, XU Z S, XIA M M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied mathematical modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.

[19] FARHADINIA B. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Information sciences, 2013, 240(10): 129-144.

[20] Zadeh L A . Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338-353.

[21] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy sets and systems—theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[22] 罗承忠.模糊集引论[M].北京:北京师范大学出版社,1989.

[23] KLIR G, YUAN B. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications[M]. New Jersey: Prentice-hall, Upper Saddle River, 1995.

[24] NGUYEN H T. A note on the extension principle of fuzzy sets[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 1978, 64(2): 369-380.

[25] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[26] MENDEL J M, JOHN R I B. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2002, 10(2): 117-127.

[27] BEDREGAL B, REISER R, BUSTINCE H, et al. Aggregation functions for typical hesitant fuzzy elements and the action of automorphisms[J]. Information sciences, 2014, 255(1): 82-99.

[28] LIU F L. An efficient centroid type-reduction strategy for general type-2 fuzzy logic system[J]. Information sciences, 2008, 178(9): 2224-2236.

[29] MENDEL J M, LIU F L, ZHAI D Y. α-plane representation for type-2 fuzzy sets: theory and applications[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2009, 17(5): 1189-1207.

[30] HAMRAWI H, COUPLAND S, JOHN R. A novel alpha-cut representation for type-2 fuzzy sets[C]//IEEE international conference on fuzzy systems. barcelona, spain, 2010: 18-25.

[31] HAMRAWI H. Type-2 fuzzy alpha-cuts[D]. Leicester: De Montfort University, 2011.

[32] YUAN X H, LI H X. Cut sets on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[C]//2009 Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Tianjin, China, 2009: 167-171.

[33] YUAN X H, LI H X, SUN K B. The cut sets, decomposition theorems and representation theorems on intuitionistic fuzzy sets and interval valued fuzzy sets[J]. Science china information sciences, 2011, 54(1):91-110.

[34] YUAN X H, LI H X, ZHANG C. The theory of intuitionistic fuzzy sets based on the intuitionistic fuzzy special sets[J]. Information sciences, 2014, 277:284-298.

[35] SHANG Y G, YUAN X H, LEE E S. The n-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on the finite valued fuzzy sets[J]. Computers and mathematics with applications, 2010, 60(3): 442-463.

[36] 周小强. 软集与犹豫模糊集理论及其在决策中的应用[D]. 长沙:湖南大学,2014.
ZHOU Xiaoqiang. Soft set and hesitant fuzzy set with their application in decision making[D]. Changsha: Hunan University, 2014.

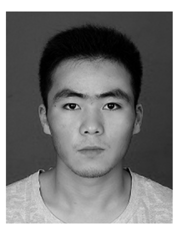
[37] LIAO H C,XU Z S,ZENG X J. Novel correlation coefficients between hesitant fuzzy sets and their application in decision making[J]. Knowledge-based systems, 2015, 82: 115-127.

[38] 邓斌,孙建敏. 我国粮油上市公司经营绩效综合评价——基于因子分析和聚类分析[J]. 技术经济,2013, 32(2): 77-84.
DENG Bin, SUN Jianmin. Comprehensive evaluation on operating performance of cereal and oil listed company in China: based on factor analysis and cluster analysis[J]. Technology economics, 2013, 32(2): 77-84.

作者简介:

郑婷婷,女,1978 年生,副教授,博士,主要研究方向为粗糙集、模糊集和粒计算理论。主持安徽省自然科学基金 1 项,近年来发表学术论文 20 余篇。

桑小双,女,1990 年生,硕士研究生,主要研究方向为模糊集、机器学习。



马斌斌,男,1992 年生,硕士研究生,主要研究方向为粗糙集、机器学习。