第4卷第4期 智 能 系 统 学 报 Vol.4 No.4
2009年8月 CAAI Transactions on Intelligent Systems Aug.2009

doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2009.04.002

SISO Mamdani模糊系统作为函数逼近器的必要条件

孙富春,杨 晋,刘华平
(清华大学智能技术与系统国家重点实验室,北京100084)

摘 要模糊系统已被证明是通用逼近器,但实现高精度通常需要大量规则.模糊系统满足给定精度的必要条件能指导最优系统的构造,如输入输出模糊集、模糊规则的选取.研究了单输入单输出(SISO)Mamdani模糊系统在给定逼近精度下作为函数逼近器的必要条件.由于通用型 SISO Mamdani模糊系统在划分子区间单调,所以模糊系统的最优配置是输入域的划分数至少为系统输出的单调性变化次数.当模糊系统满足给定逼近精度时,通过分析目标函数的局部特性,基于目标函数的极点,建立了SISO Mamdanmi模糊系统的必要条件.更重要的是证明了现有的必要条件仅仅是该文结论的一种特例.最后,使用数值实例来验证该文的结论,分析模糊系统作为函数逼近器的优劣.

关键词:模糊系统;必要条件;模糊规则;逼近精度
中图分类号:TP18 文献标识码:A 文章编号:1673-4785(2009)04-0288-07

Preconditions for SISO Mamdani fuzzy systems to perform as function approximators

SUN Fu-chun,YANG Jin,LIU Hua-ping
(State Key Laboratory of Intelligent Technology and System,Tsinghua University,Beiing 100084,China)

Abstract: It has been proven that fuzzy systems are universal approximators. However,a large number of rules are usually needed for high accuracy. Knowledge of conditions necessary for a fuzzy system to have a given level of accuracy can provide guidance for design of an optimal system,such as selection of optimal input/output fuzzy sets and fuzzy rules. The necessary conditions for a single-input single-output(SISO) Mamdani fuzzy system to operate as a function approximator subject to a given precision were discussed. Since the general SISO Mamdani fuzzy system is monotonic at subintervals, its optimal configuration is when the number of division points is not less than the number of times its monotonicity changes. Thus by analyzing the local characteristics of the object function under the fuzzy system, necessary conditions for a SISO Mamdani fuzzy systems were obtained in accordance with the extrema of the object function. Furthermore, it was shown that the necessary conditions found in prior documents are only a special case of those described here. Finally, simulation examples were given to verify our conclusions and analyze the performance as well as the limitations of a fuzzy system as a function approximator.

Keywords: fuzzy systems; necessary conditions; fuzzy rules; approximation accuracy

自1965年Zadch[1]提出模糊集合的概念以来,模糊理论及其应用技术得到了迅猛的发展.特别是模糊系统具有直观、有效地表示非线性系统的优势,使得模糊理论在控制领域得到了大规模的应用,并掀起了新的一轮研究热潮.目前,广泛的应用模糊系统主要有两大类:Mamdani模糊模型与Takagi-Sugeno(T-S)模糊模型.2类模型的主要区别是 Mamdani模型的后件是单点模糊集,而 TS模糊模型的后件是线性函数.在许多应用中,涉及的模糊系统都可视为基于模糊规则的函数逼近器.近年来,有很多学者对此展开了广泛而深入的研究,证明了多类模糊系统是通用逼近器.还有学者建立了一些模糊系统作为函数逼近器的充分条件和必要条件.而研究模糊

收稿日期:2009-01-01.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(90716021,60621062).
通信作者:杨 晋.E-mail:yangjin06@mails.tsinghua.edu.cn.

系统满足给定精度的必要条件更符合实际需求,它为模糊系统的最优设计提供指导原则,为模糊系统的广泛应用提供理论支持.

1　相关工作

模糊控制系统性能的优劣关键在于模糊系统逼近期望控制的逼近程度. 因此,研究模糊控制的首要问题是研究模糊系统的逼近性[2].

有关模糊系统通用逼近性的第一个重要结果由王立新提出,他采用 Stone-Weierstrass 定理,证明了采用高斯隶属度函数、乘积推理和中心平均解模糊法的一类模糊系统是万能逼近器[3]. 紧接着,许多学者从不同方面证明多类模糊系统是通用函数逼近器[4-5]. 但这些研究主要集中在“存在性问题”,即给定一个紧集上的连续函数,存在一模糊系统能以任意精度一致逼近该函数. 结合这些文献的推导发现:给定待逼近函数,随着逼近精度的提高,模糊系统需要更多的模糊规则才能实现逼近精度. 特别是在高维空间,还存在“维数灾”的问题. 模糊系统规模越大,需要的存储空间和计算量就越多. 这势必给模糊系统的设计和使用带来很大困难.

意识到这一点,如何构造使用尽可能少的模糊规则来实现逼近精度成为模糊逼近的一个研究热点和难点. 因此,有学者采用数值方法裁减冗余规则,如正交变换[6]、树搜索[7]等. 为了给出构造最优模糊系统的指导原则,许多学者对模糊系统的充分条件和必要条件进行了深入研究. 模糊系统逼近的充分条件是指:对于一个给定的紧集上的连续函数,怎样设计隶属度函数以及需要多少条模糊规则,模糊系统才能实现给定的逼近精度. 这方面的第一个重要结论是 Ying 在 1994 年给出的[8]. 其核心思想是采用 2 步法:第 1 步是利用多项式一致逼近紧集上的连续实函数;第 2 步是使用模糊系统逼近多项式函数. 在模糊系统逼近多项式函数时,对多项式进行二项式展开,推导了模糊系统实现逼近精度所需要的模糊规则数,即模糊系统逼近的充分条件. 基于同样的思想, Ying 得出了 T-S 模糊系统的充分条件[9]. 同样采用 2 步法,文献[10]在模糊系统逼近多项式函数时,利用多项式函数的泰勒级数,分别推导了模糊系统的充分条件的明晰表达式,并证明该方法要优于 Ying 的结论. 使用泰勒级数还有一个优点,就是当期望函数可导时,可避开 2 步法,直接对期望函数进行泰勒级数展开,就可得到模糊系统的充分条件. 这样不仅减少了计算,还避免了 2 步法中多项式函数一致逼近期望函数时所引入的误差,从而显著改进了模糊系统充分条件的性能. 2007 年,文献[11]考虑期望函数的局部特性,给出了 SISO TS 模糊系统充分条件的动态构造方法,进一步优化了模糊系统的充分条件. 纵观这些方法,虽然模糊系统的充分条件不断改进,但代价是不断增加计算量.

充分条件给出了构造简洁模糊系统的途径. 但存在许多局限性,如 2 步法引入二次误差势必影响其优越性. 此外,在构造实际系统中,充分条件所需的一致逼近目标函数的多项式函数和目标函数的导数信息都是很难得到的. 那么,是否存在更优的满足逼近精度的模糊系统呢? 最优模糊系统具备哪些特性呢? 答案就在模糊系统的必要条件中,模糊系统的必要条件就是模糊系统实现逼近精度的最优配置(最少模糊规则数). 目前这方面的研究很少. 文献[12]根据通用型 SISO Mamdani 模糊系统在划分子区间单调,证明模糊系统作为通用函数逼近器的必要条件是:模糊系统实现一致逼近所需规则数与期望函数的极点相关,而与函数的具体形式无关. 基于类似思想,文献[13-14]给出了 TS 模糊系统和 MISO Mamdani 模糊系统在给定隶属度函数下的必要条件. 经过综合分析发现:这些必要条件的成立仅限于逼近精度趋于零;当给定逼近精度时,这些结论不再成立. 而在实际应用中,设计系统的目的是设计一模糊系统,使之以给定精度逼近期望函数. 为此, Wang[15]从数据对提取模糊规则时,采用几何工具给出了模糊系统实现给定逼近精度的最小系统配置的动态构造方法. 这种方法虽然首次研究了逼近精度给定的情况,但他是基于数据对的,不能保证模糊系统的整体逼近性,也不能分析模糊系统的逼近性.

因此,研究模糊系统满足给定逼近精度的必要条件更具有理论意义和应用价值. 本文研究了通用型 SISO Mamdani 模糊系统在给定逼近精度下的必要条件. 因为通用型 SISO Mamdani 模糊系统在划分子区间是单调的,所以模糊系统的最优配置应该具有以下特点:输入域的划分点个数最少为模糊系统输出单调性的变化次数. 然后通过分析模糊系统输出和目标函数的特性,建立了通用型 SISO Mamdani 模糊系统的必要条件. 这个必要条件不仅给出了模糊系统输入域划分点的选择原则,还能指导输入模糊集隶属度函数的设计. 同时,本文证明了文献[12]中的结果是本文结论的一种特例. 最后,

通过数值算例验证了本文结论的正确性和分析模糊系统作为函数逼近器的优劣.

2 SISO Mamdani 模糊系统的配置和问题描述

2.1 通用型 SISO Mamdani 模糊系统的配置

定待逼近函数 $f(x)$ 是定义在 $U=[a,b]$ 上的连续实函数. 假设模糊系统的输入域 U 被划分为 N 个子区间(S_i 是区间端点):

$$a = S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_N = b,$$

那么模糊系统有 $N+1$ 个完备的、标准的和一致的模糊集来模糊化输入真值[16],如图 1 所示. 每个输入模糊集 $A_i(0 \leqslant i \leqslant N)$ 对应的隶属度函数 $\mu_i(x)$ 定义如下:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} I_i(x), & x \in [S_{i-1}, \alpha_{i-1}); \\ 1, & x \in [\alpha_{i-1}, \beta_{i+1}); \\ D_i(x), & x \in (\beta_{i+1}, S_{i+1}); \\ 0, & x \in U/[S_{i-1}, S_{i+1}). \end{cases} \tag{1}$$

式中:$I_i(x)$ 是连续单调递增的,在 $x=S_{i-1}$ 时,$I_i(x)$ 为 0,在 $x=\alpha_{i-1}$ 时,$I_i(x)$ 为 1;$D_i(x)$ 是连续单调递减的,在 $x=\beta_{i+1}$ 时,$D_i(x)$ 为 1,在 $x=S_{i+1}$ 时,$D_i(x)$ 为 0.

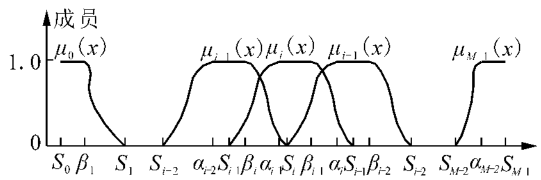


图 1　输入模糊集隶属度函数的定义

Fig. 1　Illustrative definitions of input fuzzy sets

通用型 SISO Mamdani 模糊系统的 $N+1$ 条模糊规则定义如下:

$$R_i: \text{IF } x \text{ is } A_i, \text{THEN } y \text{ is } B_i, i = 0,1,\cdots,N. \tag{2}$$

式中:A_i 是输入模糊集;B_i 是单点输出模糊集,它的隶属度函数在 $y=y_i$(任意常值)处取值 1,其他地方都为 0.

本文的模糊系统采用乘积推理和中心平均解模糊法[16]. 那么系统的输出为

$$F(x) = \frac{\sum_i \mu_i(x) y_i}{\sum_i \mu_i(x)}. \tag{3}$$

2.2 模糊系统必要条件的描述

记定义在紧集 $U=[a,b]$ 上的连续实函数为 $f(x)$,ε 是给定逼近精度. 那么总是存在式(3)定义的,且系统输出 $F(x)$ 满足

$$\| F(x) - f(x) \|_\infty \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

的模糊系统必须具备必要条件,即模糊系统的必要条件. 其中无穷范数 $\| * \|_\infty$ 的定义为

$$\| g(x) \|_\infty = \sup_{x \in U} | g(x) |.$$

3 通用型 SISO Mamdani 模糊系统的必要条件和比较分析

3.1 通用型 SISO Mamdani 模糊系统的必要条件

为进一步推导方便,首先给出以下引理.

引理 1[12]　式(3)定义的模糊系统在输入域是连续函数.

引理 2　式(3)定义的函数 $F(x)$ 在子区间 $[S_{i-1}, S_i]$,$0 < i \leqslant N$ 上是单调的.

证明　在任意划分子区间 $[S_{i-1}, S_i]$ 上,由于只有 $\mu_{i-1}(x)$ 和 $\mu_i(x)$ 取值非零,因此模糊系统只激活 2 条模糊规则:

$$R_{i-1}: \text{IF } x \text{ is } A_{i-1}, \text{ THEN } y \text{ is } B_{i-1},$$

$$R_i: \text{IF } x \text{ is } A_i, \text{ THEN } y \text{ is } B_i,$$

那么模糊系统的输出为

$$F(x) = \frac{\mu_{i-1}(x) y_{i-1} + \mu_i(x) y_i}{\mu_{i-1}(x) + \mu_i(x)} = y_{i-1} + \varphi(x)(y_i - y_{i-1}). \tag{5}$$

式中:

$$\varphi(x) = \frac{\mu_i(x)}{\mu_{i-1}(x) + \mu_i(x)} = \begin{cases} 0, & \mu_i(x) = 0; \\ \dfrac{1}{1 + \mu_{i-1}(x)/\mu_i(x)}, & \mu_i(x) \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

当 x 从 S_{i-1} 增加到 S_i 时,$\mu_{i-1}(x)$ 从 1 单调减小到 0,而 $\mu_i(x)$ 从 0 单调增加到 1. 所以式(6)定义的 $\varphi(x)$ 从 0 单调增加到 1.

因此,根据式(5),当 $y_i > y_{i-1}$ 时,模糊系统的输出 $F(x)$ 在 $[S_{i-1}, S_i]$ 上单调增加;否则,$F(x)$ 单调递减,即 $F(x)$ 在子区间 $[S_{i-1}, S_i]$($0 < i \leqslant N$)是单调的.

注:如果 $y_i = y_{i-1}$,那么模糊系统在划分子区间上满足 $F(x) = y$.

根据引理 2 给出的通用型 SISO Mamdani 模糊系统输出的单调特性,模糊系统的最优配置应该是:模糊系统输入区间的划分点个数至少为模糊系统输出单调性的变化次数. 这个结论可以通过以下方式

验证.

对模糊系统输出 $F(x)$ 的每个单调区间 $[a_s, a_e]$,不妨假设是单调递增的,根据扇区非线性设计 2 条模糊规则:

$$\mu_1(x) = \frac{F(a_e) - F(x)}{F(a_e) - F(a_s)}, y_1 = F(a_s), \quad (7)$$

$$\mu_2(x) = \frac{F(x) - F(a_s)}{F(a_e) - F(a_s)}, y_2 = F(a_e). \quad (8)$$

即可使模糊系统的输出为期望输出.

根据引理 2,可得到以下结论:

定理 1　假设式(3)定义的模糊系统 $F(x)$ 在输入域 U 上能以给定精度 ε 逼近期望函数 $f(x)$. 如果存在 $x_1 < x_2 < x_3 \in U$, 使得 $f(x_1) - f(x) > 2\varepsilon$, $f(x_2) - f(x_3) < -2\varepsilon$, 或者 $f(x_1) - f(x_2) < -2\varepsilon$, $f(x_2) - f(x_3) > 2\varepsilon$, 那么模糊系统在 $[x_1, x_3]$ 内存在划分点.

证明　为了不失一般性,假设存在 $x_1 < x_2 < x_3 \in U$ 使得

$$f(x_1) - f(x_2) > 2\varepsilon,$$
$$f(x_2) - f(x_3) < -2\varepsilon. \quad (9)$$

首先使用反证法证明:在 $[x_1, x_2]$ 上存在子区间 $[x_{i1}, x_{i2}]$ 使得模糊系统的输出 $F(x)$ 单调递减.

假设使模糊系统输出 $F(x)$ 单调递减的子区间 $[x_{i1}, x_{i2}]$ 不存在,那么 $F(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调递增,故可得

$$F(x_1) \leqslant F(x_2). \quad (10)$$

根据定理的假设前提:模糊系统 $F(x)$ 能以给定精度 ε 逼近目标函数,知

$$-\varepsilon \leqslant f(x_1) - F(x_1) \leqslant \varepsilon, \quad (11)$$

$$-\varepsilon \leqslant f(x_2) - F(x_2) \leqslant \varepsilon. \quad (12)$$

将式(12)减式(11)得

$$f(x_1) - f(x_2) \leqslant 2\varepsilon + F(x_1) - F(x_2). \quad (13)$$

然后,将式(13)减去式(10),得

$$f(x_1) - f(x_2) \leqslant 2\varepsilon. \quad (14)$$

由于式(14)与式(9)相矛盾,故在 $[x_1, x_2]$ 上存在子区间 $[x_{i1}, x_{i2}]$,使得模糊系统的输出 $F(x)$ 单调递减.

同理可证在 $[x_2, x_3]$ 上存在子区间 $[x_{i2}, x_{i3}]$,使得模糊系统的输出 $F(x)$ 单调递增.

综上所述,在区间 $[x_1, x_3]$ 上存在 2 个子区间 $[x_{i1}, x_{i2}]$ 和 $[x_{i2}, x_{i3}]$ 分别使得模糊系统的输出 $F(x)$ 单调递减和递增. 根据引理 2,模糊系统在划分子区间单调. 因此,模糊系统为实现逼近精度,在 $[x_1, x_3]$ 内存在划分点. 证毕.

定理 1 说明当目标函数在一点的函数值比其 2 个临近点的函数值同时大或者小 2 倍精度时,模糊系统在这一点附近必须具有划分点才能实现逼近精度. 但是定理 1 还存在一定的局限性,因为要比较连续函数任意 3 点的函数值关系是不可能的. 为此,引入如下引理解决此问题,它确保了只使用很有限的信息就足够刻画连续函数.

引理 3　连续实函数 $f(x)$ 在区间 $[\tau_1, \tau_2] \subseteq U$ 上具有如下 2 个等价关系.

1) 存在 $\tau_1 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant \tau_2$,使得

$$f(x_1) - f(x_2) > 2\varepsilon, f(x_2) - f(x_3) < -2\varepsilon,$$

或者

$$f(x_1) - f(x_2) < -2\varepsilon, f(x_2) - f(x_3) > 2\varepsilon;$$

2) 存在 $\tau_1 \leqslant \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \leqslant \tau_2$ (ξ_i 是 $f(x)$ 在 $[\tau_1, \tau_2]$ 上的极点),使得

$$f(\xi_1) - f(\xi_2) > 2\varepsilon, f(\xi_2) - f(\xi_3) < -2\varepsilon,$$

或者

$$f(\xi_1) - f(\xi_2) < -2\varepsilon, f(\xi_2) - f(\xi_3) > 2\varepsilon.$$

证明　2)→1) 显然成立. 仅需证明 1)→2).

不妨假设存在 $\tau_1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \tau_2$,使得

$$f(x_1) - f(x_2) > 2\varepsilon,$$
$$f(x_2) - f(x_3) < -2\varepsilon. \quad (15)$$

首先找到 $f(x)$ 定义域中包含 x_2 点的单调区间 $[\beta_2, \beta_5]$, β_i 是极点. 不失一般性,假设 $f(x)$ 在 $[\beta_2, \beta_3]$ 上严格单调递增. 由 x_2 在 $[\beta_2, \beta_5]$ 内,知

$$f(\beta_2) \leqslant f(x_2). \quad (16)$$

如果 $\beta_2 \leqslant x_1$,则由 x_1 也在单调区间知 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,与 $f(x_1) - f(x_2) > 2\varepsilon$ 相矛盾. 因此,可得

$$x_1 < \beta_2 \leqslant x_2 < x_3. \quad (17)$$

结合式(17),得:

$$f(x_1) - f(\beta_2) > 2\varepsilon,$$
$$f(\beta_2) - f(x_3) < 2\varepsilon. \quad (18)$$

令 $\xi_2 = \beta_2$,同理可得 ξ_1 和 ξ_3. 证毕.

根据引理 3 的等价条件,定理 1 可重写如下:

定理 2　假设式(3)定义的模糊系统 $F(x)$ 在输入域 U 上能以给定精度 ε 逼近期望函数 $f(x)$. 如果存在 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \in U$ (ξ_i 是期望函数的极点),使得

$$f(\xi_1) - f(\xi_2) > 2\varepsilon,$$
$$f(\xi_2) - f(\xi_3) > -2\varepsilon,$$

或者

$$f(\xi_1) - f(\xi_2) < -2\varepsilon,$$
$$f(\xi_2) - f(\xi_3) > 2\varepsilon,$$

那么模糊系统在$[\varepsilon_1,\varepsilon_3]$内存在划分点.

定理2指出了当存在模糊系统能以给定逼近精度逼近期望函数时,目标函数在子区间所具有的特性. 同时,这些特性是基于目标函数极点序列的,它具有如下优势:1)只需要目标函数的极点信息和逼近精度,假设前提很少;2)在实际应用中易于实现. 这将有力支撑模糊系统作为函数逼近器比传统逼近器的优势.

根据定理2即可建立通用型SISO Mamdani模糊系统满足给定逼近精度的必要条件.

定理3(模糊系统的必要条件) 为使式(3)定义的通用型SISO Mamdani模糊系统$F(x)$在输入域U上能以给定逼近精度ε逼近期望函数$f(x)$,至少将模糊系统输入域划分为满足如下关系的N个子区间:在每个划分子区间$[S_i,S_{i+1}]$$(0\leqslant i<N)$上,不存在$S_i\leqslant\xi_1<\xi_2<\xi_3\leqslant S_{i+1}$($\xi_i$是期望函数在子区间的极点),使得

$$f(x_1)-f(x_2)>2\varepsilon,$$
$$f(x_2)-f(x_3)<-2\varepsilon,$$

或者

$$f(x_1)-f(x_2)<-2\varepsilon,$$
$$f(x_2)-f(x_3)>-2\varepsilon,$$

因此,模糊系统至少需要$N+1$条模糊规则.

证明 通过定理2容易得证,这不再赘述.

定理3给出的模糊系统必要条件需要的信息仅包含逼近精度和目标函数的极点. 这既能有效保证模糊系统作为函数逼近器优于其他发展完备的传统函数逼近器,又可实际操作.

3.2 Mamdani模糊系统必要条件的比较分析

Ying Hao和他的合作者们针对模糊系统作为通用函数逼近器给出了完美的必要条件,并且根据这些结论详细分析了模糊系统的逼近性能[12-14]. 但是,这些结果只局限于逼近精度趋于零的情况. 下面将说明Ying Hao的结论[12]是本文结论的一种特例.

给定$\xi=\{\xi_0=a,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1}=b\}$是目标函数$f(x)$在定义域$U=[a,b]$的极点集合. 当给定逼近精度趋于零时,对于任意3个相邻极点$\xi_{i-1},\xi_i,\xi_{i+1}\in\xi(1\leqslant i\leqslant m)$,都满足以下关系:

$$f(\xi_{i-1})-f(\xi_i)>2\varepsilon,$$
$$f(\xi_i)-f(\xi_{i+1})<-2\varepsilon,$$

或者

$$f(\xi_{i-1})-f(\xi_i)<-2\varepsilon,$$
$$f(\xi_i)-f(\xi_{i+1})>2\varepsilon. \tag{19}$$

根据定理3,模糊系统输入域在每个极点处都存在划分点. 即模糊系统所需的最少划分点个数等于目标函数的极点个数,这正是Ying Hao的结论. 因此,Ying Hao的结论是本文结论在给定逼近精度趋于零时的一种特例.

4 数值算例

这一节将使用数值算例来验证上述结论,并探讨分析模糊系统的逼近性能.

算例1 设计通用型Mamdani模糊系统一致逼近定义在$U=[-3,3]$上的连续实函数$f(x)=\sin x/x$,逼近精度是$\varepsilon=0.2$和$\varepsilon=0.02$.

很容易知道期望函数$f(x)$在$x=0$处存在一个极点,且$f(0)=1$. 所以目标函数的极点集是$\xi=\{-3,0,3\}$.

1) $\varepsilon=0.2$.

根据定理3,模糊系统在$x=0$处需要划分点,即至少需要3条规则才能实现逼近精度. 而文献[8]建立的充分条件表明需要207条规则才能实现逼近精度,文献[10]建立的改进型充分条件也需要9条规则才能达到逼近精度. 其主要原因是它们没有考虑隶属度函数和目标函数的特性. 这也说明这些充分条件还有很大的改善空间.

2) $\varepsilon=0.02$.

根据定理3,模糊系统在$x=0$处需要划分点,即至少需要3条规则才能实现逼近精度. 而文献[8]建立的充分条件表明需要6 843条规则才能实现逼近精度,文献[10]建立的改进型充分条件也需要25条规则才能达到逼近精度. 因此,以前建立模糊系统充分条件的方法还有很大的改进空间.

算例2 设计通用型Mamdani模糊系统一致逼近定义在$U=[0,2\pi]$上的连续实函数$f(x)=\sin x$,逼近精度是$\varepsilon=0.3$.

因为

$$f(\pi/2)-f(0)=1>2\varepsilon=0.6,$$
$$f(\pi/2)-f(\pi)=1>2\varepsilon=0.6,$$
$$f(3\pi/2)-f(\pi)=-1<-2\varepsilon=-0.6,$$
$$f(3\pi/2)-f(2\pi)=-1<-2\varepsilon=-0.6.$$

根据定理3,模糊系统为实现逼近精度,分别在$x=0.5\pi$和$x=1.5\pi$处存在划分点. 如图2所示,将目标函数向上和向下平移逼近精度0.3,形成一个逼近通道(2条虚线内). 设计一个单调性变化2次(最少)的模糊系统的输出,如图2中的点画线. 因为他

在逼近通道内,所以模糊系统满足逼近精度. 在设计的模糊系统输出的每个单调区间上,使用式(7)和(8)设计输入输出模糊集. 即模糊系统需要 4 条模糊规则就可实现逼近精度.

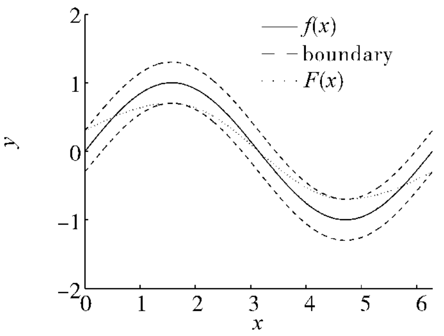


图 2　设计 Mamdani 模糊系统以 0.3 精度逼近目标函数

Fig. 2　Design a Mamdani fuzzy system to approximate the object function with 0.3

算例 3　设计通用型 Mamdani 模糊系统以 0.12 的精度一致逼近目标函数(图 3 中的实线).

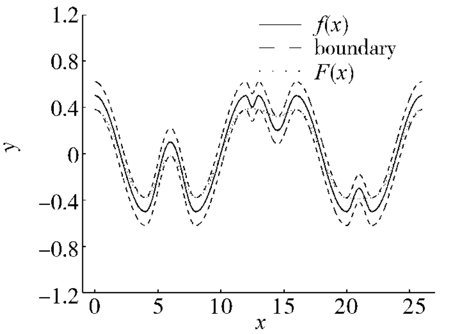


图 3　设计 Mamdani 模糊系统以 0.12 精度逼近目标函数

Fig. 3　Design a Mamdani fuzzy system to approximate the object function with 0.12

因为

$$f(4) - f(0) = -1 < -2\varepsilon = -0.24,$$
$$f(4) - f(5) = -0.5 < -2\varepsilon = -0.24;$$
$$f(6) - f(5) = 0.5 > 2\varepsilon = 0.24,$$
$$f(6) - f(7) = 0.5 > 2\varepsilon = 0.24;$$
$$f(8) - f(7) = -0.5 < -2\varepsilon = -0.24,$$
$$f(8) - f(10) = -0.5 < -2\varepsilon = -0.24;$$
$$f(12) - f(10) = 0.5 > 2\varepsilon = 0.24,$$
$$f(12) - f(14.5) = 0.3 > 2\varepsilon = 0.24;$$
$$f(14.5) - f(13) = -0.3 < -2\varepsilon = -0.24,$$
$$f(14.5) - f(16) = -0.3 < -2\varepsilon = -0.24;$$
$$f(16) - f(14.5) = 0.3 > 2\varepsilon = 0.24,$$
$$f(16) - f(18) = 0.5 > 2\varepsilon = 0.24;$$
$$f(20) - f(16) = 0.5 < -2\varepsilon = -0.24,$$
$$f(20) - f(24) = -0.5 < -2\varepsilon = -0.24.$$

根据定理 3,模糊系统为实现逼近精度,分别在 x = 4、5、6、12、14.5、16、20 附近存在划分点. 如图 3 所示,将目标函数向上和向下平移逼近精度 0.12,形成逼近通道(2 条虚线内). 构造一个单调性变化 7 次(最少),且满足逼近精度的模糊系统(图 3 中的点画线). 在构造的模糊系统输出的每个单调区间上,利用式(7)和(8)设计模糊规则. 即模糊系统至少需要 9 条规则才能实现逼近精度.

根据 3 个数值算例,发现当目标函数极点的幅度小于逼近精度时,极点不影响通用型模糊系统的逼近(图 3);当极点的幅度大于逼近精度时,模糊系统在该极点附近需要划分点才能实现逼近精度(图 2 ~ 3). 这说明模糊系统的逼近能力与目标函数的具体形式没有关联,只与幅度大于逼近精度的极点个数相关. 因此,即使一个很复杂的目标函数,也具有很多极点,只要幅值大于逼近精度的极点很少,模糊系统就很容易逼近. 相反,对于高振荡(频率高,幅度高)的目标函数,即使形式很简单,模糊系统也不是理想的逼近器.

5　结束语

给出了通用型 SISO Mamdani 模糊系统在给定逼近精度情况下作为函数逼近器的必要条件. 根据期望函数的极点信息和逼近精度,指出了模糊系统输入域的划分原则以及采用扇区非线性设计输入输出模糊集. 更重要的是证明现有的 Ying Hao 结论是本文结论在精度趋于零的一种特例. 同时,得出的必要条件还能有效分析模糊系统作为函数逼近器的优势和局限性. 这些在模糊控制和模糊建模中都具有显著的理论价值和应用意义.

但是,本文研究的必要条件仅限于通用型 SISO Mamdani 系统. 这种研究思想能否应用到多输入模糊系统以及 TS 模糊系统还有待深入研究. 同时,在实际应用当中,通用型模糊系统的输入模糊集的隶属度函数有可能具有很复杂的形式,这势必导致整个系统设计和计算的困难. 所以,研究特定隶属度函数(三角形,梯形)下模糊系统的必要条件显得格外重要.

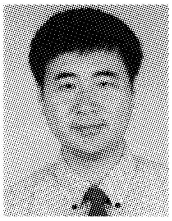
参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information Control, 1965, 8: 338-353.

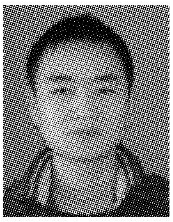
[2] 丁海山,毛剑琴. 模糊系统逼近理论的发展现状[J]. 系

统仿真学报,2006,18(8)):2061-2066.
DING Haishan,MAO Jianqin. Development of approximation theory of fuzy systems[J].Joural of System Simulation, 2006,18(8)):2061-2066.
[3] WANG L X. Fuzy systems are universal approximators [C]//Proc of IEEE International Conference on Fuzy Systems. San Diego,USA,1992: 1163-1170.
[4] CASTRO J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators[J].IEE Trans on Systems,Man and Cybernetics, 1995,25(4):629-635.
[5] NGUGEN H T,KREIONOVICH V,SIRISAENGTAKSIN 0.Fuzy control as universal control tool[J]. Fuzzy Sets and Systems,1997,80(1)):71-86.
[6] SUDKAMP T,KNAPP A,KNAPP J. Rule base reduction: some comments on the use of orthogonal transforms[J]. IEEE Trans on Systems Man and Cyberetics,2001,31 (3)):199-206.
[7] MANLEY C P,RAZAZ M.An effient approach for reduction of membership functions and rules in fuzy systems [C]//IEEE International Conference on Fuzzy Systems. London,UK,2007:1-5.
[8] YING H. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximations[J].Automatica,1994,30(3)):521-525.
[9] YING H. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent[J].IEEE Trans on System,Man and Cybernetics,1998,28: 515-520.
[10] ZENG K,ZHANG N Y,XU W L.A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators[J].IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000,8(6)):773-780.
[11] SUN F C,ZHAO N. Universal approximation for Takagi-Sugeno fuzzy systems using dynamically constructive method-SISO cases[C]//IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control. Singapore,2007: 150-155.
[12] YING H,CHEN G R. Necessary conditions for some typial fuzy systems as universal approximators[J]. Automatica,1997,33(7):1333-1338.
[13] YING H,DING Y S,L S K,et al. Comparison of necessary conditions for typical Takagi-Sugeno and Mamdani fuzy systems as universal approximators[J].IEEE Trans on Man,System and Cybernetics,1999,29(5)):508-514.
[14] DING Y S,YING H, SHAO S H. Necessary conditions on minimal system configuration for general MISO Mamdani fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Trans on Systems,Man and Cybenetics,2000,30(6):857-864.
[15] WANG F,SHANG H L,WANG LX,et al. How to determine the minimum number of fuzzy rules to achieve given accuracy: a computational geometric approach to SISO case [J].Fuzzy Sets and Systems,2005,150:199-209.
[16] ZENG X J,SINGH M G.Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators[J]. IEEE Trans on Fuzy Systems,1996,4(1)):44-63.

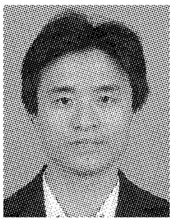
作者简介:



孙富春,男,1964年生,教授,博士生导师,主要研究方向为模糊神经系统、变结构控制、网络控制系统和机器人.2000年获得全国优秀博士论文奖,2003年获韩国第十八届 Choon-Gang 国际学术奖一等奖第一名.发表学术论文120余篇,其中在国际重要刊物发表论文50余篇.



杨 晋,男,1983年生,硕士研究生,主要研究方向为模糊系统逼近、行人视频检测和跟踪.



刘华平,男,1976年生,副教授,主要研究方向为智能控制与机器人、行人视频跟踪与检测、智能交通等.