DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201307016
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/CNKI:23-1538/TP.20131105.1201.002.html

粗糙线性近似空间的代数结构

刘亚梅,马盈仓,鲁文霞,陈艳艳
(西安工程大学 理学院,陕西 西安 710048)

摘　要:针对线性空间上引入上下近似算子后的代数结构的刻画问题,根据基于同余关系的线性空间上下近似的性质,提出 2 个新的集合,分别对上近似的并和下近似的交的包含关系进行了改进,得出了集合交的上近似、集合并的下近似的等式刻画。进而,定义引入粗糙线性近似空间的概念,并在其上引入交、并、补的运算,得出粗糙线性近似空间在运算下构成了布尔代数的结论,丰富了线性空间与粗糙集理论相结合的研究。

关键词:粗糙线性近似空间;线性子空间;同余;上下近似;布尔代数; 代数结构
中图分类号: TP18;B815　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-4785(2014)02-0224-05

中文引用格式:刘亚梅,马盈仓,鲁文霞,等. 粗糙线性近似空间的代数结构[J]. 智能系统学报, 2014, 9(2): 224-228.
英文引用格式:LIU Yamei, MA Yingcang, LU Wenxia, et al. The algebraic structure of rough linear approximation space[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(2): 224-228.

The algebraic structure of rough linear approximation space

LIU Yamei, MA Yingcang, LU Wenxia, CHEN Yanyan
(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: Focusing on the description of the algebraic structure on the upper (lower) approximation, and according to the properties of the upper (lower) approximation in rough linear space, two new sets are presented, and the inclusion relation of the upper approximation's union and the lower approximation´s intersection are improved, deriving the equation expressions of the upper approximation's union and the lower approximation´s intersection. Moreover, the rough linear approximation space is proposed and the intersection, union and complementary operations are introduced in the rough linear approximation space. Finally, it has been proven that the rough linear approximation space is Boolean algebra on the intersection, union and complementary operations. This paper enriches the combination of linear space and rough set research.

Keywords: rough linear approximation space; linear subspace; congruence; upper and lower approximation; Boolean algebra; algebraic structure

粗糙集理论于 1982 年被 Pawlak[1] 提出以来,已经取得很大的发展。特别是在数据的决策与分析、模式识别、数据挖掘、机器学习与知识发现等方面。在粗糙集理论中有 2 种方式来定义近似算子:构造性方法和公理化方法。构造性方法是以论域上的二元关系、邻域系统或布尔子代数作为基本要素构造性地定义近似算子,然后得出粗糙集代数系统[2-4]。公理化方法就是先给定一个粗糙集代数系统,然后定义二元关系使得由二元关系通过构造性方法定义的近似算子及导出的粗糙集代数系统就是给定的近似算子和粗糙集代数系统[5-9]。基于这 2 种方法,在代数结构方面,不少学者做出了一些研究并提出了许多新的概念,如粗糙群[10]、粗糙子群[11]、粗糙不变子群[12-13]等。在线性空间方面,日本学者 N. Kuroki[14] 研究了线性空间上粗糙集的性质,提出了在线性空间上的等价关系以及上下近似算子。国内学者 W.J.Liu [15-16]、吴明芬[17] 等也研究了粗糙线性空间的性质并联系线性空间本身的性质

收稿日期:2013-07-05.　网络出版日期:2013-11-05.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60775038);陕西省教育厅专项科研计划资助项目(12JK0878).
通信作者:马盈仓. E-mail: mayingcang@126.com.

研究更深入的性质,同时还把粗糙集引入了线性空间和模糊线性空间中。本文就是在文献[17]基础上,结合模糊逻辑及其代数分析[18]的有关概念,以及 H.G.Zhang[19]对经典粗糙集上信息丢失问题的提出的方法,根据上下近似算子的性质提出了 2 个集合,使信息丢失的问题得到解决,并建立基于布尔代数的粗糙线性近似空间模型。

1　基本概念

定义 1[17]　设 V 是数域 P 上的线性空间,X、Y 是 V 上的非空子集,k 是数域 P 上的任意元素,定义集合的和与数乘为:

$$X+Y=\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in X,\alpha_2\in Y\}$$

$$kX=\{k\alpha \mid \alpha\in X\}$$

定义 2[17]　设线性空间 V 上一个等价关系 ρ,若对 $\forall\alpha,\beta\in V$,有 $(\alpha,\beta)\in\rho$,$(\alpha+\gamma,\alpha+\gamma)\in\rho$,$(k\alpha,k\beta)\in\rho$,$\forall\gamma\in V$,$k\in P$。则称 ρ 为 V 上的一个同余关系。

定义 3[17]　设 W 是线性空间上 V 的一个子空间,定义一个二元关系 ρ_W:

$$\rho_W=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in V,\alpha-\beta\in W\}$$

定理 1[17]　设 W 是线性空间 V 的子空间,则下面结论成立:

1) ρ_W 是 V 上的一个同余关系

2) $\forall\alpha\in V$, 同余类 $[\alpha]_{\rho_W}=\alpha+W$ 则可将 $[\alpha]_{\rho_W}$ 记为 $\rho_W(\alpha)$。$V/\rho_W=\{\rho_W(\alpha)\mid\forall\alpha\in V\}$ 是全体同余类的集合。

性质 1[17]　$\rho_W(\alpha)+\rho_W(\beta)=\rho_W(\alpha+\beta)$

$\rho_W(k\alpha)=k\rho_W(\alpha)$

定义 4[17]　设 V 是数域 P 上的线性空间,W 是 V 的线性子空间,X 是 V 上的任意一个非空子集,定义 X 在 W 上关于 ρ_W 的上、下近似分别为:

$$\underline{\rho}_W(X)=\{\alpha\in V\mid\rho_W(\alpha)\subseteq X\}$$

$$\bar{\rho}_W(X)=\{\alpha\in V\mid\rho_W(\alpha)\cap X\neq\varnothing\}$$

性质 2[17]　设 V 是数域 P 上的线性空间,W 是 V 的线性子空间,X,Y 是 V 上的非空子集,则有:

1) $\underline{\rho}_W(X)\subseteq X\subseteq\bar{\rho}_W(X)$;

2) $\bar{\rho}_W(X\cup Y)=\bar{\rho}_W(X)\cup\bar{\rho}_W(Y)$;

3) $\underline{\rho}_W(X\cap Y)=\underline{\rho}_W(X)\cap\underline{\rho}_W(Y)$;

4) 若 $X\subseteq Y$, 则有 $\underline{\rho}_W(X)\subseteq\underline{\rho}_W(Y)$, $\bar{\rho}_{W(X)\subseteq}\bar{\rho}_W(Y)$;

5) $\underline{\rho}_W(X\cup Y)\supseteq\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)$;

6) $\bar{\rho}_W(X\cap Y)\subseteq\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y)$。

2　集合的交(并)的上(下)近似的等式刻画

由性质 2 中的 5)、6)可以看出,在线性空间中交的上近似、并的下近似并不是等式刻画,存在信息丢失的问题。在本节中,主要解决这一问题,为此引入以下定义:

定义 5　设 V 是数域 P 上的线性空间,W 是 V 的一个子空间,X,Y 是 V 的 2 个子集,记

$$P_X(Y)=$$

$$\{\alpha\mid\rho_W(\alpha)\subseteq X\cup Y\text{且}\rho_W(\alpha)\not\subset X,\rho_W(\alpha)\not\subset Y\};$$

$$Q_X(Y)=\{\alpha\mid\rho_W(\alpha)\cap(X\cap Y)=\varnothing,$$

$$\text{且}\rho_W(\alpha)\cap X\neq\varnothing,\rho_W(\alpha)\cap Y\neq\varnothing\}。$$

定理 2:

1) $\underline{\rho}_W(X\cup Y)=\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)\cup P_X(Y)$

2) $\bar{\rho}_W(X\cap Y)=\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y)-Q_X(Y)$

证明:1) 对 $\forall\alpha\in\underline{\rho}_W(X\cup Y)$,有 $\rho_W(\alpha)\subseteq X\cup Y$。

若 $\rho_W(\alpha)\subseteq X$ 或 $\rho_W(\alpha)\subseteq Y$, 则有 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X)$, 或 $\alpha\in\underline{\rho}_W(Y)$, 则 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)\cup P_X(Y)$。若 $\rho_W(\alpha)\not\subset X$ 且 $\rho_W(\alpha)\not\subset Y$, 则 $\alpha\in P_X(Y)$, 所以 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)\cup P_X(Y)$。

因此有 $\underline{\rho}_W(X\cup Y)\subseteq\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)\cup P_X(Y)$。

对 $\forall\alpha\in\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)\cup P_X(Y)$, 有

$\alpha\in\underline{\rho}_W(X)$ 或 $\alpha\in\underline{\rho}_W(Y)$ 或 $\alpha\in P_X(Y)$。

若 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X)$, 则有 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X\cup Y)$, 若 $\alpha\in\underline{\rho}_W(Y)$, 则有 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X\cup Y)$, 若 $\alpha\in P_X(Y)$, 则 $\rho_W(\alpha)\subseteq X\cup Y$, 则有 $\alpha\in\underline{\rho}_W(X\cup Y)$。

所以 $\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)\cup P_X(Y)\subseteq\underline{\rho}_W(X\cup Y)$, 即 $\underline{\rho}_W(X\cup Y)=\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y)$。

2) 此命题等价为

$$\bar{\rho}_W(X\cap Y)\cup Q_X(Y)=\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y)$$

对 $\forall\alpha\in\bar{\rho}_W(X\cap Y)\cup Q_X(Y)$, 有 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X\cap Y)$ 或 $\alpha\in Q_X(Y)$。

若 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X\cap Y)$, 则有 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y)$, 若 $\alpha\in Q_X(Y)$, 则有 $\rho_W(\alpha)\cap X\neq\varnothing$ 且 $\rho_W(\alpha)\cap Y\neq\varnothing$, 所以 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X)$ 且 $\alpha\in\bar{\rho}_W(Y)$, 则 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y)$。对 $\forall\alpha\in\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y)$, 则有 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X)$ 且 $\alpha\in\bar{\rho}_W(Y)$, 即 $\rho_W(\alpha)\cap X\neq\varnothing$ 且 $\rho_W(\alpha)\cap Y\neq\varnothing$。

若 $\rho_W(\alpha)\cap(X\cap Y)\neq\varnothing$, 则有 $\alpha\in\bar{\rho}_W(X\cap Y)$; 若 $\rho_W(\alpha)\cap(X\cap Y)=\varnothing$, 则 $\alpha\in Q_X(Y)$。

所以 $\alpha \in \bar{\rho}_W(X \cap Y) \cap Q_X(Y)$，从而 $\bar{\rho}_W(X \cap Y) = \bar{\rho}_W(X) \cap \bar{\rho}_W(Y) - Q_X(Y)$。

例 1：设线性空间 V 是全体实数，定义它的加法运算为 $a \oplus b = ab$，乘法运算为 $a \otimes b = a^b$。V 的一个线性子空间为 $W = \{-1,1\}$，V 中的 2 个子集 $X = \{1,2,3,4,5\}$ 和 $Y = \{1,2,3,6\}$。求 $P_X(Y)$，$Q_X(Y)$ 并验证以上结论。

解：由定义可得

$$\underline{\rho}_W(X) = \{2,3,4\}$$

$$\underline{\rho}_W(Y) = \{2\}$$

$$\underline{\rho}_W(X \cup Y) = \{2,3,4,5\}$$

$$\bar{\rho}_W(X) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$\bar{\rho}_W(Y) = \{0,1,2,3,4,5,7\}$$

$$\bar{\rho}_W(X \cap Y) = \{0,1,2,3,4\}$$

$$P_X(Y) = \{5\}$$

$$Q_X(Y) = \{5\}$$

所以 $\underline{\rho}_W(X \cup Y) = \underline{\rho}_W(X) \cup \underline{\rho}_W(Y) \cup P_X(Y)$，$\bar{\rho}_W(X \cap Y) = \bar{\rho}_W(X) \cap \bar{\rho}_W(Y) - Q_X(Y)$。

3 粗糙线性近似空间及其代数结构

研究了基于同余关系的线性空间上下近似的性质，并通过 2 个集合解决了信息丢失的问题，下面要讨论上下近似的代数结构。

定义 6 设 V 是数域 P 上的线性空间，X 是 V 的任意子集，定义

$$\rho_W(X) = (\underline{\rho}_W(X), \bar{\rho}_W(X))$$

定义 7 设 V 是数域 P 上的线性空间，X，Y 是 V 的任意子集，则粗糙线性空间的并、交、补、差运算定义为：

1) $\rho_W(X) \cup \rho_W(Y) = (\underline{\rho}_W(X) \cup \underline{\rho}_W(Y) \cup P_X(Y), \bar{\rho}_W(X) \cup \bar{\rho}_W(Y))$；

2) $\rho_W(X) \cap \rho_W(Y) = (\underline{\rho}_W(X) \cap \underline{\rho}_W(Y), \bar{\rho}_W(X) \cap \bar{\rho}_W(Y) - Q_X(Y))$；

3) $\rho_W(X^{\perp}) = \rho_W(X)^{\perp} = (V - \bar{\rho}_W(X), V - \underline{\rho}_W(X))$；

4) $\rho_W(X) - \rho_W(Y) = (\underline{\rho}_W(X) - \bar{\rho}_W(Y), \bar{\rho}_W(X) - \underline{\rho}_W(Y) - Q_X(Y^{\perp}))$。

推论 1 1) $\rho_W(X) \cup \rho_W(Y) = \rho_W(X \cup Y)$

2) $\rho_W(X) \cap \rho_W(Y) = \rho_W(X \cap Y)$

证明：由定义可得 $\rho_W(X \cup Y) = (\underline{\rho}_W(X \cup Y), \bar{\rho}_W(X \cup Y))$，又由定理 2 可得 $\underline{\rho}_W(X \cup Y) = \underline{\rho}_W(X) \cup \underline{\rho}_W(Y) \cup P_X(Y)$，$\bar{\rho}_W(X \cap Y) = \bar{\rho}_W(X) \cap \bar{\rho}_W(Y) - Q_X(Y)$。

所以 $\rho_W(X) \cup \rho_W(Y) = \rho_W(X \cup Y)$。

同理可得 $\rho_W(X) \cap \rho_W(Y) = \rho_W(X \cap Y)$。

定理 3 设 V 是数域 P 上的线性空间，X、Y、Z 是 V 的任意子集，则有

1)交换律：

$$\rho_W(X) \cup \rho_W(Y) = \rho_W(Y) \cup \rho_W(X);$$
$$\rho_W(X) \cap \rho_W(Y) = \rho_W(Y) \cap \rho_W(X)。$$

2)结合律：

$$(\rho_W(X) \cup \rho_W(Y)) \cup \rho_W(Z) = \rho_W(X) \cup (\rho_W(Y) \cup \rho_W(Z));$$
$$(\rho_W(X) \cap \rho_W(Y)) \cap \rho_W(Z) = \rho_W(X) \cap (\rho_W(Y) \cap \rho_W(Z))。$$

3)分配律：

$$\rho_W(X) \cup (\rho_W(Y) \cap \rho_W(Z)) = (\rho_W(X) \cup \rho_W(Y)) \cap (\rho_W(X) \cup \rho_W(Z));$$
$$\rho_W(X) \cap (\rho_W(Y) \cup \rho_W(Z)) = (\rho_W(X) \cap \rho_W(Y)) \cup (\rho_W(X) \cap \rho_W(Z))。$$

4)幂等律：

$$\rho_W(X) \cup \rho_W(X) = \rho_W(X);$$
$$\rho_W(X) \cap \rho_W(X) = \rho_W(X)。$$

5)0-1 律：

$$\rho_W(X) \cup \rho_W(\varnothing) = \rho_W(X);$$
$$\rho_W(X) \cap \rho_W(V) = \rho_W(X)。$$

6)互补律：

$$\rho_W(X) \cup \rho_W(X^{\perp}) = \rho_W(V);$$
$$\rho_W(X) \cap \rho_W(X^{\perp}) = \rho_W(\varnothing)。$$

7)对偶律：

$$(\rho_W(X) \cup \rho_W(Y))^{\perp} = \rho_W(X^{\perp}) \cap \rho_W(Y^{\perp});$$
$$(\rho_W(X) \cap \rho_W(Y))^{\perp} = \rho_W(X^{\perp}) \cup \rho_W(Y^{\perp})。$$

证明：

1)由 $P_X(Y)$ 和 $Q_X(Y)$ 定义可以看出 $P_X(Y) = P_Y(X)$，$Q_X(Y) = Q_Y(X)$。

所以

$$\rho_W(X) \cup \rho_W(Y) = (\underline{\rho}_W(X) \cup \underline{\rho}_W(Y) \cup P_X(Y), \bar{\rho}_W(X) \cup \bar{\rho}_W(Y)) = (\underline{\rho}_W(Y) \cup \underline{\rho}_W(X) \cup P_Y(X); \bar{\rho}_W(Y) \cup \bar{\rho}_W(X)) = \rho_W(Y) \cup \rho_W(X),$$

$$\rho_W(X) \cap \rho_W(Y) = (\underline{\rho}_W(X) \cap \underline{\rho}_W(Y); \bar{\rho}_W(X) \cap \bar{\rho}_W(Y) - Q_X(Y)) = (\underline{\rho}_W(Y) \cap \underline{\rho}_W(X), \bar{\rho}_W(Y) \cap \bar{\rho}_W(X) - Q_Y(X)) = \rho_W(Y) \cap \rho_W(X)。$$

2) $(\rho_W(X) \cup \rho_W(Y)) \cup \rho_W(Z) =$

$$\rho_W(X \cup Y) \cup \rho_W(Z) =$$

$$\rho_W((X \cup Y) \cup Z) = (\underline{\rho}_W((X \cup Y) \cup Z)$$

$$\bar{\rho}_W((X \cup Y) \cup Z)) = (\underline{\rho}_W(X \cup (Y \cup Z))$$

$$\bar{\rho}_W(X\cup(Y\cup Z)))=$$
$$(\underline{\rho}_W(X)\cup\underline{\rho}_W(Y\cup Z)\cup P_X(Y\cup Z)$$
$$\bar{\rho}_W(X)\cup\bar{\rho}_W(Y\cup Z))=$$
$$\rho_W(X)\cup(\rho_W(Y)\cup\rho_W(Z))$$
$$(\rho_W(X)\cap\rho_W(Y))\cap\rho_W(Z)=$$
$$\rho_W(X\cap Y)\cap\rho_W(Z)=$$
$$\rho_W((X\cap Y)\cap Z)=(\underline{\rho}_W((X\cap Y)\cap Z),$$
$$\bar{\rho}_W((X\cap Y)\cap Z))=(\underline{\rho}_W(X\cap(Y\cap Z)),$$
$$\bar{\rho}_W(X\cap(Y\cap Z)))=(\underline{\rho}_W(X)\cap\underline{\rho}_W(Y\cap Z)\ ,$$
$$\bar{\rho}_W(X)\cap\bar{\rho}_W(Y\cap Z)-Q_X(Y\cap Z))=$$
$$\rho_W(X)\cap(\rho_W(Y)\cap\rho_W(Z))。$$

3) $\rho_W(X)\cup(\rho_W(Y)\cap\rho_W(Z))=$
$$\rho_W(X)\cup\rho_W(Y\cap Z)=\rho_W((X)\cup(Y\cap Z))=$$
$$(\underline{\rho}_W(X\cup(Y\cap Z)),$$
$$\bar{\rho}_W(X\cup(Y\cap Z)))=$$
$$(\underline{\rho}_W((X\cup Y)\cap(X\cup Z)),$$
$$\bar{\rho}_W((X\cup Y)\cap(X\cup Z)))=$$
$$(\underline{\rho}_W(X\cup Y)\cap\underline{\rho}_W(X\cup Z),$$
$$\bar{\rho}_W(X\cup Y)\cap\bar{\rho}_W(X\cup Z)-Q_{X+Y}(X\cup Z))=$$
$$\rho_W(X\cup Y)\cap\rho_W(X\cup Z)=$$
$$(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))\cap(\rho_W(X)\cup\rho_W(Z)),$$
$$\rho_W(X)\cap(\rho_W(Y)\cup\rho_W(Z))=$$
$$\rho_W(X)\cap\rho_W(Y\cup Z)=$$
$$\rho_W(X)\cap(Y\cup Z)=(\underline{\rho}_W(X\cap(Y\cup Z)),$$
$$\bar{\rho}_W(X\cap(Y\cup Z)))=$$
$$(\underline{\rho}_W((X\cap Y)\cup(X\cap Z)),$$
$$\bar{\rho}_W((X\cap Y)\cup(X\cap Z)))=$$
$$(\underline{\rho}_W(X\cap Y)\cup\underline{\rho}_W(X\cap Z)\cup P_{X\cap Y}(X\cap Z),$$
$$\bar{\rho}_W(X\cap Y)\cup\bar{\rho}_W(X\cap Z))=$$
$$\rho_W(X\cap Y)\cup\rho_W(X\cap Z)=$$
$$(\rho_W(X)\cap\rho_W(Y))\cup(\rho_W(X)\cap\rho_W(Z))。$$

4) $\rho_W(X)\cup\rho_W(X)=\rho_W(X\cup X)=\rho_W(X)$;
$\rho_W(X)\cap\rho_W(X)=\rho_W(X\cap X)=\rho_W(X)$。

5) $\rho_W(X)\cup\rho_W(\varnothing)=\rho_W(X\cup\varnothing)=\rho_W(X)$;
$\rho_W(X)\cap\rho_W(V)=\rho_W(X\cap V)=\rho_W(X)$。

6) $\rho_W(X)\cup\rho_W(X^{\perp})=\rho_W(X\cup X^{\perp})=\rho_W(V)$;
$\rho_W(X)\cap\rho_W(X^{\perp})=\rho_W(X\cap X^{\perp})=\rho_W(\varnothing)$。

7) 要证 $(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))^{\perp}=\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp})$，只需证 $(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))\cap(\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp}))=\rho_W(\varnothing)$。
$$(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))\cup(\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp}))=\rho_W(V),$$
$$(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))\cap(\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp}))=$$
$$[(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))\cap\rho_W(X^{\perp})]\cap\rho_W(Y^{\perp})=$$
$$[(\rho_W(X)\cap\rho_W(X^{\perp}))\cup(\rho_W(Y)\cap\rho_W(X^{\perp}))]\cap$$
$$\rho_W(Y^{\perp})=[\varnothing\cup(\rho_W(Y)\cap\rho_W(X^{\perp}))]\cap$$
$$\rho_W(Y^{\perp})=\rho_W(Y)\cap\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp})=$$
$$\rho_W(\varnothing)\cap R(X^{\perp})=R(\varnothing),$$
$$(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))\cup(\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp}))=$$
$$(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y)\cup\rho_W(X^{\perp}))\cap$$
$$(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y)\cup\rho_W(Y^{\perp}))=$$
$$(\rho_W(V)\cup\rho_W(Y))\cap(\rho_W(V)\cup\rho_W(X))=$$
$$\rho_W(V)\cap\rho_W(V)=\rho_W(V)。$$
所以 $(\rho_W(X)\cup\rho_W(Y))^{\perp}=\rho_W(X^{\perp})\cap\rho_W(Y^{\perp})$。

同理可证 $(\rho_W(X)\cap\rho_W(Y))^{\perp}=\rho_W(X^{\perp})\cup\rho_W(Y^{\perp})$。

定义 8：设 V 是数域 P 上的线性空间，设 (V,ρ_W) 为粗糙线性空间，对 $X\subseteq V$，定义 $\rho_W(X)=(\underline{\rho}_W(X),\bar{\rho}_W(X))$ 为 (V,ρ_W) 上的一个 Rough 集。定义 $F=\{(V,\rho_W(X))\,|\,X\subseteq V\}$，称其为粗糙线性近似空间。其上的运算定义如下：

$$(X,\rho_W(X))\cup(Y,\rho_W(Y))=(X\cup Y,\rho_W(X\cup Y))$$
$$(X,\rho_W(X))\cap(Y,\rho_W(Y))=(X\cap Y,\rho_W(X\cap Y))$$
$$(X,\rho_W(X))^{\perp}=(X^{\perp},\rho_W(X^{\perp}))$$
$$0=(\rho_W(\varnothing),\rho_W(\varnothing)),\ 1=(\rho_W(V),\rho_W(V))。$$

由以上分析可得出如下定理：

定理 4　代数系统 $\langle F,\cup,\cap,\perp,0,1\rangle$ 为布尔代数。

4　结束语

粗糙集与代数系统的结合研究是粗糙集理论研究热点之一，把粗糙集与线性空间结合研究具有重要的理论意义。在本文中，根据线性空间中集合关于同余关系的上下近似的性质，提出了 2 个集合以解决线性空间中信息丢失的问题，通过对上近似的交和下近似的并的等式的刻画，同时研究了粗糙线性近似空间中上下近似的代数结构并证明了其构成了布尔代数。接下来将对此代数结构进行进一步的研究。但本文缺乏实际应用，未来将对上下近似的代数结构和实际应用做进一步的研究。

参考文献：

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341-356.

[2] WU W Z, MI J S, ZHANG W X. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 151: 263-282.

[3] WU W Z, ZHANG W X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information

Sciences, 2004, 159: 233-254.

[4]吴伟志,张文修,徐宗本. 粗糙模糊集的构造与公理化方法[J]. 计算机学报, 2004, 27(4): 197-203.

WU Zhiwei, ZHANG Wenxiu, XU Zongben. Characterizating rough fuzzy sets in constructive and axiomatic approaches [J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(4): 197-203.

[5]YAO Y Y, LIN T Y. Generalization of rough sets using modal logic[J]. Intelligent Automation and Soft Computing: An International Journal, 1996, 2: 103-120.

[6]MI J S, ZHANG W X. An axiomatic characterization of fuzzy generalization of rough sets[J]. International Journal of General Systems, 2005, 34: 77-90.

[7]YAO Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 291-317.

[8]YAO Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Journal of Information Sciences, 1998, 109: 21-47.

[9]祝峰,何华灿. 粗集的公理化[J].计算机学报, 2000, 33(3): 330-333.

ZHU Feng, HE Huacan. The axiomatization of the rough set [J]. Chinese Journal of Computers, 2000, 33(3): 330-333.

[10]韩素青. 粗糙群的同态与同构[J]. 山西大学学报:自然科学版, 2001, 24(4): 303-305.

HAN Suqing. Homomorphism and isomorphism of rough group[J].Journal of Shanxi University :Natural Science Edition, 2001, 24(4): 303-305.

[11]张金玲,张振良. 粗糙子群和粗糙子环[J]. 纯粹数学与应用数学, 2004, 20(1): 92-96.

ZHANG Jinling, ZHANG Zhenliang. Rough grougs and rough rings[J].Pure and Applied Mathematics, 2004, 20(1): 92-96.

[12]韩素青,胡桂荣. 粗糙陪集、粗糙不变子群[J]. 计算机科学期刊, 2001, 28(suppl.): 76-77.

HAN Suqing, HU Guirong. Rough coset and rough invariant subgroup[J]. Scientific Journal of Computer Science, 2001, 28(suppl.): 76-77.

[13]王德松,舒兰. 粗糙不变子群的若干性质与粗糙商群[J].模糊系统与数学, 2004, 18(4): 49-53.

WANG Desong, SHU Lan. Some properties of rough invariant subgroups and rough quotient groups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(4): 49-53.

[14]KUROKI N. Rough sets and convex subsets in a linear space[J]. RIMS Kokyuroku, 1997, 985: 42-47.

[15]LIU W J. Rough linear space[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21: 137-143.

[16]LIU W J, YANG P L. The Fuzzy Rough linear space[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20: 135-140.

[17]吴明芬.线性空间上基于同余的上下近似[J].模糊系统与数学, 2008, 22(1): 146-150.

WU Mingfen. Upper and lower approximation based on congruences on linear spaces[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(1): 146-150.

[18]张小红. 模糊逻辑及其代数分析[M].北京: 科学出版社, 2008: 133-134.

[19]ZHANG H G, LIANG H L, LIU D R. Two new operators in rough set theory with applications to fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2004 (166): 147-165.

作者简介:

刘亚梅,女,1987 年生,硕士研究生,主要研究方向为粗糙集理论及应用。

马盈仓,男,1972 年生,教授,博士。主要研究方向为粒度计算、粗糙集理论及应用、不确定性推理理论及应用。主持或参与国家、省教育厅项目 6 项。获 2012 年陕西省科学技术三等奖 1 项和陕西省高等学校科学技术一等奖 1 项、二等奖 1 项。获 2005 年陕西省自然科学优秀学术论文三等奖。发表学术论文 50 余篇,其中有 3 篇被 SCI 检索、20 余篇被 EI 检索。

鲁文霞,女,1988 年生,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论及应用。