

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201212012  
网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20130929.1040.001.html>

# 浸入与不变方法原理 及其在非线性自适应控制中的应用

刘振, 谭湘敏, 易建强, 袁如意, 范国梁

(中国科学院自动化研究所 综合信息系统研究中心, 北京 100190)

**摘要:**非线性系统理论的实际工程需求和复杂性使其成为控制学科中最具吸引力和挑战性的研究领域,为此介绍了一种新的非线性控制律设计方法——浸入与不变(I&I)理论.该方法首先选择一个比被控系统维数低的(局部)渐近稳定的目标系统,然后设计浸入映射和控制律,使得原系统在控制律作用下的动态轨迹都是目标系统在浸入映射下的像,并且该控制律能够保持目标系统的像为不变吸引流形,且使闭环轨迹有界.针对未知点质量模型,设计了一种新的非线性浸入与不变自适应控制律,实现了对参考指令的精确跟踪.将其与基于确定等价原则的自适应控制律相比较,仿真结果表明,所设计的浸入与不变控制律能够更好地处理带有未知参数的系统.

**关键词:**非线性控制;浸入与不变理论;自适应控制;控制律;未知点质量系统

**中图分类号:**TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-4785(2013)05-0400-08

中文引用格式:刘振,谭湘敏,易建强,等.浸入与不变方法原理及其在非线性自适应控制中的就用[J].智能系统学报,2013,8(5):400-407.

英文引用格式:LIU Zhen, TAN Xiangmin, YI Jianqiang, et al. Immersion and invariance theory and its applications in nonlinear adaptive control[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2013, 8(5): 400-407.

## Immersion and invariance theory and its application in nonlinear adaptive control

LIU Zhen, TAN Xiangmin, YI Jianqiang, YUAN Ruyi, FAN Guoliang

(Integrated Information System Research Center, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** The actual engineering demands and the complexities of the nonlinear system theory have led it to become the most attractive and challenging research field in control subjects, therefore, a new nonlinear control law design method—immersion and invariance (I&I) theory has been introduced. With this method, a (partially) asymptotically stable system with a dimension less than that of the controlled system is firstly selected as the target system, then the immersion mapping and control law are designed to make the controlled dynamics of the original system is an immersion image of the target system. In addition, the control law can keep the image of the target system as an invariant and attractive manifold, and render the trajectory of the closed-loop system bounded. Focusing on the unknown point mass model, a new nonlinear immersion and invariance adaptive control law is designed for realizing the precise tracking of a reference command. Compared with the adaptive control law based on the certainty-equivalent principle, the simulation results show that the proposed I&I adaptive control law is quite effective for processing a system with unknown parameters.

**Keywords:** nonlinear control; immersion and invariance theory; adaptive control; control law; unknown point mass system

非线性是自然界和工程技术领域里普遍存在的现象.由于各种各样的原因,人们总是无法对一个实

际工程对象进行精确建模.任何一个实际的物理系统都是非线性的,而所谓的线性只是对非线性的一种简化或近似,或说是非线性的一种特例.控制科学发展至今,线性系统控制理论已经具有了相当完美的理论框架,并且在工程实践中也有着成功的应用.

但其必须建立被控对象或过程的精确线性模型的局限极大地制约了其进一步的发展.随着科学技术的进步,传统的线性控制理论已经越来越难以满足对系统控制性能的要求;因此,对非线性系统控制理论的研究,具有重要的理论意义和迫切的现实需求.

从 20 世纪 80 年代以来,非线性系统理论得到了蓬勃的发展.这一期间,以 A. Isidori 教授为代表的非线性系统理论先驱们将微分几何等现代数学工具成功应用到控制理论中.正如他在文献[1]中所预言:用微分几何法研究非线性系统所取得的成功,就像 50 年代用拉氏变换及复变函数理论对单输入单输出系统的研究,或 60 年代用线性代数对多变量系统的研究一样.微分几何方法的引入,给控制理论带来了突破性进展,诸多基于微分几何方法的控制理论被相继提出,并得到了广泛应用.

2003 年,意大利学者 A. Astolfi 等采用微分几何的概念提出了一种新的非线性系统控制方法—浸入与不变(immersion and invariance, I&I)<sup>[2-4]</sup>.与通常的非线性系统镇定需要 Lyapunov 函数不同,I&I 方法不需要构造 Lyapunov 函数.该方法通过选择浸入映射和设计控制律,使得被控系统的任何轨迹都是目标系统在该浸入映射下的像,并且设计的控制律能够使目标系统的像为不变吸引流形,从而保证整个系统的稳定性.该方法虽然提出时间不长,但由于其显著的非线性自适应性能,已经被广泛应用到各个方面<sup>[5-12]</sup>.本文专门讨论 I&I 方法的基本原理、设计方法及其在自适应理论上的拓展,并将其应用到未知点质量系统的自适应控制上.

1 浸入与不变稳定理论

1.1 基本原理

设系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \tag{1}$$

式中:系统状态  $x \in \mathbb{R}^n$ , 输入  $u \in \mathbb{R}^m$ .

考虑系统(1)的镇定问题,即寻找状态反馈控制律  $u = v(x)$ ,使  $x_*$  为闭环系统的(局部)渐近稳定平衡点.假设存在如下映射:

$$\alpha(\cdot): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \pi(\cdot): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, c(\cdot): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \varphi(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}, \psi(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^{n \times (n-p)} \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

其中  $p < n$ ,使得下面的 4 个假设成立<sup>[3]</sup>.

假设 1(目标系统) 存在系统  $\dot{\xi} = \alpha(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p$ , 具有(局部)渐近稳定平衡点  $\xi_*$ , 且  $x_* = \pi(\xi_*)$ .

假设 2(浸入条件) 对于所有  $\xi \in \mathbb{R}^p$ , 有

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \tag{2}$$

假设 3(隐流形) 下面集合恒等成立:

$$M = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\} = \\ \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p\}.$$

假设 4(流形吸引性与轨迹有界性) 存在系统

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(x) + g(x)\psi(x,z)), \\ \dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x,z), \tag{3}$$

各个状态都是有界的,且满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0. \tag{4}$$

那么,  $x_*$  就是闭环系统(5)的(局部)渐近稳定平衡点,也称为浸入与不变稳定.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x,z). \tag{5}$$

详细证明过程可参考文献[2-3].

从上面的叙述中可以看出,一个系统的 I&I 镇定可以分 2 步实现.首先,选择一个比原系统维数严格低的(局部)渐近稳定的目标系统,找到一个浸入映射  $x = \pi(\xi)$ ,使得假设 2 成立;其次,设计控制律,使得流形  $M$  为不变吸引流形,并且闭环系统有界.显然,应用 I&I 方法时,需要根据目标系统的选取,通过求解偏微分方程进而确定浸入映射  $\pi(\cdot)$ ,而这往往是比较困难的.幸运的是,很多情况下根据原系统和控制目标物理原理及系统理论的知识来选择目标系统可以大大简化该问题.该方法特别适用于对被控对象的降阶系统设计稳定控制器的情形<sup>[2-3]</sup>.图 1 是 I&I 方法的一个形象描述,原系统是一个  $n$  维系统(图中  $n=3$ ),按照 I&I 理论,目标系统可以选择 1 到  $n-1$  维任何一种情况.而基于 Lyapunov 直接法的控制器设计方法可以看作是 I&I 方法的一个特例,但设计控制律时需要选择 Lyapunov 函数  $V(x)$ ,该函数正定且其导数  $\dot{V} = \alpha(V) < 0$ .从 I&I 理论的角度看,I&I 方法是将一个在原点渐近稳定的一维目标系统  $\dot{V} = \alpha(V)$  浸入到高维的原系统中.

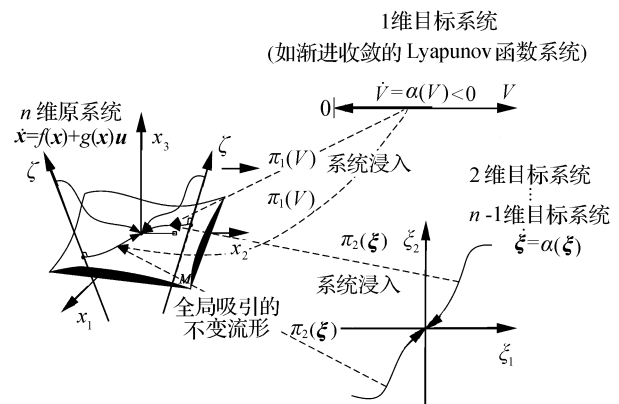


图 1 浸入与不变方法

Fig.1 Graphical illustration of the immersion and invariance approach

## 1.2 简单示例

下面通过一个简单的例子来详细说明 I&I 镇定的方法.考虑系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) = -x_1 - x_1^3 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (6)$$

式中:系统状态  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$ , 控制输入  $u \in \mathbf{R}$ . 简单地计算可以得出  $\dot{x}_1 = f(x_1, 0) = -x_1 - x_1^3$  在原点是渐近稳定的, 因此可取目标系统为  $\dot{\xi} = -\xi - \xi^3$  (参考文献[2], 这是对于此类系统选取目标系统的通常方法).

选择  $\pi_1(\xi) = \xi$ , 则偏微分方程(2)可以记为

$$\begin{cases} -\xi - \xi^3 + \pi_2(\xi)\xi = -\xi - \xi^3, \\ c(\xi) = \frac{\partial \pi_2(\xi)}{\partial \xi} \xi. \end{cases}$$

通过第 1 个方程求出  $\pi_2(\xi) = 0$ . 因此隐流形可以表示为  $\varphi(\mathbf{x}) = x_2$ .

至此, 假设 1、假设 2 和假设 3 都已验证成立. 根据式(3), 流形外(off-the-manifold)动态方程可以表示为  $\dot{z} = \dot{x}_2 = u$ . 取  $u = -K(x_1, x_2)z$ , 其中  $K(x_1, x_2) \geq k > 0$ , 于是闭环系统的状态方程可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -K(x_1, x_2)x_2, \\ \dot{z} = -K(x_1, x_2)z. \end{cases} \quad (7)$$

从式(7)的最后 2 个方程可以看出  $x_2$  和  $z$  收敛到零, 因此式(4)成立. 下面只需证明  $x_1$  有界即可完成 I&I 镇定设计. 取

$$W(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2,$$

求得

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 x_2 - K(x_1, x_2) x_2^2 \leq \\ &\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \gamma(x_1) x_1^2 x_2^2 + \\ &\frac{1}{\gamma(x_1)} \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right|^2 - K(x_1, x_2) x_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $\gamma(x_1) > 0$ .

取  $V(x_1) = x_1^2/2$ , 简单地推导可以得出, 当取  $\gamma(x_1) = 1$ ,  $K(x_1, x_2) - x_1^2 > 0$  时, 有  $\dot{W} < 0$ . 至此可证明  $x_1$  有界, 于是假设 4 成立. 从式(8)可以看出,  $V(x_1)$  不必选取  $\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$  的 Lyapunov 函数, 而只需保证  $V(x_1) \geq 0$ , 然后适当选取  $\gamma$  和  $K$  使  $\dot{W} < 0$  即可. 在某些情况下, 保证后者要比选取 Lyapunov 函数简单.

按照上述的推导过程, 可取

$$K(x_1, x_2) = r_1 x_1^2 + r_2.$$

式中:  $r_1 \geq 1$ ,  $r_2 > 0$ . 最终的 I&I 镇定控制律为

$$u_{\text{I\&I}} = -(r_1 x_1^2 + r_2) x_2.$$

另外, 原系统(6)的状态方程显然满足“下三角”形式, 因此可参考文献[13], 设计一种 Backstepping 控制律为

$$u_b = -2x_1^2 - 3x_2 + 2x_1^4 - 2x_1^2 x_2.$$

2 种控制律的仿真结果如图 2~4 所示. 初始状态都选为  $\mathbf{x} = (4, 3)^T$ , 其中图 2 和图 3 中 I&I 控制律的参数选为  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ . 可以看出, 采用 I&I 方法设计的控制律不仅形式更为简单, 而且镇定效果也很出色. 图 4 是 I&I 方法在不同参数下对应的状态轨迹图, 阴影部分代表不变流形  $z = 0$ , 轨迹图显示出不同参数下该流形都具有不变性和吸引性.

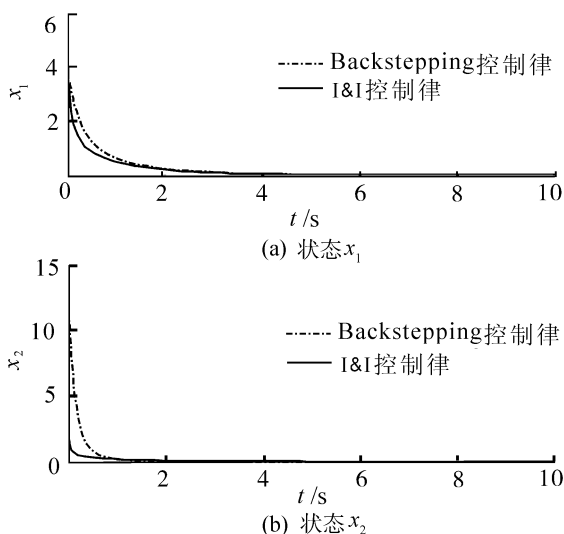


图 2 状态  $\mathbf{x}$  的变化曲线

Fig.2 Time histories of the states  $\mathbf{x}$

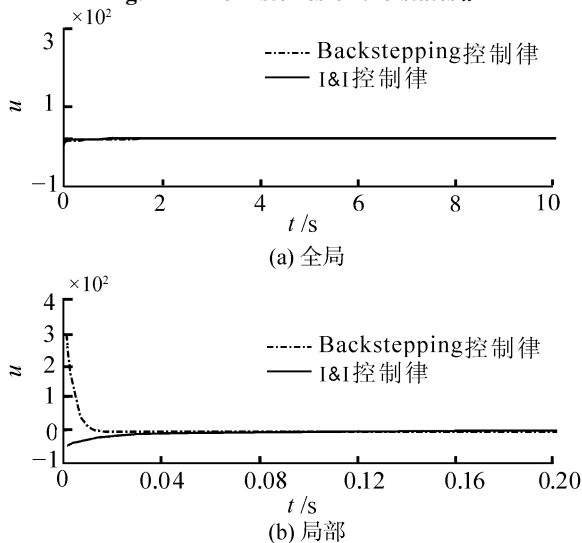


图 3 输入  $u$  的变化曲线

Fig.3 Time histories of the control input  $u$

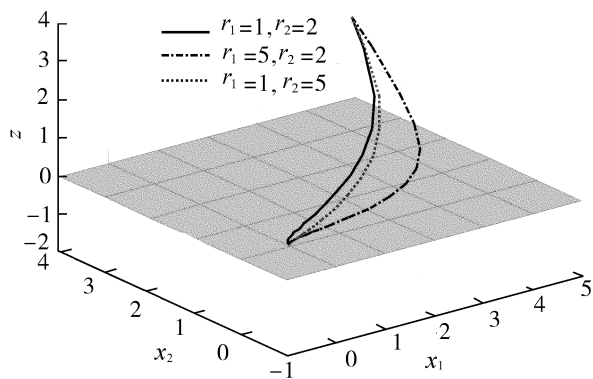


图 4 状态轨迹  
Fig.4 Trajectories of the states

2 浸入与不变自适应控制

2.1 基本原理

对于系统(1),若函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 中含有未知参数 $\theta \in \mathbf{R}^q$ ,那么系统的镇定问题就变成含有未知参数的自适应控制问题.定义如下假设:

假设 5(可镇定性) 存在一个参数化的函数 $v(x, \theta), \theta \in \mathbf{R}^q$ ,使得系统

$$\dot{x} = f_*(x) \triangleq f(x) + g(x)v(x, \theta)$$

有一个全局渐近稳定的平衡点 $x = x_*$ .

如果系统(1)满足假设 5,并且能找到函数 $\beta(\cdot)$ 和 $\omega(\cdot)$ ,使得如下扩展系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \hat{\theta} + \beta(x)), \\ \dot{\hat{\theta}} = \omega(x, \hat{\theta}). \end{cases}$$

关于目标系统 $\Sigma_\tau: \dot{\xi} = f_*(\xi)$ 是 I&I 稳定的,那么系统(1)就被称为自适应浸入与不变(I&I)可镇定的<sup>[2]</sup>.

在 I&I 自适应方法中,系统的未知参数 $\theta$ 用 $\hat{\theta} + \beta(x)$ 来估计,相比传统的基于确定等价原则的自适应控制方法多出额外一项 $\beta(x)$ . $\beta(x)$ 的引入使得整个参数估计律由单一的积分作用转变为比例积分作用,设计估计律时更加灵活有效.另外,I&I 理论通过保持流形的不变性与吸引性来保证整个系统的稳定性,该思想同样也可以应用到参数估计自适应律的设计上.通常在 I&I 自适应设计中选取未知参数的估计值和真实值之间的差值作为不变流形,通过保持该流形的不变与吸引性,可以保证估计误差有界甚至收敛到零.

2.2 简单示例

下面通过一个简单的例子来说明 I&I 自适应控

制方法与传统的基于确定等价原则的自适应控制方法的不同.

考虑系统:

$$\dot{x} = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + u. \tag{9}$$

式中: $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$ 是未知常数,设计控制律使闭环系统(9)在原点渐近稳定平衡.

如果采用基于确定等价原则的自适应控制方法,可以设计状态反馈控制律和参数估计自适应律:

$$\begin{cases} u = -\hat{\theta}_1 x^2 - \hat{\theta}_2 x - cx, \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \omega_1, \dot{\hat{\theta}}_2 = \omega_2. \end{cases}$$

式中: $c > 0$ .选择 Lyapunov 函数:

$$V(x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}r_1(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}r_2(\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2.$$

式中: $r_1 > 0, r_2 > 0$ ,求导整理得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\hat{\theta}_1 - \theta_1)(x^3 - r_1\omega_1) + \\ &(\hat{\theta}_2 - \theta_2)(x^2 - r_2\omega_2) - cx^2. \end{aligned}$$

因此自适应律可以选为

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{r_1}x^3, \\ \omega_2 = \frac{1}{r_2}x^2. \end{cases}$$

此时有 $\dot{V} = -cx^2$ .

上述方法可以保证 $(x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的.但它的一个缺点是参数估计误差 $\hat{\theta} - \theta$ 的动态变化过程无法调节,而这一估计误差有时会严重影响到闭环系统的瞬态响应.而 I&I 自适应镇定可以很好地解决这个问题.

考虑如下扩展系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + u, \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \omega_1, \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \omega_2. \end{cases} \tag{10}$$

定义流形:

$$M = \{ (x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \in \mathbf{R}^3 \mid \hat{\theta}_1 - \theta_1 + \beta_1(x) = 0, \hat{\theta}_2 - \theta_2 + \beta_2(x) = 0 \}.$$

式中: $\beta_1(x)$ 和 $\beta_2(x)$ 是待选取的函数.若该流形能够保持不变性,系统(10)的第 1 个式子可以表示为

$$\dot{x} = (\hat{\theta}_1 + \beta_1(x))x^2 + (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x))x + u. \tag{11}$$

此时,系统(11)中的各个参数都是已知的,因此可以设计控制律:

$$u = -cx - (\hat{\theta}_1 + \beta_1(x))x^2 - (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x))x.$$

式中:  $c > 0$ .

现在只需设计自适应律  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  和额外项  $\beta_1(x)$ 、 $\beta_2(x)$ ,使得  $M$  流形具有不变性和吸引力,就可以保证闭环系统在原点是渐近稳定的.流形外的方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1 + \beta_1(x), \\ \dot{z}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2 + \beta_2(x). \end{cases} \tag{12}$$

对式(12)求导,得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \omega_1 + \frac{\partial \beta_1(x)}{\partial x}((\hat{\theta}_1 + \beta_1(x) - z_1)x^2 + (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x) - z_2)x + u), \\ \dot{z}_2 = \omega_2 + \frac{\partial \beta_2(x)}{\partial x}((\hat{\theta}_1 + \beta_1(x) - z_1)x^2 + (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x) - z_2)x + u). \end{cases} \tag{13}$$

选取

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{\partial \beta_1(x)}{\partial x}((\hat{\theta}_1 + \beta_1(x))x^2 + (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x))x + u), \\ \omega_2 = -\frac{\partial \beta_2(x)}{\partial x}((\hat{\theta}_1 + \beta_1(x))x^2 + (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x))x + u). \end{cases} \tag{14}$$

将式(14)代入式(13),得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{\partial \beta_1(x)}{\partial x}(z_1x^2 + z_2x), \\ \dot{z}_2 = -\frac{\partial \beta_2(x)}{\partial x}(z_1x^2 + z_2x). \end{cases} \tag{15}$$

对于式(15),考虑 Lyapunov 函数:

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2,$$

有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{\partial \beta_1(x)}{\partial x}(z_1x^2 + z_2x)z_1 - \\ & \frac{\partial \beta_2(x)}{\partial x}(z_1x^2 + z_2x)z_2. \end{aligned} \tag{16}$$

取

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta_1(x)}{\partial x} = rx^2, \\ \frac{\partial \beta_2(x)}{\partial x} = rx. \end{cases}$$

式中:  $r > 0$ ,代入式(16),有

$$\dot{V} = -r(z_1x^2 + z_2x)^2 \leq 0$$

至此,采用 I&I 自适应方法的控制律设计完毕.

2 种控制律的仿真结果如图 5 和图 6.初始状态为  $x = 3$ ,未知参数的真值为  $(\theta_1, \theta_2) = (5, 3)$ ,但初始估计值都选为零.基于确定等价原则的自适应控制律参数选为  $r_1 = r_2 = 1, c = 2$ ,I&I 自适应控制律参数选为  $r = 1, c = 2$ .从图中可以看出,I&I 自适应控制器比传统的自适应控制器镇定效果更佳,而且对未知参数的估计也更为准确.需要说明的是,I&I 自适应控制中,参数估计值并不能绝对收敛到真值,有关这个问题可参见文献[12,14].

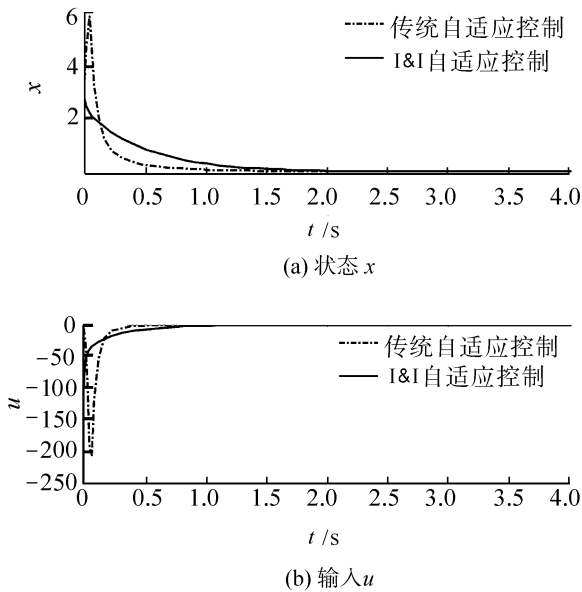


图 5 状态  $x$  及输入  $u$  的变化曲线  
Fig.5 Time histories of the states  $x$  and the control input  $u$

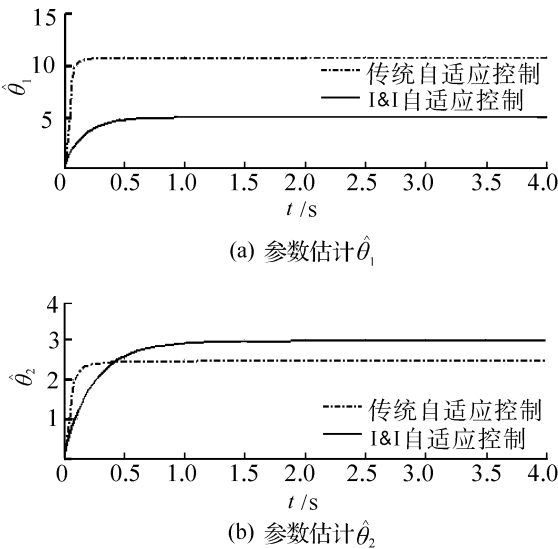


图 6 参数估计曲线  
Fig.6 Parameter estimate curves



3 基于 I&I 的未知点质量系统非线性自适应控制

3.1 模型描述

考虑一个水平放置的未知点质量系统  $m$  受到控制输入力  $u$ 、未知常值干扰力  $d$ 、未知粘滞阻力  $k_v \dot{x}$  以及未知弹性力  $k_p x$  的作用.按照牛顿定律,建立模型<sup>[15]</sup>:

$$m\ddot{x} = u + d - k_p x - k_v \dot{x}. \tag{17}$$

式中:  $m$ 、 $k_v$ 、 $k_p$  都是未知正常数,  $d$  是未知常数.控制任务为设计反馈控制律,使  $x$  渐近跟踪参考信号  $x_r$ .

3.2 I&I 自适应控制律设计

模型(17)可以表示成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \theta_2 u + \varphi^T \theta_1. \end{cases}$$

式中:  $x_1 = x$ ,  $\theta_2 = 1/m$ ,  $\varphi = (-x_1, -x_2, 1)^T$ ,  $\theta_1 = (k_p/m, k_v/m, d/m)^T$ .  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  为未知参数,取自适应律为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \omega_1, \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \omega_2. \end{cases}$$

并且令  $\theta_1$ 、 $\theta_2^{-1}$  的估计分别为  $\hat{\theta}_1 + \beta_1(x)$ 、 $\hat{\theta}_2 + \beta_2(x, \hat{\theta}_1)$ , 则未知参数的估计误差为

$$\begin{cases} z_1 = \hat{\theta}_1 + \beta_1(x) - \theta_1, \\ z_2 = \hat{\theta}_2 + \beta_2(x, \hat{\theta}_1) - \theta_2^{-1}. \end{cases} \tag{18}$$

跟踪误差设为  $\tilde{x} = x_1 - x_r$ . 若存在

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0, \lambda > 0,$$

则跟踪误差渐近收敛到零.对上式求导,整理得

$$\dot{s} = (\theta_2 u + \varphi^T \theta_1) - \ddot{x}_r + \lambda(x_2 - \dot{x}_r). \tag{19}$$

取控制律

$$u = (\hat{\theta}_2 + \beta_2(x, \hat{\theta}_1))v. \tag{20}$$

将式(18)和式(20)代入式(19),得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \theta_2 z_2 v + v + \varphi^T (\hat{\theta}_1 + \beta_1(x) - z_1) - \\ &\quad \ddot{x}_r + \lambda(x_2 - \dot{x}_r). \end{aligned} \tag{21}$$

可选取

$$v = -(\varphi^T (\hat{\theta}_1 + \beta_1(x)) - \ddot{x}_r + \lambda(x_2 - \dot{x}_r) + cs). \tag{22}$$

式中:  $c > 0$ .

接下来需要设计参数自适应律  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  以及额外项  $\beta_1(x)$ 、 $\beta_2(x, \hat{\theta}_1)$ .

对式(18)求导,整理得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \omega_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} (\varphi^T \theta_1 + \theta_2 z_2 v + v), \\ \dot{z}_2 = \omega_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} (\varphi^T \theta_1 + \theta_2 z_2 v + v) + \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{\theta}_1} \omega_1. \end{cases} \tag{23}$$

取自适应律:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} (\varphi^T (\hat{\theta}_1 + \beta_1) + v), \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = -\frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} (\varphi^T (\hat{\theta}_1 + \beta_1) + v) - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{\theta}_1} \omega_1. \end{cases} \tag{24}$$

将式(24)代入式(23),得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} (\varphi^T z_1 - \theta_2 z_2 v), \\ \dot{z}_2 = -\frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} (\varphi^T z_1 - \theta_2 z_2 v). \end{cases} \tag{25}$$

取

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} = r_1 \varphi, \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} = -r_2 v. \end{cases}$$

式中:  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ .整理得

$$\begin{cases} \beta_1 = r_1 (-x_1 x_2, -\frac{x_2^2}{2}, x_2)^T, \\ \beta_2 = r_2 ((-x_1 x_2, -\frac{x_2^2}{2}, x_2) \hat{\theta}_1 + (c + \lambda) \frac{x_2^2}{2} + (-c \dot{x}_r + c \lambda x_1 - c \lambda x_r - \ddot{x}_r - \lambda \dot{x}_r) x_2 + r_1 r_2 (\frac{x_1^2 x_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{8} + \frac{x_2^2}{2})). \end{cases}$$

将  $\beta_1$  代入式(24)的第1个式子可以得到  $\omega_1$ , 然后根据式(22)可以求出  $v$ , 最后可以求出  $\beta_2$ 、 $\omega_2$ .

3.3 稳定性分析

将式(21)和式(25)重新整理,得

$$\begin{cases} \dot{s} = -cs - \Phi^T(x, \hat{\theta}_1)z, \\ \dot{z} = -\Gamma \Phi(x, \hat{\theta}_1) \Phi^T(x, \hat{\theta}_1)z. \end{cases}$$

式中:  $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ ,  $\Phi(x, \hat{\theta}_1) = (\varphi^T, -\theta_2 v)^T$ ,  $\Gamma = \text{diag}(r_1 I_{3 \times 3}, r_2 \theta_2^{-1})$ .

取 Lyapunov 函数:

$$V(s, z) = \frac{1}{2} s^2 + c^{-1} z^T \Gamma^{-1} z.$$

求导整理得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -cs^2 - s\Phi(x, \hat{\theta}_1)z - 2c^{-1}(\Phi(x, \hat{\theta}_1)z)^2 \leq \\ &-cs^2 + \frac{1}{2}cs^2 + \frac{1}{2}c^{-1}(\Phi(x, \hat{\theta}_1)z)^2 - 2c^{-1}(\Phi(x, \hat{\theta}_1)z)^2 = \\ &-\frac{1}{2}cs^2 - \frac{3}{2}c^{-1}(\Phi(x, \hat{\theta}_1)z)^2. \end{aligned}$$

因此,在选定  $c > 0$  后,  $s$ 、 $z$  在原点都是渐近稳定,进而可知跟踪误差  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ .

### 3.4 仿真分析

仿真实验采用文献[14]中所设计的基于确定等价原则的传统自适应控制器,与 I&I 自适应控制器比较,仿真结果如图 7~10.未知点质量模型的初始状态为  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , 参数选为  $(m, k_p, k_v, d) = (10, 1, 1, 1)$ , 但初始估计值都选为零,参考指令为  $x_r = 10$ .文献[15]中自适应控制律参数选为  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2, k_3 = 1$ , I&I 自适应控制律参数选为  $r_1 = 1, c = 2, r_2 = 1, \lambda = 2$ .

图 7(a)、(b)和(c)分别是状态  $x_1$ 、 $x_2$  和输入  $u$  在 2 种控制律下随时间的变化曲线.可以看出,在输入允许的情况下, I&I 自适应控制律使得状态  $x_1$  更快地跟踪到参考值,显示出更好的控制效果.图 8(a)和(b)分别是  $s$  和  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)z$  随时间的变化曲线.曲线显示  $s$  和  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)z$  最终都收敛于零,按照上节推导过程可知,这是跟踪误差  $\tilde{x}$  趋于零的必要条件.图 9 是 I&I 自适应控制方法的状态轨迹图,阴影部分代表流形  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)z = 0$ , 可以看出流形对状态轨迹具有吸引力,并且当达到  $(x_1, x_2) = (10, 0)$  后,系统状态进入流形并维持不变,即流形不变.应当说明的是,  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)z = 0$  并不意味着  $z = 0$ , 也就是说并不能保证参数估计到真值.图 10 进一步说明了这个问题, I&I 自适应控制律的参数估计值收敛到某一个固定值,而并非一定是真实值.同样,关于这个问题可参考文献[12,14].

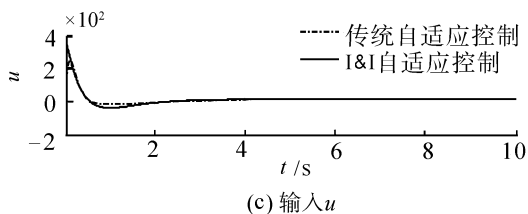
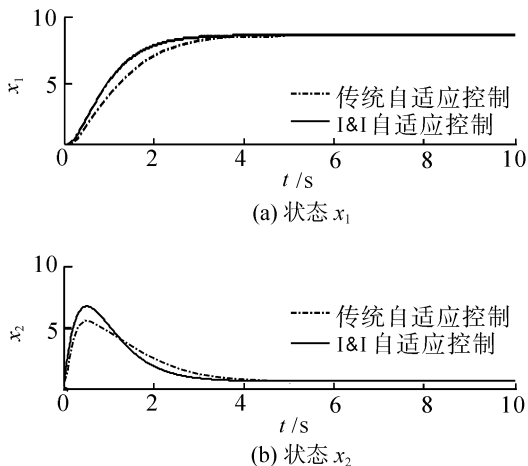


图 7 状态  $x$  和输入  $u$  变化曲线

Fig. 7 Time histories of the states and the control input

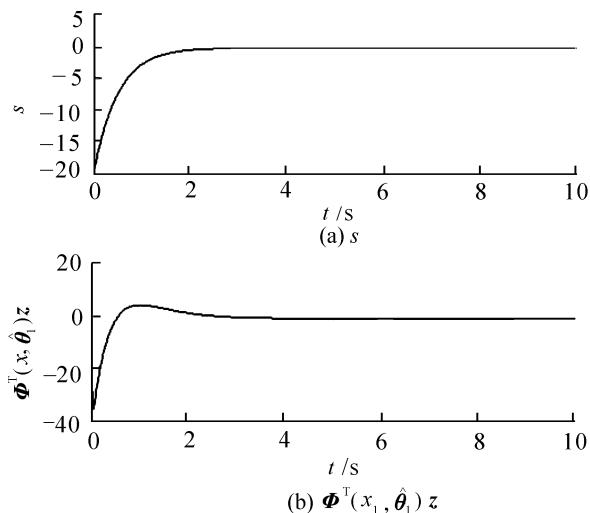


图 8  $s$  和  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)z$  的变化曲线

Fig.8 Time histories of  $s$  and  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)z$

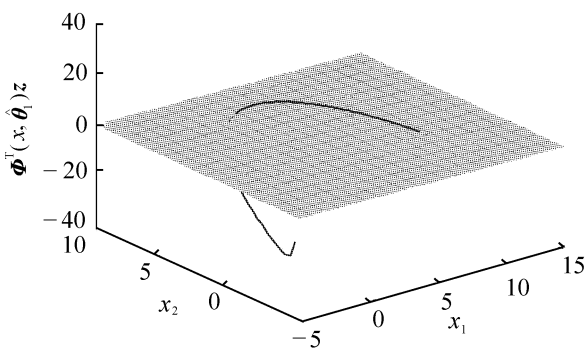


图 9 状态轨迹

Fig.9 Trajectory of the states

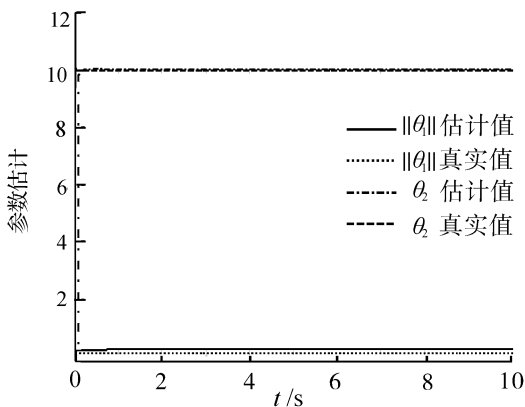


图 10 参数估计曲线

Fig.10 Parameter estimate curves

## 4 结束语

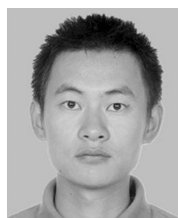
浸入与流形不变方法在一定程度上解决了构造控制 Lyapunov 函数的难题,非常适用于能够对降阶系统设计稳定控制器的情形.在自适应控制方面,I&I 理论不依赖于确定等价原则,即参数的估计值并不完全由参数自适应律获得,而是引入一个额外非线性函数,提高了参数估计的有效性.另外,I&I 自适应控制器包括控制律和参数估计器 2 个独立的模块,可以分别进行设计,这样使得控制参数的调整也比基于 Lyapunov 设计理论容易许多.将该方法应用于未知点质量系统,仿真结果表明了该方法能有效地处理模型的未知参数带来的不确定性.需要指出的是,该方法也可扩展用于非线性参数化模型及带有其他不确定性的非线性系统中.

## 参考文献:

- [1] ISIDORI A. Nonlinear control systems: an introduction[M]. Berlin: Springer, 1985: III-IV.
- [2] ASTOLFI A, ORTEGA R. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(4): 590-606.
- [3] ASTOLFI A, KARAGIANNIS D, ORTEGA R. Nonlinear and adaptive control with applications[M]. London: Springer, 2007: 15-54.
- [4] ASTOLFI A, KARAGIANNIS D, ORTEGA R. Towards applied nonlinear adaptive control[J]. Annual Reviews in Control, 2008, 32(2): 136-148.
- [5] 尚安利,梁勇,顾文锦,等.导弹非线性控制系统设计方法研究[J].飞行力学, 2004, 22(4): 41-44.  
SHANG Anli, LIANG Yong, GU Wenjin, et al. Study of missile nonlinear control system design[J]. Flight Dynamics, 2004, 22(4): 41-44.
- [6] SARRAS I. On the stabilization of nonholonomic mechanical systems via immersion and invariance[C]//The 18th IFAC World Congress. Milano, Italy, 2011: 7227-7232.
- [7] ASTOLFI A, ORTEGA R, VENKATRAMAN A. A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints[J]. Automatica, 2010, 46(1): 182-189.
- [8] KOBAYASHI Y, TAKAHASHI M. Design of nonlinear adaptive flight control system based on immersion and invariance[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Chicago, USA, 2009: AIAA-2009-6174.
- [9] SONNEVELDT L, OORT E, CHU Q, et al. Immersion and invariance based nonlinear adaptive flight control[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Toronto, Canada, 2010: AIAA-2010-7690.

- [10] LIU Xiangbin, ORTEGA R, SU Hongye, et al. Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(9): 2209-2214.
- [11] 樊小红,巨永锋,高云霞. Markov 跳变系统的稳定自适应控制研究[J]. 计算机工程与设计, 2011, 32(6): 2104-2107.  
FAN Xiaohong, JU Yongfeng, GAO Yunxia. Stable adaptive control for class of Markov jump system[J]. Computer Engineering and Design, 2011, 32(6): 2104-2107.
- [12] LEE K, SINGH S. Noncertainty-equivalent adaptive missile control via immersion and invariance[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(3): 655-665.
- [13] KHALIL H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002: 589-593.
- [14] SEO D, AKELLA M. High-performance spacecraft adaptive attitude-tracking control through attracting-manifold design[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(4): 884-891.
- [15] MARINO R, TOMEI P. 非线性系统设计——微分几何、自适应及鲁棒控制[M]. 姚郁,贺风华,译.北京:电子工业出版社, 2006: 108-109.

### 作者简介:



刘振,男,1987 年生,博士研究生,主要研究方向为自适应控制、智能控制、非线性控制。



谭湘敏,男,1982 年生,高级工程师,主要研究方向为自适应控制、智能机器人技术,发表学术论文 10 余篇。



易建强,男,1963 年生,研究员,博士生导师,IEEE 高级会员,担任多个学术期刊的编委,主要研究方向为智能控制方法、自适应控制方法、智能机器人技术等.承担与完成了国家“863”计划项目、国家自然科学基金项目、中科院

知识创新项目及企业合作项目等多项.发表学术论文 300 余篇,其中被 SCI 检索 50 余篇、EI 检索 200 余篇,获授权国家发明专利和实用新型专利 30 余项,合作出版专著 1 部。