模糊推理的统计敏感性分析

王士同[1]，谢振平[1]，李涵雄[2]
(1. 江南大学 信息工程学院，江苏 无锡 214122；2. 香港城市大学 制造工程与工程管理系，香港)

摘　要：在设计模糊逻辑系统时，如何实现其对输入噪声的鲁棒性是一个首要的问题，相应地如何很好地分析其对输入噪声的鲁棒性(也称敏感性分析)也就成了一个重要问题. 使用统计的方法，对常见的模糊推理方法进行了敏感性分析. 首先以均值与方差为基础，提出了 2 个模糊集的 ε统计相等的概念；随后导出了常见的模糊推理方法的统计敏感性，这包括链接模糊推理与多规则模糊推理. 与前人相关工作不同的是，更着重于模糊推理的方差分析，这一方法从数理统计的角度来看能更好地揭示模糊推理本质的敏感性.

关键词：模糊推理；模糊规则；链接模糊推理；统计敏感性
中图分类号：TP18　**文献标识码**：A　**文章编号**：1673-4785(2007)02-0057-08

Statistical sensitivity analysis of fuzzy reasoning

WANG Shi-tong[1]，XIE Zhen-ping[1]，LI Han-xiong[2]
(1. College of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China; 2. Department of MEEM, Faculty of Sci. & Eng., City University of Hong Kong, Hong Kong SAR, China)

Abstract：Robustness of input noise is an important issue when designing a fuzzy logic system. In this paper, a statistics-based method is introduced to analyze the sensitivity of various popular fuzzy reasoning methods. Using the new concept of ε statistical-equalities, the statistical sensitivity between two fuzzy sets is analyzed based on their means and variances. Then the statistical sensitivities of various popular fuzzy reasoning methods are derived, including syllogistic fuzzy reasoning and fuzzy reasoning with multiple rules. Different from other research work, the variance analysis of fuzzy reasoning is particularly emphasized to better reveal the sensitivity of fuzzy reasoning from a statistical perspective.

Keywords：fuzzy reasoning; fuzzy rule; syllogistic fuzzy reasoning; statistical sensitivity

自从 Zadeh 提出了模糊推理的合成规则[4-6]以后，众多的蕴涵与连接算子被引入到模糊推理中形成了各种模糊推理方法[1,4-8,10,12-13]. 模糊推理尝试摄取人类推理的本质，并在设计与分析模糊控制器中扮演着关键的角色，在模糊推理中人类专家的主观经验被转换成定量的推理规则. 在设计模糊控制器时，通常要分析其对实际输入信号中所含噪音的鲁棒性. 目前，对模糊推理的鲁棒性分析已有了不少研究. Pappis 使用了逼近度来分析模糊推理的敏感性[2,16]，Pappis 在论文中引入了如下的定义：

设 U 是某一论域，A 和 B 是 U 上的 2 个模糊集，$\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 分别表示它们各自的隶属度函数，若满足 $\sup_{x\in U}|\mu_A(x)-\mu_B(x)|\le\varepsilon$，则称 A 与 B 逼近相等，记为 $A\approx B$，常数 ε 称为逼近度.

随之，Hong 和 Hwang[17]使用相似性度量对上式进行了扩展，重新定义如下：

设 U 是某一论域，A 和 B 是 U 上的 2 个模糊集，$\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 分别表示它们各自的隶属度函数，若满足 $1-\sup_{x\in U}|\mu_A(x)-\mu_B(x)|\ge\alpha, \alpha\in[0,1]$，则称 A 与 B α-，记为 $A\approx aB$.

近来，Cai[2]使用模糊集的 ε 相等概念把原有的定义泛化成了下面的形式：

设 U 是某一论域，A 和 B 是 U 上的 2 个模糊集，$\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 分别表示它们各自的隶属度函

收稿日期：2006-10-08.
基金项目：南京大学计算机软件新技术国家重点实验室开放课题.

数,若满足 $1-\sup_{x\in U}|\mu_A(x)-\mu_B(x)|\le\delta,\delta\in[0,1]$,则称 A 与 $B\delta$-相等,记为 $A\approx(\delta)B$.然后他给出了一个用于模糊推理的鲁棒性分析的系统框架.与Pappis的定义相似,Ying[3]提出了模糊推理的最大与平均扰动的概念,其中用一个固定的参数 ε 来评估在模糊集或模糊推理中的扰动程度,据此可估计得出最大与平均扰动的参数值,详细的相关研究内容可参考[19-36],特别地,文献[26-28]的研究代表了鲁棒模糊推理的最新进展.综合而言,目前所有的模糊推理的鲁棒性分析方法均是基于2类模糊集的隶属度函数(MFs)的绝对差的上界而展开分析的.

事实上,对于实际中产生的噪音,可以假设它的均值为0,并且标准差很小.这就意味着鲁棒性分析必须建立在下面2个基础假设之上:1) 实际数据与真实数据间的均值应保持不变,且方差也不会由于噪音的存在而产生较大幅度的增大.2) 在失真的数据上作任何的鲁棒性讨论是没有现实意义的.所以从统计学的观点来看,前面的一些定义是不全面的,应以均值与标准差的概论为视角,研究分析模糊推理的鲁棒性.据此提出了 ε 统计相等的概念,并理论上探讨了在使用不同的模糊推理方法时它们的均值与方差将会产生怎样的变化,分析所得的结果将有助于在设计模糊逻辑系统时选择最佳的模糊推理方法.

文中提出了在模糊集上的 ε 统计等式的概念,据此可以理论地推导出模糊推理的统计敏感性.2个模糊集的 ε 统计相等要求两个模糊集具有相等的均值与 ε 相近的方差.需要指出的是Ying在文献[3]中使用概率的方法讨论了模糊推理的平均扰动,从这一角度来看,本文的工作与此有相似性.然而与Ying、Cai等所做工作显然不同的是:首先,更着重于均值与标准差的分析,且文中的方法是完全基于统计的,这与目前大都数鲁棒性分析方法相吻合,更适合于现实的要求;其次,文中的方法由于在 ε 统计相等中使用了非固定变量 ε 而具有更好的普遍意义.

1 基本定义和引理

首先定义2个模糊集的 ε 统计相等的概念,设 U 是某一具有概率分布 $P(x)$ 的论域,A 和 B 是 U 上的2个模糊集,$\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 分别表示它们各自的隶属度函数.假设 A 是 B 的一个扰动,从统计学的角度来看,若此扰动很小以至于可以忽略不计,那么 A 与 B 应满足如下条件:

$E(\mu_A(x)-\mu_B(x))=0$,

$$\text{i.e.}\quad E(\mu_A(x))=\int\mu_A(x)\,\mathrm{d}P(x)=E(\mu_B(x))=\int\mu_B(x)\,\mathrm{d}P(x).\tag{1}$$

$\sigma^2(\mu_A(x)-\mu_B(x))$ 应该趋向于0,

$$\text{i.e.}\quad \sigma^2(\mu_A(x))\approx\sigma^2(\mu_B(x)).\tag{2}$$

此处 $E(\cdot)$ 和 $\sigma^2(\cdot)$ 分别表示求均值与方差.对于上面的条件,等价于当扰动足够小时,$\mu_A(x)$ 应逼近于 $\mu_B(x)$,同时 $\sigma^2(\mu_A(x))$ 也应逼近于 $\sigma^2(\mu_B(x))$.这样可以对模糊集引入如下的统计相等的定义.

定义1 令 U 是某一具有概率分布 $P(x)$ 的论域,A 和 B 是 U 上的2个模糊集,$\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 分别为它们的连续MFs,假设 B 是 A 一个扰动,即 $\forall x\,\mu_B(x)=\mu_A(x)+\delta_A(x)$,此处 $\delta_A(x)$ 表示独立随机噪声,满足 $E(\delta_A(x))=0$,则如果下面几个公式同时满足,则称 A 与 $B\varepsilon$-统计相等,记为 $B=(\varepsilon)A$.

$$E(\mu_A(x))=E(\mu_B(x)),\tag{3}$$

$$\max\left\{\frac{\sigma^2(\mu_A(x))}{\sigma^2(\mu_B(x))},\frac{\sigma^2(\mu_B(x))}{\sigma^2(\mu_A(x))}\right\}<1+\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1\tag{4}$$

为讨论的方便,不失一般性,可假设 $\sigma^2(\mu_B(x))>\sigma^2(\mu_A(x))$,则式(4)可简化如下:

$$\frac{\sigma^2(\mu_B(x))}{\sigma^2(\mu_A(x))}<1+\varepsilon\equiv\frac{\sigma^2(\delta_A(x))}{\sigma^2(\mu_A(x))}<\varepsilon.\tag{5}$$

定义2

1) 令 $0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1$,$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 上的算子 $\oplus$ 定义如下:

$$\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2.\tag{6}$$

2) 定义:矢量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_d)$ 为 d 维权重矢量,若满足 $w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{e}w_i=1$;映射 $WM_w:R^n\to R$ 为 d 维权重平均(WM),若满足:

$$WM_w(a_1,a_2,\cdots,a_d)=\sum_{i=1}^{d}w_ia_i.\tag{7}$$

基于上述定义,显然可得:

$$\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2>\varepsilon_1,\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2>\varepsilon_2.$$

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_d)\le WM_w(a_1,a_2,\cdots,a_d)\le\max(a_1,a_2,\cdots,a_d).$$

引理1 设 A,A 是论域 U 上的2个模糊集,U 中概率分布为 $P(x)$,B,B 是论域 V 上的2个模糊集,V 中概率分布为 $Q(y)$,若 $A'=(\varepsilon_1)A$,$B'=(\varepsilon_2)B$,令 $A\cup B$ 表示模糊集 A 与 B 的关系并,$A'\cup B$ 表示模糊集 A 与 B 的关系并,且模糊集的关系并算子定义为

$$\mu_{A\cup B}(x,y) = \max(\mu_A(x),\mu_B(y)),$$
$$\mu_{A'\cup B'}(x,y) = \max(\mu_{A'}(x),\mu_{B'}(y)).$$

那么,

$$A'\cup B' = (\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2))(A\cup B). \tag{8}$$

证明　首先为证明的方便,引入如下的替代公式:

$$\max(\mu_A(x),\mu_B(y)) \approx w_1\mu_A(x) + w_2\mu_B(y). \tag{9}$$

式中:$w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 \geq 0$. 这样便有

$$\sigma^2(\mu_{A'\cup B'}(x,y)) \leq \iint_{U\times V} w_1^2\sigma^2(\delta_A(x))\,\mathrm{d}P(x)\,\mathrm{d}Q(y) + \iint_{U\times V} w_2^2\sigma^2(\delta_B(x))\,\mathrm{d}P(x)\,\mathrm{d}Q(y) + \sigma^2(\mu_{A\cup B}(x,y)) =$$
$$w_1^2\sigma^2(\delta_A(x)) + w_2^2\sigma^2(\delta_B(y)) + \sigma^2(\mu_{A\cup B}(x,y)).$$

则

$$\frac{\sigma^2(\mu_{A'\cup B'}(x,y))}{\sigma^2(\mu_{A\cup B}(x,y))} \leq 1 + \frac{w_1^2\sigma^2(\delta_A(x)) + w_2^2\sigma^2(\delta_B(y))}{\sigma^2(\mu_{A\cup B}(x,y))}. \tag{10}$$

显然有 $\sigma^2(\mu_{A\cup B}(x,y)) \doteq w_1^2\sigma^2(\mu_A(x)) + w_2^2\sigma^2(\mu_B(y))$, 又 $A' = (\varepsilon_1)A$, $B' = (\varepsilon_2)B$, 则有 $\sigma^2(\delta_A(x)) < \varepsilon_1\sigma^2(\mu_A(x))$, $\sigma^2(\delta_B(x)) < \varepsilon_2\sigma^2(\mu_B(y))$. 综上可得

$$\frac{\sigma^2(\mu_{A'\cup B'}(x,y))}{\sigma^2(\mu_{A\cup B}(x,y))} < 1 + \frac{w_1^2\varepsilon_1\sigma^2(\mu_A(x)) + w_2^2\varepsilon_2\sigma^2(\mu_B(y))}{w_1^2\sigma^2(\mu_A(x)) + w_2^2\sigma^2(\mu_B(y))} < 1 + \max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}.$$

至此,引理得证.

引理 2　设 $B = (\varepsilon)A$, 若令 $\overline{A}$ 为 A 的补, $\overline{B}$ 为 B 的补, 即 $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $\mu_{\overline{B}}(x) = 1 - M_B(x)$, 则有

$$\overline{B} = (\varepsilon)\overline{A}. \tag{11}$$

证明　证明较为简单,此处从略.

引理 3　设 A, A 是论域 U 上的 2 个模糊集, U 中概率分布为 $P(x)$, B, B 是论域 V 上的 2 个模糊集, V 中概率分布为 $P(y)$, 若 $A' = (\varepsilon_1)A$, $B' = (\varepsilon_2)B$, 令 $A\cap B$ 表示模糊集 A 与 B 的关系交, $A'\cap B$ 表示模糊集 A 与 B 的关系交, 且模糊集的关系交算子定义为

$$\mu_{A\cap B}(x,y) = \min(\mu_A(x),\mu_B(y)),$$
$$\mu_{A'\cap B'}(x,y) = \min(\mu_{A'}(x),\mu_{B'}(y)).$$

则有 $A'\cap B' = (\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))(A\cap B)$. (12)

证明　此处证明类似于引理 1 的证明,故从略.

引理 4　设 A, A 是论域 U 上的 2 个模糊集, U 中概率分布为 $P(x)$, B, B 是论域 V 上的 2 个模糊集, V 中概率分布为 $Q(y)$, 若 $A' = (\varepsilon_1)A$, $B' = (\varepsilon_2)B$, 令 AB 表示模糊集 A 与 B 的关系积, $A'B'$ 表示模糊集 A 与 B 的关系积, 且模糊集的关系积算子定义为

$$\mu_{AB}(x,y) = \mu_A(x)\mu_B(y),$$
$$\mu_{A'B'}(x,y) = \mu_{A'}(x),\mu_{B'}(y).$$

则有 $A'B' = ((\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2))(AB)$. (13)

证明　由 $\mu_A(x)$ 与 $\mu_B(x)$ 的独立性,显然有 $E(\mu_{AB}(x,y)) = E(\mu_{A'B'}(x,y))$,

又 $\sigma^2(\mu_{AB}(x,y)) = \sigma^2(\mu_A(x))\sigma^2(\mu_B(y))$.

$\sigma^2(\mu_{A'B'}(x,y)) = \sigma^2(\mu_{A'}(x))\sigma^2(\mu_{B'}(y))$.

则有

$$\frac{\sigma^2(\mu_{A'B'}(x,y))}{\sigma^2(\mu_{AB}(x,y))} = \frac{\sigma^2(\mu_{A'}(x))\sigma^2(\mu_{B'}(y))}{\sigma^2(\mu_A(x))\sigma^2(\mu_B(y))} <$$
$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 + \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2.$$

至此,引理得证.

2　蕴涵算子的统计敏感性

在基于规则的模糊推理中蕴涵算子扮演着十分重要的角色,本节中将对几类典型的蕴涵算子进行统计敏感性分析. 一般地,令 $I(A,B)$ 表示 U 到 V 的模糊关系,此关系由规则 IF X is A, THEN Y is B 上的蕴涵算子所确定.

定理 1　当 Dienes-Rescher 蕴涵算子应用于模糊规则 IF X is A, THEN Y is B 上时,即

$I(A,B) = \overline{A}\cup B$ 或者 $\mu_I(x,y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y))$, 若 $A' = (\varepsilon_1)A$, $B' = (\varepsilon_2)B$, 则有

$$I(A',B') = (\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})I(A,B). \tag{14}$$

证明　由引理 2, 有 $\overline{A'} = (\varepsilon_1)\overline{A}$; 又由引理 1, 得 $\overline{A'}\cup B' = (\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})\overline{A}\cup B$, 即 $I(A',B') = (\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})I(A,B)$, 则定理得证.

定理 2　当 Lukasiewicz 蕴涵算子应用于模糊规则 IF X is A, THEN Y is B 上时,即

$I(A,B) = A\times B$ 或者 $\mu_I(x,y) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)$,

若 $A' = (\varepsilon_1)A$, $B' = (\varepsilon_2)B$ 则有

$$I(A',B') = (\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})I(A,B). \tag{15}$$

证明　由条件显然可得 $E(I(A',B')) = E(I(A,B))$, 又

$$\frac{\sigma^2(I(A',B'))}{\sigma^2(I(A,B))} = \frac{\sigma^2(\mu_{A'}(x)) + \sigma^2(\mu_{B'}(y))}{\sigma^2(\mu_A(x)) + \sigma^2(\mu_B(y))} =$$

$$1+\frac{\sigma^2(\delta_A(x))+\sigma^2(\delta_B(y))}{\sigma^2(\mu_A(x))+\sigma^2(\mu_B(y))} < 1+\frac{\varepsilon_1\sigma^2(\mu_A(x))+\varepsilon_2\sigma^2(\mu_B(y))}{\sigma^2(\mu_A(x))+\sigma^2(\mu_B(y))} < 1+\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}.$$

至此,定理得证.

定理 3 当 Zadeh 蕴涵算子应用于模糊规则上 IF X is A, THEN Y is B 时,即

$I(A,B)=\overline{A}\cup(A\cap B)$ 或者 $\mu_I(x,y)=\max(1-\mu_A(x),\min(\mu_A(x),\mu_B(y)))$.

若 $A'=(\varepsilon_1)A$, $B'=(\varepsilon_2)B$ 则有

$$I(A',B')=(\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})I(A,B).$$

证明 由引理 2 可得, $\overline{A}'=(\varepsilon_1)\overline{A}$, 又由引理 1 与引理 3 可得,

$$\overline{A}'\cup(A'\cap B')=(\max\{\varepsilon_1,\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}\})\overline{A}\cup(A\cap B)=(\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})\overline{A}\cup(A\cap B).$$

则此定理得证.

定理 4 1) 当 Mamdani min 蕴涵算子应用于模糊规则 IF X is A, THEN Y is B 上时,即

$$I(A,B)=A\cap B,$$

若 $A'=(\varepsilon_1)A$, $B'=(\varepsilon_2)B$ 则有

$$I(A',B')=(\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})I(A,B). \tag{16}$$

2) 若用 Mamdani 积算子替代 Mamdani min 算子则式(16)结论变成如下的形式:

$$I(A',B')=(\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2)I(A,B). \tag{17}$$

证明 上述定理可由引理 3、4 直接导出.

定理 5 当 Reichenbach 蕴涵算子应用于模糊规则 IF X is A, THEN Y is B 上时,即

$$I(A,B)=\overline{A\overline{B}},$$

若 $A'=(\varepsilon_1)A$, $B'=(\varepsilon_2)B$ 则有

$$I(A',B')=(\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2)I(A,B). \tag{18}$$

证明 由于 $\mu_I(x,y)=1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)$, $A'=(\varepsilon_1)A$, $B'=(\varepsilon_2)B$, 显然可得 $E(I(A',B'))=E(I(A,B))$.

又 $\sigma^2(\mu_{I(A,B)}(x,y))=\sigma^2(I-\mu_A(x))+\sigma^2(\mu_A(x))\sigma^2(\mu_B(y))=\sigma^2(\mu_A(x))+\sigma^2(\mu_A(x))\sigma^2(\mu_B(y))=\sigma^2(\mu_{A'}(x))+\sigma^2(\mu_{A'}(x))\sigma^2(\mu_{B'}(x))\cdot\sigma^2(\mu_{I(A',B')}(x,y))$.

则
$$\frac{\sigma^2(\mu_{I(A',B')}(x,y))}{\sigma^2(\mu_{I(A,B)}(x,y))}=\frac{\sigma^2(\mu_{A'}(x))}{\sigma^2(\mu_A(x))}\cdot\frac{1+\sigma^2(\mu_{B'}(y))}{1+\sigma^2(\mu_B(y))} < (1+\varepsilon_1)\cdot\frac{1+(1+\varepsilon_2)\sigma^2(\mu_B(y))}{1+\sigma^2(\mu_B(y))} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2=1+\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2.$$

至此定理得证.

3 广义肯定前提式与广义否定后件式的统计敏感性分析

3.1 广义肯定前提式的统计敏感性分析

模糊推理的通常形式是广义肯定前提式,它可表述如下:

前件: IF X is A, THEN Y is B,

事实: X is C,

后件: Y is D.

其中 X 和 Y 是语义变量, A 与 C 是论域 U 上的模糊集, B 与 D 是论域 V 上的模糊集,通常 D 规定如下:

$$\mu_D(y)=\sup_{x\in U}t(\mu_C(x),\mu_{A\to B}(x,y)),\ \forall y\in V.$$

式中: $t(\cdot)$ 表示 t 为模算子, $\to$ 表示一个蕴涵算子,这里将给出几种特定的 t-连接与蕴涵算子下的广义肯定前提式的统计敏感性.

定理 6 当广义肯定前提式中使用 min 连接与 Dines-Rescher 蕴涵算子时,即

$$\mu_D(y)=\sup_{x\in U}\min(\mu_C(x),\max(1-\mu_A(x),\mu_B(y))). \tag{19}$$

若 $A'=(\varepsilon_1)A$, $B'=(\varepsilon_2)B$ 且 $C'=(\varepsilon_3)C$ 则有

$$D'=(\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\})D. \tag{20}$$

证明 从统计学的观点看来,对于 $\cdot$, $\sup_{x\in U}(\cdot)$ 并不改变其敏感性,则结合前面的结论,显然有 $E(D')=E(D)$,且

$$\frac{\sigma^2(\mu_{D'}(y))}{\sigma^2(\mu_D(y))} < 1+\max(\varepsilon_3,\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\frac{\sigma^2(\mu_{D'}(y))}{\sigma^2(\mu_D(y))} < 1+\max(\varepsilon_3,\varepsilon_1,\varepsilon_2).$$

则定理得证.

与定理 6 类似,可以轻易地得到如下的定理.

定理 7 对于下面 3 种情况定理 6 的结论仍成立, 1) 当广义肯定前提式中使用 min 连接与 Liksiewicz 蕴涵算子时; 2) 当广义肯定前提式中使用 min 连接与 Zadeh 蕴涵算子时; 3) 当广义肯定前提式中使用 min 连接与 Mamdani 蕴涵算子时.

定理 8 当广义肯定前提式中使用 min 连接与 Mamdani 积蕴涵算子时,即

$$\mu_D(y)=\sup_{x\in U}\min(\mu_C(x),\mu_A(x)\mu_B(y)),$$

若 $A'=(\varepsilon_1)A$, $B'=(\varepsilon_2)B$ 且 $C'=(\varepsilon_3)C$ 则有

$$D'=(\max\{\varepsilon_3,\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2\})D. \tag{21}$$

证明 上述结论可由引理 3、4 或定理 4 直接导

出.

定理 9　当广义肯定前提式中使用 min 连接与 Reichenbach 蕴涵算子时,即

$$\mu_D(y) = \sup_{x \in U} \min(\mu_C(x),\ 1 - \mu_A(x), \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)).$$

若 $A' = (\varepsilon_1) A$, $B' = (\varepsilon_2) B$ 且 $C' = (\varepsilon_3) C$ 则有

$$D' = (\max\{\varepsilon_3, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\}) D. \tag{22}$$

证明　上述结论可由引理 3 和引理 5 直接导出.

当用积连接或 Lukasiewicz 连接替代广义肯定前提式中的 min 连接时,相应的统计敏感性可以使用相似的方法求得. 一般地,若令 $A' = (\varepsilon_1) A$, $B' = (\varepsilon_2) B$, $C' = (\varepsilon_3) C$, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 与 ε 间的关系可归纳如表 1 所示. 由于 $\oplus$ 和 max 为放大算子,所以在所有情况下获得的 ε 值应是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 上的放大运算,表 1 结果很好地证实了这一点.

表 1　广义肯定前提式在使用不同的连接与蕴涵算子时的统计敏感性

Table 1　Statistical sensitivity of generalized modus ponens under various conjunctions and implication operators

连接	Dienes-Rescher 蕴涵	Lukasiewicz 蕴涵	Zadeh 蕴涵	Mamdani min 蕴涵	Mamdani 积蕴涵	Reichenbach 蕴涵
min 连接	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_3, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\}$
积连接	$\varepsilon_3 \oplus \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$	$\varepsilon_3 \oplus \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$	$\varepsilon_3 \oplus \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$	$\varepsilon_3 \oplus \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$	$\varepsilon_3 + (1 + \varepsilon_3) \times (\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2)$	$\varepsilon_3 + (1 + \varepsilon_3) \times (\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2)$
Lukasiewicz 连接	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_3, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_3\}$	$\max\{\varepsilon_3, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\}$

3.2　广义否定后件式

另一个基本的模糊推理形式是广义否定后件式,它可表述如下:

前件: IF X is A, THEN Y is B,

事实: Y is D,

后件: X is C.

等价于 $\mu_C(y) = \sup_{y \in V} (\mu_D(y), \mu_{A \to B}(x, y))$.　(23)

前面分析广义肯定前提式的统计敏感性的方法同样适用于分析广义否定后件式的统计敏感性,若交换广义肯定前提式中的 C 与 D,同样令 $A' = (\varepsilon_1) A$, $B' = (\varepsilon_2) B$, $C' = (\varepsilon_3) C$, 则可分析得出广义否定后件式的统计敏感性相等于广义肯定前提式的统计敏感性,其在不同情况下的结果同样可以归纳为表 1 所示的结果.

4　链接模糊推理的统计敏感性

链接模糊推理是人推理机制的另一种基本形式,一般地链接模糊推理能够表述成如下的形式:

前件 1: IF X is A, THEN Y is B,

前件 2: IF Y is B_1, THEN Z is C_1,

后件: IF X is A, THEN Z is C.

式中: X, Y 和 Z 是语义变量, A 是论域 U 上的模糊集, B 与 B_1 是论域 V 上的模糊集, C 与 C_1 是论域 W 上的模糊集,根据前件条件 1 与 2,链接模糊推理归纳出一个 U 到 W 的模糊关系,等价于:

$$\mu_R(x, z) = \sup_{y \in V} t(\mu_{I(A,B)}(x, y), \mu_{I(B_1, C_1)}(y, z)),\quad \forall x \in U, z \in W. \tag{24}$$

其中: $t(\cdot)$ 表示 t-模算子, $I(A, B)$ 与前件条件 1 相关, $I(B_1, C_1)$ 与前件条件 2 相关,则可知 R 仅仅是 $I(A, B)$ 与 $I(B_1, C_1)$ 的一个合成. 这样便可以用前面同样的方法推导出链接模糊推理在采用不同连接与蕴涵算子时的统计敏感性,表 2 中列出了详细的分析结果. 从表 2 中可以明显地看出,链接模糊推理的后件部分具有较大的扰动量,由分析知这主要是由于 max 与 $\oplus$ 算子的同时放大作用而产生的. 下面以一种情况为例,说明如何推导链接模糊推理的统计敏感性. 设采用的 2 算子分别为 min 连接与 Dienes-Rescher 蕴涵,则有

$$\mu_R(x, z) = \sup_{y \in V} \min(\max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)),\ \max(1 - \mu_{B_1}(y), \mu_{C_1}(z))). \tag{25}$$

若令 $A' = (\varepsilon_1) A$、$B' = (\varepsilon_2) B$、$B_1' = (\varepsilon_{21}) B$ 且 $C_1' = (\varepsilon_{31}) C_1$, 同时令 R 表示 U 到 W 的模糊关系,由定理 1 知:

$$I(A', B') = (\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}) I(A, B),$$

$$I(B_1', C_1') = (\max\{\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}) I(B_1, C_1).$$

又由引理 3,便可得

$$R' = (\max\{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \max\{\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}\}) R = (\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}) R.$$

表 2 链接模糊推理在采用不同的连接与蕴涵算子时的统计敏感性

Table 2 Statistical sensitivity of syllogistic fuzzy reasoning under various conjunctions and implication operators

连接	Dienes-Rescher 蕴涵	Lukasiewicz 蕴涵	Zadeh 蕴涵	Mamdani min 蕴涵	Mamdani 积蕴涵	Reichenbach 蕴涵
min 连接	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2, \\ \varepsilon_{21} \oplus \varepsilon_{31}\end{matrix}\right\}$	$\max\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2, \\ \varepsilon_{21} \oplus \varepsilon_{31}\end{matrix}\right\}$
积连接	$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \max(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})$	$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \max(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})$	$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \max(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})$	$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \max(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})$	$(\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2) \oplus (\varepsilon_{21} \oplus \varepsilon_{31})$	$(\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2) \oplus (\varepsilon_{21} \oplus \varepsilon_{31})$
Lukasiewicz 连接	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$	$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$

5 多规则模糊推理的统计敏感性

在现实中模糊知识通常包含多个规则,其一般形式可表述成如下的形式:

前件 1: X_1 is C_1, X_2 is C_2, …, X_n is C_n,

前件 2: 模糊知识

1) IF X_1 is A_{11}, X_2 is A_{12}, …, X_n is A_{1n} THEN Y is B_M,

…

M) IF X_1 is A_{M1}, X_2 is A_{M2}, …, X_n is A_{Mn} THEN Y is B_M,

后件: Y is D

式中: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 Y 是语义变量, A_{ij} 和 C_j 是论域 U_j ($i = 1, 2, \cdots, M$, $j = 1, 2, \cdots, n$) 上模糊集, $B_1, B_2, \cdots, B_M$ 和 D 是论域 V 上的模糊集.

众所周知,对于上述模糊推理目前有 2 种主要的推理过程[2]:一个是基于组合的推理过程;另一个是基于独立规则的推理过程. 在基于组合的推理过程中,首先用模糊关系 R_i 表示第 ith 规则

$$\mu_{R_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \mu_{I(AR_i, B_i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y), \tag{26}$$

式中: $\mu_{AR_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t(\mu_{A_{i1}}(x_1), \mu_{A_{i2}}(x_2), \cdots, \mu_{A_{in}}(x_n))$. (27)

且 $t(\cdot)$ 表示 t-模算子, $I(AR_i, B_i)$ 表示 AR_i 与 B_i 的蕴涵算子,这样可用同样的方法求得 $R_1, R_2, \cdots, R_M$,据此可用并或交算子合成 R. 当用并算子时, $R = \bigcup_{i=1}^{M} R_i$,则

$$\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \max(\mu_{R_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y), \cdots, \mu_{R_M}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)). \tag{28}$$

当用交算子时, $R = \bigcap_{i=1}^{M} R_i$,则

$$\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \min(\mu_{R_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y), \cdots, \mu_{R_M}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)). \tag{29}$$

最后,这类模糊推理的输出结果如下:

$$\mu_D(y) = \sup_{x_1, x_2, \cdots, x_n} t(\mu_{C_1}(x_1), \mu_{C_2}(x_2), \cdots, \mu_{C_n}(x_n), \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)). \tag{30}$$

在大多数实际情况中, t-模算子采用 min Mamdani 积. 这样当式 (26), (28) 或 (29) 中的模算子与 $I(AR_i, B_i)$ 给定时,便可轻易地推导出相应的模糊推理的统计敏感性. 现举一例说明,令 $t(\cdot)$ 与 $I(AR_i, B_i)$ 均为 Mamdani 积算子,则式(28) 化成如下形式:

$$\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \max(\mu_{A_{11}}(x_1) \cdots \mu_{A_{1n}}(x_n) \mu_{B_1}(y), \cdots, \mu_{A_{M1}}(x_1) \cdots \mu_{A_{Mn}}(x_n) \mu_{B_M}(y)). \tag{31}$$

相应地式(29) 化成如下的形式:

$$\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \min(\mu_{A_{11}}(x_1) \cdots, \mu_{A_{1n}}(x_n) \mu_{B_1}(y), \cdots, \mu_{A_{M1}}(x_1) \cdots \mu_{A_{Mn}}(x_n) \mu_{B_M}(y)). \tag{32}$$

这样 $\mu_D(y)$ 变成:

$$\mu_D(y) = \sup_{x_1, x_2, \cdots, x_n} \mu_{C_1}(x_1), \mu_{C_2}(x_2), \cdots, \mu_{C_n}(x_n), \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y). \tag{33}$$

若令 $A_{ij}' = (\varepsilon_{ij}) A_{ij}$, $B_i' = (\beta_i) B_i$, $C_j' = (\gamma_j) C_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $i = 1, 2, \cdots, M$,则由引理 3、4 可得

$$D' = \left(\left(\bigoplus_{1 \le j \le n} \gamma_j \right) \oplus \max\left\{ \bigoplus_{1 \le j \le n} \varepsilon_{1j} \right\} \oplus \beta_1, \right.$$

$$\left[\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\varepsilon_{2j}\right)\oplus\beta_2,\cdots\cdots,\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\varepsilon_{Mj}\right)\oplus\beta_M\right\}\Bigg]D. \tag{34}$$

在基于规则独立的推理过程中,可先独立地对每个规则求出相应的输出,然后组合所有这些单个输出,每个独立的输出可表示如下:

$$\mu_{D_i}(y)=\sup_{x_1,x_2,\cdots,x_n}t(\mu_{C_1}(x_1),\mu_{C_2}(x_2),\cdots,$$
$$\mu_{C_n}(x_n),\mu_{R_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)),(i=1,2,\cdots,M).$$

式中:R_i 定义与式(26)相同,这样整个输出 D 可用并(或交)算子广义地表示,即

当 $D=\bigcup_{i=1}^{M}D_i$ 时,则 $\mu_D(y)=\max(\mu_{D_1}(y),$
$\mu_{D_2}(y),\cdots,\mu_{D_M}(y)).$ (35)

当 $D=\bigcap_{i=1}^{M}D_i$ 时,则 $\mu_D(y)=\min(\mu_{D_1}(y),$
$\mu_{D_2}(y),\cdots,\mu_{D_M}(y)).$ (36)

使用与前面相似的方面,也可以轻易地分析出这类基于规则的模糊推理过程的统计敏感性.若采用与前面相同的符号定义,则由引理 3、4 可得

$$R_i'=\left[\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\varepsilon_{ij}\right)\oplus\beta_i\right]R_i,$$
$$D_i'=\left[\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\gamma_j\right)\oplus\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\varepsilon_{ij}\right)\oplus\beta_i\right]D_i,$$
$$D'=\Bigg[\max\left\{\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\gamma_j\right)\oplus\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\varepsilon_{ij}\right)\oplus\beta_1,\cdots,\right.$$
$$\left.\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\gamma_j\right)\oplus\left(\underset{1\le j\le n}{\oplus}\varepsilon_{Mj}\right)\oplus\beta_M\right\}\Bigg]D. \tag{37}$$

式(37)结论当且仅当在模糊推理输出由式(35)、(36)决定时成立.

6　结束语

文中提出了一种新的度量模糊集间近似相等的方式——ε统计相等,并以此为基础,理论与系统地分析了多种模糊推理在不同的算子与模糊规则下的统计敏感性.从分析结果中可以看出,对于许多模糊推理来讲,其前件中的噪音干扰将导致在后件中产生更大的扰动,其统计敏感性可通过它们的方差关系清晰地表现出来.

理论上,在合成运算、蕴涵运算、广义肯定前件式、广义否定后件式和链接模糊推理中,max 和 min 算子可用任何的 s-模算子和任何的 t-模算子替代,而文中仅分析了这些模糊推理中使用几种(文中所列)特定算子时的情况,对于采用其他 s/t 模算子的情况,虽然在实际中经常使用到,但其相应的统计敏感性分析较为复杂,这有待以后进行更深入的探讨,这些工作还包括对模糊方程、甚至模糊联想神经网络的统计敏感性分析.

参考文献:

[1] TORRA V. OWA operators in data modeling and re-identification [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2004, 12(5): 652 - 660.

[2] CAI K C. Robustness of fuzzy reasoning and δ-equalities of fuzzy sets[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(5): 738 - 750.

[3] YING M S. Perturbation of Fuzzy reasoning [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 625 - 629.

[4] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning (I) [J]. Information Science, 1974, 8(2): 199 - 249.

[5] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning (II) [J]. Information Science, 1974, 8(3): 301 - 357.

[6] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning (III) [J]. Information Science, 1975, 9(1): 43 - 80.

[7] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 143 - 202.

[8] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2: Logical approaches [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 203 - 244.

[9] LIU Y, KERRE F E. An overview of fuzzy quantifiers (II): reasoning and applications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95(2): 135 - 146.

[10] NAKANISHI H, TURKSEN I B, SUGENO M. A review and comparison of six reasoning methods [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 57(3): 257 - 294.

[11] WANG G J. On the logic foundation of fuzzy reasoning [J]. Information Science, 1999, 117(1): 47 - 88.

[12] MIZUMOTO M, ZIMMERMANN H J. Comparison of fuzzy reasoning methods [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1982, 8(3): 151 - 186.

[13] CAO Z, KANDEL A. Applicability of some fuzzy implication operators [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(2): 151 - 186.

[14] WANG L X. A course in fuzzy systems and control [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997.

[15] CAI K Y, δ-equalities of fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and

Systems, 1997, 76(1): 97 - 112.

[16] PAPPIS C P. Value approximation of fuzzy systems variables [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 39(1): 111 - 115.

[17] HONG D H, HWANG S Y. A note on the value similarity of fuzzy systems variables [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 66(3): 383 - 386.

[18] LEE E S, ZHU Q. Fuzzy and evidence reasoning [M]. Hiedelberg: Physica-Verlag, 1995.

[19] GUAN J W, BELL D A. Approximate reasoning and evidence theory [J]. Information Science, 1997, 96(3): 207 - 235

[20] HSIAO W H, CHEN S M, LEE C H. A new interpolative reasoning method in sparse rule-based systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 93(1): 17 - 22.

[21] CASTRO J L, TRILLAS E, ZURITA J M. Non-monotonic fuzzy reasoning [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94(3): 217 - 225.

[22] DRIANKOV D, HELLENDOORN H, REINFRANK M. An Introduction to Fuzzy Control [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[23] PAPPIS C P, KARACAPILIDIS N I, A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 56(2): 171 - 174.

[24] CHANG T C, HASEGAWA K, IBBS C W. The effects of membership functions on fuzzy reasoning [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 44(2): 169 - 186.

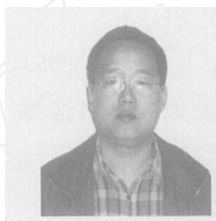
[25] CORDÓN O, HERRERA F, PEREGRÍN A. Searching for basic properties obtaining robust implication operators in fuzzy control [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 111(2): 237 - 251.

[26] MELEK W W, GOLDENBERG A A. The development of a robust fuzzy inference mechanism [J]. Int J of Approximate Reasoning 2005, 39(1): 29 - 47.

[27] ZHANG L, CAI K. Optimal fuzzy reasoning and its robust analysis [J]. Int J Intelligent Systems, 2004, 19(11): 1033 - 1049.

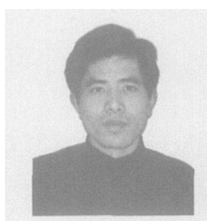
[28] LI Y, LI D, PEDRYCZ W, WU J. An approach to measure the robustness of fuzzy reasoning [J]. Int J Intelligent Systems, 2005, 20(4): 393 - 413.

作者简介:



王士同,男,1964 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为模糊人工智能、模式识别/图像处理和生物信息学等,先后十多次留学英国、日本和香港地区,在国内外重要杂志上发表数十篇学术论文.

E-mail:wxwangst@yahoo.com.cn.



谢振平,男,1979 年生,博士研究生,主要研究方向为模式识别与图像处理.

E-mail:xiezhenping@yahoo.com.cn.

第七届全球智能控制与自动化大会

The Seventh Global Conference on Intelligent Control and Automation

全球智能控制与自动化大会 (WCICA)是每两年一次在中国召开的重要国际会议。第七届大会(WCICA'08)由重庆大学主办,IEEE、国家自然科学基金委员会、中国自动化学会、中国人工智能学会协办,将于 2008 年 6 月 25～27 日在美丽的山城重庆召开。会议为全球从事智能控制和自动化的专家、学者和工程技术人员提供一个交流、研讨和报告他们最新研究成果的平台。大会热忱欢迎广大同行踊跃投稿,录用的论文将由正式出版社出版论文集(附带光盘),版权属 IEEE。论文同时被国际重要检索机构 EI 收录。会议征文包括与智能控制和自动化有关的理论、方法和应用方面的论文。

全文截稿日期:2007 - 10 - 25;

论文录用通知日期 2008 - 1 - 25;

联系人:**任江洪 博士**;

联系电话:86 - 23 - 65112857;

E-mail:wcica08@cqu.edu.cn;

会议网站:http://wcica08.cqu.edu.cn.