DOI:10.11992/tis.201604020
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20170626.1739.006.html

赵森烽-克勤概率的赌本分配研究与期望值定理

赵克勤[1,2],赵森烽[1]
(1.诸暨市联系数学研究所,浙江 诸暨 311811; 2. 浙江大学 非传统安全与和平发展研究中心,浙江 杭州 310058)

摘　要:针对概率论发展史上合理分配赌本问题,把赵森烽-克勤概率用于合理分配赌本需要的最少赌博次数研究,结果发现,该问题中基于经典概率得出的数学期望不会在实际中出现,实际中出现的是基于赵森烽-克勤概率的“数学期望”的两个极端值。利用赵森烽-克勤概率能客观地反映出给定规则下最少赌博次数与最多赌博次数时的赌博结果,同时刻画出赌博输赢的经典期望值和实际值,从而为有针对性地制定或修改赌博策略和合理地分配赌本提供依据,在此基础上给出期望值不确定定理。文中以机器人服务收费为例说明该定理的现实意义。

关键词:赌本分配;数学期望;赵森烽-克勤概率(联系概率);不确定性; 期望值定理
中图分类号:TP18　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-4785(2017)05-0608-08

中文引用格式:赵克勤,赵森烽.赵森烽-克勤概率的赌本分配研究与期望值定理[J]. 智能系统学报, 2017, 12(5): 608-615.
英文引用格式:ZHAO Keqin, ZHAO Senfeng. Distribution of gambling capital and expectation value theorem for Zhao Senfeng-Keqin probability [J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2017, 12(5): 608-615.

Distribution of gambling capital and expectation value theorem for Zhao Senfeng-Keqin probability

ZHAO Keqin[1,2], ZHAO Senfeng[1]
(1. Zhuji Institute of Connection Mathematics, Zhuji 311811, China; 2.Center for Non-traditional Security and Peaceful Development Studies, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: With respect to the reasonable distribution of gambling capital in the developmental history of probability theory, Zhao Senfeng-Keqin probability has been used to investigate the minimum number of gambling times necessary for the rational allocation of the minimum amount of gambling capital. Results have shown that the mathematical expectation for this problem, based on classical probability, failed to occur in practice. What appeared instead are two extreme values of “mathematical expectation” based on the Zhao Senfeng-Keqin probability, which can objectively reflect the gambling results within the smallest and largest number of gambling times for a given rule. In addition, it describes both the classic expectation value and the actual value, thereby providing a basis for formulating or amending specific gambling tactics and the reasonable allocation of gambling capital. The result is an uncertainty theorem for the expectation value. In this paper, we illustrate the practical significance of this theorem by giving an example of service charging on a robot.

Keywords: distribution of gambling capital; mathematical expectation; Zhao Senfeng-Keqin probability (contact probability); uncertainty; expectation value theorem

文献[1-3]在集对分析(set pair analysis,SPA)理论指导下设计和分析了一系列新的随机试验[4-6],先后借助“白球+黑球”随机试验,向指定区域随机投针试验、掷分币与掷骰子随机试验,说明随机性是事物相互联系的一个属性,随机事件成对存在。在此基础上定义了把主事件发生的概率与伴随事件发生的概率写成联系数形式的联系概率(connection probability, CP)(也称“赵森烽-克勤概率”(Zhao Senfeng Keqin probability, ZKP));论证

收稿日期:2016-04-18.　**网络出版日期**:2017-06-26.
基金项目:国家社科基金重大项目(12&ZD099).
通信作者:赵克勤. E-mail:spacnm@163.com.

了无论是古典概型概率(classical probability, CP),几何概型概率(geometric probability, GP),还是频率型概率(frequency probability, FP)都可以转化为赵森烽-克勤概率(ZKP),从而为概率理论的创新研究提供了一个新的起点。文献[7]将赵森烽-克勤概率(ZKP)应用到风险决策研究得到了新的风险决策模型,文献[8]在前述工作基础上把贝叶斯概率联系数化,得到基于贝叶斯概型的赵森烽-克勤概率,探讨了赵森烽-克勤概率与“智脑”的关系。

由于如何合理分配赌本问题在概率论的形成和发展过程中起着非常重要作用,同时也有着广泛和重要的应用背景,特别是涉及基于赵森烽-克勤概率数学期望的现实性与必要性认识和期望值不确定定理,等等,本文特予专题讨论。

1　如何合理分配赌本

1.1　问题描述

现有概率论著作对如何合理分配赌本问题的描述有不同版本[9-12]。文献[12]对该问题的描述如下。1654 年,法国有个叫 De Mere 的赌徒向法国数学家帕斯卡提出如下的分赌本问题:甲、乙两位赌徒事先约定,用掷硬币的方式进行赌博,谁先赢 3 次就得到全部赌本 100 法郎,当甲赢了 2 次,乙只赢 1 次时,他们不愿意赌下去,问赌本应该如何分配?

1.2　帕斯卡解法

这个问题在当时引起不少人兴趣。有人建议按已赢次数的比例分赌本,即甲得全部赌本的 2/3,乙得赌本的 1/3。但有人提出异议,认为这完全没有考虑两个人再赌下去每人赢的可能性问题,因为这样不符合两人事先约定的规则,那么还要再赌几次才能解决这个问题?法国数学家帕斯卡研究后得出的结论是:在甲赢得 2 次,乙只赢 1 次的条件下,最多只需要再玩 2 次可以结束这场赌博游戏;再玩 2 次可能出现的结果有以下 4 种(见表 1)。

表 1　游戏结果

Table 1　The result of game

W_1	W_2	W_3	W_4
甲胜 甲胜	甲胜 乙胜	乙胜 甲胜	乙胜 乙胜

其中前 3 种结果(W_1, W_2, W_3)时甲赢得 100 法郎,只有当 W_4 发生时,甲得 0 法郎(即乙得 100 法郎),由于这 4 种结果是等可能的,因此在甲赢得 2 次,乙只赢 1 次的条件下,再赌下去甲得赌金 X 是一个随机变量,其分布列见表 2。

表 2　分布列

Table 2　The　distribution column

X(甲)	100	0
P	3/4	1/4

所以,甲期望得到的赌金为 $\mathrm{E}(x) = 100 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 75$ 法郎,而乙赢的期望赌金为 $\mathrm{E}(\bar{x}) = 100 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 25$ 法郎。

1.3　惠更斯解法

对于以上分赌本问题的帕斯卡解法,惠更斯在 1657 年的《赌博中的计算》一文中进一步提出一般解法,如果在 $u+v$ 个等可能场合中某人有 u 种可能赢得 a,有 v 种可能赢得 b,则该人在 $u+v$ 次赌博中可以赢得 $ua+vb$,而每次平均可赢得

$$\frac{ua+vb}{u+v} = ap + b(1-p) \tag{1}$$

式中:$p = \frac{u}{u+v}$,$ap + b(1-p)$ 就是该人应得到的数学期望。若设 $\mu = 3, v = 1, a = 100, b = 0$ 就得到帕斯卡法。若设 X 是某人的赢钱数,按赢得全部赌本的结果看,X 的概率分布见表 3。

表 3　X 的概率分布

Table 3　Probability distribution of X

X	a
P	p

该人赢得的数学期望为

$$\mathrm{E}(X) = ap + b(1-p) = \frac{ua+vb}{u+v} \tag{2}$$

称(2)式为分赌本问题的一般解法,也称惠更斯解法。

分赌本问题的现实意义可以推广为合伙投资办厂、合作科研开发新产品等情况下的收益分配问题,例如,由甲、乙两人合资经营一个公司,一段时间后,甲乙两人都改为单独经营公司或因其他原因

终止合作，应该如何分配经营成果（如何分摊债务）？

2 赵森烽-克勤概率（联系概率）在分赌本中的应用

2.1 赵森烽-克勤概率

赵森烽-克勤概率（联系概率）是我们在文献［1-3］中提出的一种新概率，其数学形式为

$$P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i \tag{3}$$

式中：A 为主事件（也称第一关注事件），$\bar{A}$ 为 A 的伴随事件，当 A 与 $\bar{A}$ 为互不相容事件，即 $A \cap \bar{A} = \varnothing$ 时，$\bar{A}$ 也称为相对于 A 的负事件；$P(A)$ 为 A 发生的大数概率，简称概率；$P(\bar{A})$ 为 $\bar{A}$ 发生的大数概率，也称为 A 的即或不发生概率，简称即或概率；$P(A,\bar{A})$ 称为赵森烽-克勤概率（联系概率），直观上说是关于事件 A 和事件 $\bar{A}$ 发生的联系概率，i 为事件 A 发生与事件 $\bar{A}$ 发生的随机转换器，这里在［$-\infty$，1］取值。当仅从主事件 A 角度理解式（3）时，式（3）改写成

$$P_c(A) = P(A) + P(\bar{A})i \tag{4}$$

式中的下标 c 是“联系”（contact）的意思，这时的 $P(\bar{A})$ 就是 A 不发生的概率。

由于 A 与 $\bar{A}$ 为互不相容的对立事件，所以，在式（3）、（4）中有

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \tag{5}$$

据此有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{6}$$

当已知 $P(A)$ 时，可利用式（6）解出 $P(\bar{A})$，从而得到式（4）或式（3）。

2.2 基于赵森烽-克勤概率的分赌本分析

首先，取“甲赢”为主事件 A，把“甲输”作为 A 的伴随事件 $\bar{A}$，根据上一节中的赵森烽-克勤概率（联系概率）和概率补数定理[10]，可由表 2 知甲得赌金 X 的分布列（见表 4）。

表 4 基于赵森烽-克勤概率的甲得赌金 X 的分布列

Table 4 A get a sweepstakes column of X distribution based on the Zhao senfeng-Keqin probability

x	100	0
$P_c(A)$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$

由表 4 算得甲期望得到的赌金为

$$\mathrm{E}(X) = 100 \times (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i) + 0 \times (\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i) = 75 + 25i$$

于是，问题转化成 $75+25i$ 中的 i 应当取何值的问题。结合题意和 i 在一般情况下的取值域［-1，1］，得

当 $i=1$ 时，甲赢得赌本 100 法郎；

当 $i=-1$ 时，甲赢得赌本 50 法郎；

当 $i=0$ 时，甲赢得赌本 75 法朗，这是第 1 节中帕斯卡法的结果。

现在要问，在已玩 3 次基础上最多再玩 2 次情况下甲有可能赢得 100 法郎或 50 法郎吗？

我们注意到，帕斯卡在解决合理分配赌本问题时，是以最多只要再玩 2 次（共玩 5 次）就可以按约定的赌本规则结束这场赌博游戏来考虑这个问题的。这种考虑，自然地隐含着最少再玩 1 次（共玩 4 次）也有可能按约定的赌博规则结束这场赌博这样一个问题。为此先来讨论再玩 1 次的情况，当甲已赢 2 次，乙只赢 1 次基础上再玩 1 次，只有 2 种结果：

当 W_1 出现时，甲共赢了 3 次，这时甲得 100 法郎；当 W_2 出现时，甲、乙各赢 2 次，这时如果终止赌博，甲只能得 50 法郎，也就是不存在甲得 75 法郎这种情况（表 5）。

表 5 2 种结果

Table 5 Two kinds of result

W_1	W_2
甲胜	乙胜

由此可见，$i=1$ 和 $i=-1$ 所对应的联系概率 $(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i)$ 的值为 1 和 0.5，原来是甲、乙玩第 4 次时，（至少再玩 1 次时）甲可能得到的 2 种结果；也就是说，$i=1$ 和 $i=-1$ 这两种情况在这里不仅仅有数学上的意义（i 在一般情况下取区间［-1，1］的上下界值），还有实际意义（对应实际可能出现的情况）。

特别地，当玩第 4 次时出现甲、乙各赢 2 次的局面时，甲、乙都明白，再玩 1 次（第 5 次时），要么是甲赢（共赢 3 次），这时甲得 100 法郎，乙得 0；要么是乙赢（共赢 3 次），这时乙得 100 法郎，甲得 0。因

此,如果甲、乙两人都不愿冒风险时,将选择放弃再玩一次而终止赌博(共 4 次)。因此,从逻辑上说,在已玩 3 次基础上最多再玩 2 次确实可按约定的规则结束赌博。但从实际出发,也有可能在已玩 3 次基础上再玩 1 次(共 4 次)就能按约定的规则结束赌博;也可以双方协商修改规则后结束赌博,但这种情况不在本问题讨论范围内。因此结论是:无论何种情况,甲都不可能得到 75 法郎。

以上分析结果表明:甲得期望赌本 75 法郎仅仅是一个经典概率意义上的一个理论计算值,并不具有实际上可能出现的意义;具有实际出现意义的是 50 法郎或 100 法郎;甲在共玩 3 次已经赢 2 次的条件下,继续玩 1 次时(第 4 次),可能因共赢了 3 次得 100 法郎而按规则结束赌博,也可能因输给乙而面临再玩 1 次(第 5 次)得 0 法郎的风险。

由于当 $75+25i$ 中的 $i=0$ 时,$75+25i=75$,恰好是帕斯卡解法时甲得期望赌本,所以 $75+25i$ 是一个既含有经典期望值,又含有实际出现值的解集联系数。

由此可见,以上讨论的问题,表面上看是一个如何分赌本的问题,而其背后还隐藏着如何理解经典数学期望含义和如何定义新的数学期望以及如何计算新的数学期望等问题,为此,本文在下面将给出基于赵森烽-克勤概率的数学期望定义和计算方法,并把其与经典概率期望进行比较,讨论这种新的数学期望性质,举例说明其在实际问题中的应用。

3　基于赵森烽-克勤概率的数学期望

3.1　数学期望

数学期望是概率论中一个极为重要的概念,文献[10]中已指出数学期望的本质是一种“均值”,因此被称为“均值”更形象易懂,并分别从算术平均与加权平均 2 种情况说明如下。

1)算术平均

如果有 n 个数,即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,那么把这 n 个数相加后得到的和除 n,就是这 n 个数的算术平均。记算术平均为 $\bar{X}$,则有

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} xk, k = 1,2,\cdots,n \tag{7}$$

2)加权平均

如果这 n 个数中有相同的数,不妨设其有 nt 个取值为 $xt(t = 1,2,\cdots,k)$,并将其列成表(见表 6)。

表 6　X_t 的频率

Table 6　Frequency of X_t

取值	X_1	X_2	$\cdots$	X_k
频数	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
频率	n_1/n	n_2/n	$\cdots$	nk/n

这时,这 n 个数的“均值”为

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k} n_t X_t = \sum_{t=1}^{k}\frac{n_t}{n}X_t,\quad t = 1,2,\cdots,k \tag{8}$$

显然,式(8)中的这个加权平均的权数 $\frac{n_t}{n}$ 就是数 x_t 的频率,而频率在 n 很大时就稳定在其概率附近。

由此得到经典的数学期望定义如下。

定义 1　设离散随机变量 X 的分布列为

$$p(X_t) = P(X = X_t), t = 1,2,\cdots,n,\cdots$$

如果 $\sum_{t=1}^{\infty} |X_t| P(X_t) < \infty$,则称

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{t=1}^{\infty} X_t P(X_t) \tag{9}$$

为随机变量 X 的数学期望,或称为随机变量 X 对于给定分布的数学期望,简称期望或者均值,若级数 $\sum_{t=1}^{\infty} |X_t| P(X_t)$ 不收敛,则称 X 的数学期望不存在。

式(9)是基于随机变量是离散型的数学期望定义。类似地,可得随机变量是连续型时的数学期望定义,只要将式(9)中的分布列 $P(X_t)$ 改为密度函数 $P(X)$,同时把求和号改为求积号,为此有以下的定义 2。

定义 2　设连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$,如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)\,\mathrm{d}x < \infty \tag{10}$$

则称

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

为随机变量 X 的数学期望,或称为分布 $P(X)$ 的数学期望,简称期望或者均值,若 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x$ 不收敛,则称随机变量 X 的数学期望不存在。以上是文献[12]中关于经典概率论意义下的数学期望说明。

数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 的物理意义在经典概率论中被解释为随机变量的重心,被看作理论上消除随机性的主要手段,已经在实际工作中有广泛应用。但前面关于合理分赌本问题的研究和分析表明,经典概

率论下的数学期望即使在理论意义上存在(级数 $\sum_{t=1}^{\infty}|X_t|P(X_t)$ 收敛,或 $\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x$ 收敛),但在实际应用中不仅没有消除随机性,而且还不一定能在规定的随机试验中期望其出现。

3.2 基于赵森烽-克勤概率的数学期望

上面对于历史上如何合理分赌本问题的研究和分析表明,基于经典概率论的数学期望即使在给定的数学条件(级数 $\sum_{t=1}^{\infty}|X_t|P(X_t)$ 收敛,或 $\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x$ 收敛)时存在,但在实际随机试验中仍然存在规定的随机试验中可能出现也可能不出现的不确定性(例如,前面关于如何合理分赌本问题中的甲期望得 75 法郎赌本事件在给定的 5 次随机试验中就没有出现)。因此,为了如实地从数学形式上反映出随机试验数学期望的不确定性,我们需要探讨新的数学期望概念。由于我们已经知道随机试验中的随机事件总是成对存在,应当用联系数表示随机试验中给定事件与其伴随事件的联系概率,可以从联系概率定义出发来研究一种新的数学期望,下面分别从离散和连续两个角度来给出这种新的数学期望。

定义 3 设成对离散随机变量 $X,\bar{X}$ 的分布列为

$$p(X_t,\bar{X}_t)=P(X=X_t,\bar{X}_t),t=1,2,\cdots,n,\cdots$$

如果

$$\sum_{t=1}^{\infty}|X_t|P(X_t)<\infty$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}|\bar{X}_t|P(X_t)<\infty$$

则

$$\mathrm{E}(X,\bar{X})=\sum_{t=1}^{\infty}(X_t,\bar{X}_t)P(X_t,\bar{X}_t) \tag{12}$$

根据文献[1-3]知,$P(X_t,\bar{X}_t)=P(X_t)+P(\bar{X}_t)i$ 据此由式(12)得

$$\mathrm{E}(X,\bar{X})=\sum_{t=1}^{\infty}(X_t,\bar{X}_t)(P(X_t)+P(\bar{X}_t)i) \tag{13}$$

称(13)式为成对离散随机变量 X、$\bar{X}$ 的联系数学期望,或称为离散随机变量对 X、$\bar{X}$ 对于给定分布的联系数学期望,简称成对离散随机变量联系数学期望,若其中的级数 $\sum_{t=1}^{\infty}|X_t|P(X_t)$ 或 $\sum_{t=1}^{\infty}|\bar{X}_t|P(X_t)$ 不收敛,则称成对离散随机变量对 X、$\bar{X}$ 的联系数学期望不存在。

根据联系概率的定义,式(13)是以 X 为主事件,$\bar{X}$ 为 X 的伴随事件的联系数学期望,因此为了简明起见,把式(13)改写为

$$\mathrm{E}_c(X)=\sum_{t=1}^{\infty}(X_t)_c[P_c(X_t)] \tag{14}$$

式中:$\mathrm{E}_c(X)$ 表示以 X 为主事件,$\bar{X}$ 为 X 的伴随事件的联系数学期望;$(X_t)_c$ 表示以 X_t 为主事件和 $\bar{X}_t$ 为伴随事件的成对离散随机事件;$P_c(X_t)$ 表示以 X_t 为主事件和 $\bar{X}_t$ 为伴随事件的联系概率,式中下标 c 是联系(contact)的意思。也就是说,式(14)是同时计算 X 和 $\bar{X}$ 数学期望的公式。实际计算时,既可以利用式(14)同时计算 X 和 $\bar{X}$ 的数学期望,也可以分别计算 X 的数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 与 $\bar{X}$ 的数学期望 $\mathrm{E}(\bar{X})$,再把结果写成联系数学期望 $\mathrm{E}(X,\bar{X})$ 或 $\mathrm{E}_c(X)$ 的形式。要注意,这里仅仅是把伴随事件数学期望 $\mathrm{E}(\bar{X})$ 乘上表示随机转换器的 i,也就是:

$$\mathrm{E}(X,\bar{X})=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(\bar{X})i \tag{15}$$

或

$$\mathrm{E}_c(X)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(\bar{X})i \tag{16}$$

同理,当式(11)成立时,对于连续随机变量 X,也同样有式(16)成立。为节约篇幅,叙述从略。

此外要说明的是,式(16)所示的数学期望的完整意义是基于赵森烽-克勤概率的数学期望,但也可以称为基于集对分析的联系数学期望,在不至于引起混淆时也简称联系数学期望或称数学期望。

3.3 基于赵森烽-克勤概率的数学期望性质

由式(15)、(16)可以看出,定义 3 给出的联系数学期望由随机变量 X、$\bar{X}$ 各自的数学期望构成,要讨论由式(15)、(16)给定的数学期望性质,必须先明确随机变量 X、$\bar{X}$ 各自的数学期望性质,这些性质有(为节约篇幅,证明从略,可参见文献[7]):

性质 1 若 C 是常数,则

$$\mathrm{E}(C)=C \tag{17}$$

性质 2 对任意常数 K,有

$$\mathrm{E}(kX)=k\mathrm{E}(X) \tag{18}$$

性质 3　对任意的两个函数 $g_1(x)$、$g_2(x)$,有

$$\mathrm{E}[g_1(x) \pm g_2(x)] = \mathrm{E}[g_1(x)] \pm \mathrm{E}[g_2(x)] \tag{19}$$

据此联系数学期望的性质如下:

性质 4　若 c,d 是常数($c \neq d$,$\mathrm{E}(c)=c$,$\mathrm{E}(d)=d$),则有

$$\mathrm{E}(c,d) = c + di \tag{20}$$

证明　先把常数 c 看作始终取一个值的随机变量 X,则有 $P(X=c)=1$,从而其数学期望 $\mathrm{E}(c)=\mathrm{E}(X)=c\times 1=c$;同理,把常数 d 看作始终取一个值的随机变量 $\bar{X}$,则有 $P(\bar{X}=d)=1$,从而其数学期望 $\mathrm{E}(d)=\mathrm{E}(\bar{X})=d\times 1=d$;再根据随机变量 X 和随机变量 $\bar{X}$ 的联系数学期望定义知这 2 个随机变量的联系数期望表达式如式(15)所示,由此得

$$\mathrm{E}(X,\bar{X}) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(\bar{X})i = \mathrm{E}(c,d) = \mathrm{E}(c) + \mathrm{E}(d)i = c + di \tag{21}$$

但要注意的是,由于式(21)把 X 的数学期望作为主事件对待,因此可以改写成

$$\mathrm{E}_c(X) = c + di \tag{22}$$

由于随机变量 X 在随机试验中取常数 c,与此同时的事实是不出现性质 2。

4　数学期望值定理

基于以上讨论,得到以下的数学期望值定理。

定理　设 X 与 $\bar{X}$ 是一对互不相容的随机事件,X 的数学期望为 $\mathrm{E}(X)$,$\bar{X}$ 的数学期望为 $\mathrm{E}(\bar{X})$,则 X 与 $\bar{X}$ 基于赵森烽-克勤概率的联系数学期望为

$$\mathrm{E}(X,\bar{X}) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(\bar{X})i \tag{23}$$

在把 X 作为主事件时,式(23)改写为

$$\mathrm{E}_c(X) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(\bar{X})i \tag{24}$$

在把 $\bar{\mathrm{X}}$ 作为主事件时,式(23)改写为

$$\mathrm{E}_c(\bar{X}) = \mathrm{E}(\bar{X}) + \mathrm{E}(X)i \tag{25}$$

因为在式(23)~(25)中都含有随机转换器 i,其值要根据不同情况才能确定,所以式(23)~(25)的值存在不确定性。因此,由式(23)~(25)所示的联系数学期望值依然具有随机性,本定理也因此称为基于赵森烽-克勤概率的联系数学期望不确定定理,简称期望值定理。

证明　根据定义 3 中给出的基于赵森烽-克勤概率的联系数学期望式(13)、(16)可知,式(13)和式(16)中的 i 是一个随机转换器,具有不确定性,因此式(13)和式(16)具有不确定性。

数学期望值定理从集对分析的角度说明了在随机试验中,不仅随机事件成对存在,而且随机事件的确定性与不确定性也成对存在,与之相应的刻画随机事件出现可能性的数学期望的确定性与不确定性也成对存在。因此,在有关数学期望的众多理论研究和实际问题的应用中,对于数学期望的不确定性,依然需要遵循集对分析理论多年来所倡导的"客观承认、系统描述、定量刻画、具体分析"16 字处置方针,看上去这是一种无奈之举,但由于各种各样的随机事件说到底都是确定性与不确定性的对立统一,故唯如此,才能保证理论研究结果与实际情况的吻合[13-20]。

5　应用

例 1　计算合理分配赌本问题中甲能赢得的赌本数。

问题的描述见第 1 节。由 1.3 节介绍的惠更斯解法和式(2)知,甲的期望为

$$\mathrm{E}(X) = ap + b(1-p) = \frac{ua+vb}{u+v} \tag{26}$$

与此同时,乙的期望为

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = bp + a(1-p) = \frac{ub+va}{u+v} \tag{27}$$

根据式(15)得

$$\mathrm{E}(X,\bar{X}) = [ap + b(1-p)] + [bp + a(1-p)]i \tag{28}$$

如果把甲的数学期望作为"主事件",则可以参照式(16)把式(28)改写成

$$\mathrm{E}_c(X) = [ap + b(1-p)] + [bp + a(1-p)]i \tag{29}$$

显然,式(29)用联系数的形式把甲的数学期望与乙的数学期望联系在同一个数学式中,规范地说,式(29)是甲的联系数学期望,也简约地称为甲的数学期望。

根据题意把 $u=3$,$v=1$,$a=100$,$b=0$ 代入式(29)和式(26)得

$$\mathrm{E}(X,\bar{X}) = 75 + 25i \tag{30}$$

$$\mathrm{E}_c(X) = 75 + 25i \tag{31}$$

由于式(30)与式(31)相等,以下仅对式(31)计算分析。

当 $i=-1$ 时,得 $E_c(X) = 75 + 25i = 50$ (32)

当 $i = 1$ 时,得 $E_c(X) = 75 + 25i = 100$ (33)

前面的2.2中已通过计算与分析证实甲可以期望实现的赢得赌本数为50法郎或100法郎,不可能期望实现的赢得赌本数为75法郎,为此令

$$E_c(X) = 75 + 25i = 75 \tag{34}$$

解式(25)得 $i = 0$。也就是说,式(29)中的 i 取0没有实际意义,但所对应的联系数学期望值75法郎恰恰是经典概率意义下的数学期望值。

例2 机器人月租金期望。

某机器人服务公司向用户提供机器人清扫服务,有3种可能去家庭服务,月租费3 000元;有2种可能去为企业服务,月租费5 000元;按(1)式,该机器人月租金期望为3 800元,但一般情况下,该机器人租给某个家庭后就不能再租给一个企业,因此3 800元这个月租费是一个理论值,而不是实际值,除非这个机器人在一个月中恰好有18天租给家庭,有12天租给企业,$3\,000\times\frac{18}{30}+5\,000\times\frac{12}{30}=3\,800$,但也可能是其他天数的组合,具体是何种组合具有不确定性,如何描述这种不确定性?

利用式(9)得

$$E(X) = 3\,000 \times (0.6 + 0.4i) + 5\,000 \times (0.4 + 0.6i) = 3\,800 + 4\,200i \tag{35}$$

于是问题转化成如何确定其中的 i 值。

显然 $\max\ E(X)= 5\,000$,$\min\ E(X)= 3\,000$。于是,$3\,800+4\,200i= 5\,000$,解得 $i= 0.285\,7$;$3\,800+4\,200i=3\,000$,解得 $i=-0.190\,5$。由此得 $i\in[-0.190\,5,0.285\,7]$,取 i 的平均值为0.238 1,代入式(35)得4 800元。这说明,该机器人服务公司通过适当调度出租该机器人,可以期望得到月租金4 800元。与之相应的出租天数 x(为企业服务天数)与 y(为家庭服务天数)只需解以下方程

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{5\,000}{30}x + \frac{3\,000}{30}y = 4\,800 \end{cases} \tag{36}$$

解得,$y=1$ 天,$x=29$ 天。

6 结束语

本文从讨论概率论发展史上如何合理分赌本问题入手,研究了数学期望的不确定性及其联系数学期望表达。虽然在概率论中早就指出数学期望是一种关于随机变量的均值,但本文是首次给出数学期望不确定定理和这一定理的实际意义。由于经典概率意义下的数学期望值在随机试验中可能出现也可能不出现,而一些实际问题极需要针对可能出现的极大极小数学期望值作出决策,基于这一事实,我们提倡在有关随机决策之类问题的研究中大胆地应用本文给出的基于赵森烽-克勤概率的联系数学期望,因为联系数学期望不仅包含了经典的数学期望值,还包含了可能出现的其他期望值,特别是,对各种可能出现的其他期望值的分析过程中,还在有意无意地引导人们去关注和分析导致不同期望值出现的那些不确定性因素,这对于提高随机决策的科学性与针对性至关重要。至于有关联系数学期望的运算规则、联系数学期望与随机变量方差的关系、联系数学期望与大数定律关系,等等问题,我们将在后续文章中讨论。

参考文献:

[1]赵森烽,赵克勤.概率联系数化的原理与联系概率在概率推理中的应用[J].智能系统学报, 2012, 7(3): 200-205.
ZHAO Senfeng, ZHAO Keqin. The principle of the probability of connection number and application in probabilistic reasoning[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2012, 7(3): 200-205.

[2]赵森烽,赵克勤.几何概型的联系概率与概率的补数定理[J].智能系统学报, 2013, 8(1): 11-15.
ZHAO Senfeng, ZHAO Keqin. Contact probability (complex probability) of geometry probability and probability of the complement number theorem[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2013, 8(1): 11-15.

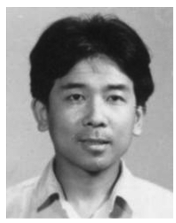
[3]赵森烽,赵克勤. 基于频率的赵森烽-克勤概率与随机事件的转化定理[J]. 智能系统学报, 2014, 9(1): 53-69.
ZHAO Senfeing, Zhao Keqin. Probability based on the frequency and random events transformation theorem[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2014, 9(1): 53-69.

[4]赵克勤.集对分析及其初步应用[M].杭州:浙江科学技术出版社, 2000: 1-198.

[5]赵克勤, 宣爱理. 集对论——一种新的不确定性理论方法与应用[J]. 系统工程, 1996, 14(1): 18-23.
Zhao Keqin, Xuan Aili. Set pair theory—a new theory method of non-define and its applications[J]. Systems engineering, 1996, 14(1): 18-23.

[6]赵克勤.集对分析的不确定性理论在 AI 中的应用[J].智能系统学报, 2006, 1(2): 16-25.
ZHAO Keqin.The application of uncertainty systems theory of set pair analysis (SPA) in the artiartificial intelligence [J].CAAI transactions on intelligent systems, 2006,1(2): 16-25.
[7]赵森烽,赵克勤. 联系概率的由来及其在风险决策中的应用[J].数学的实践与认识, 2013, 43(4): 165-171.
ZHAO Senfeng, ZHAO Keqin. The contact probability in risk decision-making medium application [J]. Mathematics in practice and theory, 2013, 43(4): 165-171.
[8]赵克勤,赵森烽.贝叶斯概率向赵森烽-克勤概率的转换与应用[J].智能系统学报, 2015, 10(1): 51-61.
ZHAO Keqin, ZHAO Senfeng. Bayes probability transition to Zhao Senfeng-Keqin probability and its application[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2015, 10(1): 51-61.
[9]王梓坤.概率论基础及其应用[M].北京:科学出版社, 1979: 1-218.
[10]赵秀恒,米立民.概率论与数理统计[M].北京:高等教育出版社, 2008: 53-55.
[11]孙荣恒.趣味随机问题[M].北京:科学出版社, 2009: 18-19.
[12]茆诗松,程依明,濮晓龙.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社, 2011: 77-85.
[13]赵克勤.集对分析与熵的研究[J].浙江大学学报: 社科版, 1992, 38(2): 65-72.
ZHAO Keqin. Set pair analysis and entropy research[J]. Journal of Zhejiang university: social science edition, 1992, 38(2): 65-72.
[14]赵克勤.集对分析及其初步应用[J].大自然探索, 1994, 13(1): 67-72.
ZHAO Keqin. Set pair analysis and its preliminary application[J]. Exploration of nature, 1994, 13(1): 67-72.
[15]赵克勤.集对分析对不确定性的描述和处理[J].信息与控制, 1995, 24(3): 162-166.
ZHAO Keqin. Disposal and discription of uncertainties based on the Set pair analysis[J].Information and control, 1995, 24(3): 162-166.
[16]赵克勤.试论集对分析与概率论的关系[C]//中南模糊系统与数学论文集. 长沙: 湖南科技出版社, 1995: 253.
[17]赵克勤.二元联系数 $A+Bi$ 的理论基础与基本算法及在人工智能中的应用[J].智能系统学报,2008, 3(6): 476-486.
ZHAO Keqin. Thetheoretical basis and basic algorithm of binary connection $A+Bi$ and its application in AI[J].CAAI transactions on intelligent systems, 2008, 3(6): 476-486.
[18]赵克勤,赵森烽.奇妙的联系数[M].北京:知识产权出版社, 2014: 1-206.
[19]刘秀梅,赵克勤.区间数决策集对分析[M].北京:科学出版社, 2014: 1-214.
[20]蒋云良,赵克勤,刘以安,等.信息处理集对分析[M].北京:清华大学出版社, 2015: 1-228.

作者简介:



赵克勤,男,1950 年生,研究员,主要研究方向为信息处理、集对分析、联系数学、联系科学。浙江大学非传统安全与和平发展中心集对分析研究所所长,原中国人工智能学会第 5、6、7 三届学会理事,人工智能基础专业委员会副主任,集对分析联系数学专业筹备委员会主任;1989 年提出集对分析(联系数学),发表学术论文 100 余篇,出版专著 3 部。

赵森烽,男,1993 年生,硕士研究生,主要研究方向为信息处理、集对分析联系数学。发表学术论文 6 篇。