模糊系统万能逼近理论研究综述

刘福才[1,2] ,陈 超[1] ,邵 慧[1] ,裴 润[2]
(1. 燕山大学 电气工程学院,河北 秦皇岛 066004;2. 哈尔滨工业大学 航天学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要:模糊系统通用逼近理论是模糊理论研究的一个重要方向. 目前,对模糊系统通用逼近性的研究已经取得了很大的进展. 对模糊系统的通用逼近性、模糊系统作为通用逼近器的充分条件和必要条件以及模糊系统的逼近精度等方面的研究进行了较为详尽的综述,分析了各种分析方法的主要成果及其特点(包括优点和局限性),并指出了今后模糊系统通用逼近理论研究中有待解决的许多问题.

关键词:模糊系统的通用逼近性;充分条件;必要条件;逼近精度

中图分类号: TP15 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-4785(2007)01-0025-10

Researches for universal approximation of fuzzy systems: a survey

LIU Fu-cai[1,2] ,CHEN Chao[1] ,SHAO Hui[1] ,PEI Run[2]
(1. Department of Automation Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The universal approximation of fuzzy systems is an important direction of fuzzy theory. At present, a lot of progress has been made in the research for the universal approximation of fuzzy systems. In this paper, a survey of the universal approximation of fuzzy systems, the sufficient and necessary condition for fuzzy systems as universal approximators, and approximation accuracy of fuzzy systems etc is made in details. The achievement and properties (including advantages and disadvantages) of each method are also analyzed, and then the problems of the universal approximation of fuzzy systems in future researches are pointed out further.

Keywords: universal approximation of fuzzy systems; sufficient conditions; necessary conditions; approximation accuracy

自从 20 世纪 60 年代后期,由 L. A. Zedeh 所创立模糊理论以来,模糊理论在许多领域得到了成功的应用. 在许多应用中,主要的设计目标是根据给定的逼近精度建立一个模糊系统,逼近一个预定的模型或控制过程[1-7],这就是所谓的逼近问题[8-17]. 在实际应用中,当设计一个模糊系统时,了解模糊系统逼近预定的控制或决策的逼近机制是很重要的[18-22]. 因此,模糊系统的通用逼近性研究成为 20 世纪 90 年代以来模糊理论研究的重要方向,同时也是模糊理论的一个重要支柱[23-27]. 所谓模糊系统的通用逼近性是指模糊系统能否以任意精度逼近紧致集(封闭,有界)上的任意连续函数;所谓模糊系统作为函数逼近器的充分条件[16-17,28-30]是指对于任意给定的连续函数,每个输入变量要取多少个模糊子集才能够保证所需要的逼近精度. 而模糊系统作为通用逼近器的必要条件[31-34]可以用来确定所选择模糊系统的组成元素,包括模糊系统的输入模糊子集、输出模糊子集和模糊规则,以及这些组成元素的限制条件等. 而逼近精度[35-37]用来确定模糊系统的误差上界,从而确定一个模糊系统的好坏程度.

模糊系统的理论研究和实际应用都是建立在模糊系统通用逼近性的基础之上的. 这是因为从数学的角度来看,模糊系统是从输入论域到输出论域的一个函数映射. 当模糊系统用作系统建模和辨识时,通用逼近性决定了它是否能够逼近任意连续的非线性动态模型;当模糊系统用作控制时,通用逼近性决

收稿日期:2006-07-28.
基金项目:燕山大学博士基金资助项目(B111).

定了它是否能够对任意非线性动态对象跟踪任意连续的非线性时间函数,并实现所要求的闭环系统的动态品质.可见对模糊系统通用逼近理论的研究,无论在理论上还是在实际应用上都有极为重要的意义.

关于模糊模型通用逼近性的研究近几年国内外相关学者又有了许多新的研究成果[28-35].

文献[35]研究了递阶模糊系统的逼近特性;文献[36]研究了递阶模糊关系模型的语言解释与万能逼近性.

文献[37]建立了 D.C.隶属函数模糊集对模糊集的万能逼近性.探讨了 D.C.隶属函数模糊集与模糊数之间的关系,给出了用 D.C.隶属函数模糊集逼近模糊数的 ε Ce1ina 逼近形式;针对广义递阶 Mamdani 模糊系统,文献[38]借助方形分片线性函数构造性的证明了在最大模和积分模意义下该系统是泛逼近器;文献[39]提出一种广义模糊双曲正切模型,并证明了此模型是 T-S 模型的真子集,它具有全局逼近性;文献[40]证明了具有任意形状隶属函数的递阶模糊系统对紧集上连续函数的逼近性质,为使用递阶模糊系统进行辨识或控制以避免模糊规则数目随系统变量个数呈指数增长提供了理论依据;文献[41]讨论了由"交"和"并"的方式聚合推理规则所生成的 2 类模糊系统的插值性问题,因为当模糊系统具有插值性时,它必具有泛逼近性,因此,由插值性可以分析模糊系统的逼近能力;文献[42]总结了模糊系统作为通用逼近器在存在性、充分性和必要性 3 个方面所作过的主要理论研究,并分析了这些理论成果在工程上的若干应用.

粗略的说,现在对模糊系统作为通用逼近性的研究主要分为 2 个方面:

1)定性研究,主要分析各类具有通用逼近性模糊系统以及产生这种逼近特性的内在机制;

2)定量研究,主要确定各类模糊系统的逼近误差上界并分析其逼近精度.

模糊系统逼近理论的研究主要包括模糊系统的通用逼近性、通用逼近性的存在性、模糊系统作为通用逼近器的充分条件和模糊系统作为通用逼近器的必要条件以及逼近精度 5 个方面,文中将就这几个方面近年来的研究方法及研究成果加以综合分析.

1　模糊系统的通用逼近性

近年来关于模糊系统通用逼近性的研究比较多,众多学者针对各种不同的模糊系统,应用不同的方法分别研究了其函数逼近特性,指出这些特殊的模糊系统是一种万能逼近器.

模糊系统的分类如图 1 所示,可把目前已经证明能够作为通用逼近器或通用控制器的模糊模型分为 3 类:1) Mamdani 模糊系统,2)线性 T-S 模糊系统,3)其他模糊系统.线性 T-S 模糊系统还包括:简化线性 T-S 模糊系统和典型 T-S 模糊系统.其他模糊系统主要包括:模糊控制器、递阶模糊系统和加型模糊系统.在下面论述中,将对这些模糊模型做出简要的概述.

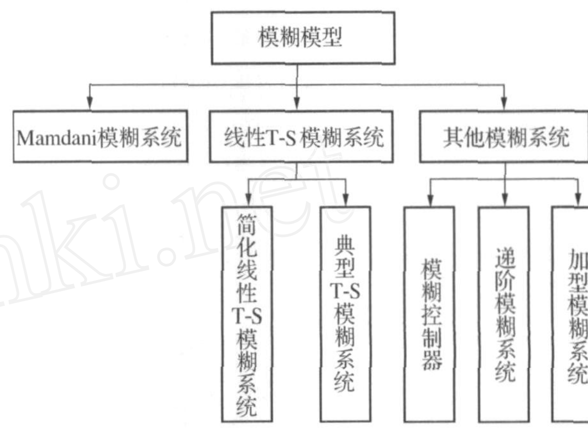

图 1　模糊系统分类

Fig. 1　The classify for fuzzy systems

1.1　Mamdani 模糊系统

Mamdani 模糊系统的一般定义为

$$R^j:\text{if } x_1 \text{ is } A_1^j, \text{and } x_2 \text{ is } A_2^j \cdots,$$
$$x_n \text{ is } A_n^j, \text{then } y_j = B_j, j = 1,2\cdots\cdots M. \quad (1)$$

式中:x_i 是输入变量,$i = 1,2,\cdots n$,A_i^j 和 B_j 是模糊子集,y 是输出变量,M 是输入模糊规则总数.通常 B_j 取为模糊单点,即 $\forall b_j \in U$,如果 $\mu_{B_j}(b_j) = 1$,则对任意 $z \in U$,$z \neq b_j$ 时,$\mu_{B_j}(z) = 0$,式中:U 为 B_j 的论域.此时称由式(1)定义的 Mamdani 模糊系统为特定 Mamdani 模糊系统.

对此特定 Mamdani 模糊系统,设 $0 \le x_i \le 1$.对每一个输入变量 $x_i(i = 1,2,\cdots n)$ 定义 n_j 个模糊子集,从而规则总数为 $M = \prod_{j=1}^{n} n_j$.式(1)所给出的第 i 条规则的激活度为 $\mu_j = \prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^j}(x_i)$.容易求得,特定 Mamdani 模糊系统的输出为

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{M}(\mu_j(X)\, y_j)}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(x)} = \sum_{j=1}^{M}\frac{\mu_j(x)}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(x)}y_j. \quad (2)$$

式中:$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,并且令 $x_0 \equiv 1$.

学者们分别使用不同的数学工具证明了这种特定 Mamdani 模糊系统具有通用逼近性[1-12].首先,

王立新[1]用 Stone-Weierstrass 定理证明了采用乘积推理、中心去模糊、高斯隶属函数的 Mamdani 模糊系统能够以任意精度逼近紧致集上的任意连续实函数. 但由于证明过程使用了复杂的 Stone-Weirstrass 定理,这使得证明潜在的逼近机制并不清晰,并且对于一般的模糊系统是否成立也没能给出确切的答案. 因此,在文献[2]中,王立新又提出了模糊基函数(FBF)的概念. 模糊基函数最大的优点是来自人类专家的模糊语言 IF-THEN 规则直接与模糊基函数相关.

既然模糊基函数在研究模糊系统的通用逼近性方面起了重要的作用,那么,模糊基函数又有哪些特点呢?曾小军在文献[3-4]给出了较详细的分析,并得出了模糊基函数的 5 种性质以及 Mamdani 模糊系统的一些基本特性. 模糊基函数的 5 种性质为:Structure Similarity;Compatibility;Complementarity;Less Fuzzility;Composition of Fuzzy System;Mamdani 模糊系统的基本特性为:基本逼近特性;一致逼近特性;一致收敛特性;通用逼近特性.

王立新和曾小军的研究一方面为模糊系统的设计指明了方向,另一方面也有其局限性. 因为它们所证明的 Mamdani 模糊系统是"特定结构"的通用逼近器,即是采用乘法机制、中心去模糊、高斯隶属函数[1-2]或者具有紧支撑的隶属函数[3-4]的模糊系统. 分析至此,便可以提出 2 个问题:

1) 使用其他隶属函数、模糊逻辑、推理机制及去模糊法的 Mamdani 模糊系统是否具有通用逼近性?

2) 使模糊系统成为通用逼近器的内在机制是什么?

应浩[5-6]采用了将输入空间无限细分的方法,利用 Weierstrass 研究了特定 Mamdani 模糊系统(包括中心去模糊和最大去模糊)是通用逼近器,揭示了函数逼近的内在机制,并推导出了这种模糊系统作为通用逼近器的充分条件. 曾珂[7]则使用了台劳展开法,利用拉格朗日余项证明了特定 Mamdani 模糊系统是通用逼近器.

为了回答"基于其他类型隶属函数的模糊系统是否可以作为函数逼近器"这个问题,毛志宏[8-9]讨论了采用模糊基函数的伸缩及平移作为隶属函数的情形,证明在隶属函数可积、积分非零且几乎处处连续的条件下,Mamdani 模糊系统是通用逼近器.

上面所提及的文献中,均用不同的方法证明了 Mamdani 模糊系统具有通用逼近性,然而模糊系统为何具有通用逼近性?模糊系统的本质何在?这一关键性问题仍未得到很好的解决. 李洪兴在文献[10]中指出:模糊控制其本质上是插值器. 该结论是按"真值流动"的思想提出的. 基于此,在文献[11]中,提出了模糊系统的插值机理,对于模糊系统的函数逼近性提出了新的方法. 受此启发,张恩勤[12]研究了基于三角形隶属函数的一类模糊系统的插值特性,从模糊系统的结构分析上给出了一类模糊系统与分段插值函数的等价性证明,并给出了相应的逼近误差估计.

以上分析较为概括的阐述了目前证明 Mamdani 模糊系统具有通用逼近性的方法. 可以看出,对于 Mamdani 模糊系统作为通用逼近器的研究方法很多,并且每种方法都各有其优点和局限性,而且越来越完善. 可以把这些方法存在的主要问题概括为:

1) 每种方法所证明的 Mamdani 模糊系统都有一定的限制条件(如推理机制、去模糊法、隶属函数等).

2) 没有给出模糊系统具有通用逼近性的内在本质.

1.2 T-S 模糊系统

Mamdani 模糊系统采用模糊集作为规则后件,而 T-S 模糊系统采用输入变量的线性或非线性函数作为规则后件.

T-S 模糊系统的规则表示为

$$R_j: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^j \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^j \text{ and } \cdots \text{and } x_n \text{ is} A_n^j, \quad y_j = f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n), j = 1,2, \cdots, M. \tag{3}$$

式中:x_i ($i = 1,2, \cdots, n$) 为输入变量, A_i^j 为模糊子集, M 为规则总数, $f_i(\cdot)$ 为线性或非线性函数. 当 $f_i(\cdot)$ 为输入变量的线性函数时,此系统为线性 T-S 模糊系统. 而线性 T-S 模糊系统在应浩[13-14]、曾珂[15-16]的证明方法中又分为简化线性 T-S 模糊系统和典型 T-S 模糊系统的数学模型.

为了区分二者的不同点,必须首先给出简化线性 T-S 模糊系统和典型 T-S 模糊系统.

1.2.1 简化线性 T-S 模糊系统

在 T-S 模糊系统中,为了减少设计的参数,应浩采用了简化了的线性 T-S 模糊系统.

对于 SISO 系统,系统表述如下:

$$R_j: \text{IF } x \text{ is } A_{pj}, \quad \text{THEN } \ y = k_j(ax + b), j = 1,2, \cdots, M. \tag{4}$$

对于 MISO 系统,系统表述如下:

$$R_j: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^j \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^j \text{ and } \cdots \text{and } x_n \text{ is } A_n^j, \quad \text{THEN } \ y = k_j(a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n), \quad j = 1,2, \cdots, M. \tag{5}$$

式中：$a, b, a_0, a_1, \cdots, a_n, k_j (j = 1, 2, \cdots, M)$，为要设计的参数. 而每个规则中，$a, b, a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是定值，要变动的只有 $k_j (j = 1, 2, \cdots, M)$. 这样要设计的参数总共只有 $M + n + 2$ 个，几乎减少了一半. 这样，得到的简化线性 T-S 模糊系统的输出为

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{M}(\mu_j(x) y_j)}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(x)}. \tag{6}$$

对于这种简化的线性 T-S 模糊系统，应浩从数学上推导出了简化了的 SISO[13] 与 MISO[13] 线性 T-S 模糊系统为通用逼近器，并给出了相应的充分条件. 但是由于简化线性 T-S 模糊系统的限制条件较多，虽然所需求解的规则后件的参数较少，但实际应用中仍有一定的局限性. 为此，应浩又用类似的方法证明了一般线性 T-S 模糊系统的通用逼近性[14]，曾珂则证明了典型 T-S 模糊系统的通用逼近性[15].

1.2.2　典型 T-S 模糊系统

典型 T-S 模糊系统的一般定义为

$$R_j: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^j \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^j \text{ and } \cdots \text{and } x_n \text{ is } A_n^j \text{ THEN},$$

$$y = p_{j0} + p_{j1} x_1 + p_{j2} x_2 + \cdots + p_{jn} x_n = p_{j0} + \sum_{i=1}^{n} p_{ji} x_i,\ j = 1, 2, \cdots, M. \tag{7}$$

式中：$x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为输入变量，A_i^j 为模糊子集，M 为规则总数，$p_{ji} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为模糊系统的参数. 对典型 T-S 模糊系统，设 $0 \le x_i \le 1$. 对每一个输入变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots n)$ 定义 n_i 个模糊子集，从而规则总数为 $M = \prod_{i=1}^{n} n_i$. 式(7)所给出的第 i 条规则的激活度为 $\mu_j = \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^j}(x_i)$. 容易求得典型 T-S 模糊系统的输出为

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{M}\left[\mu_j(x)\left(\sum_{i=0}^{n} p_{ji} x_i\right)\right]}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(x)}. \tag{8}$$

式中：$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，并且令 $x_0 \equiv 1$.

对于这种典型 T-S 模糊系统，曾珂[15] 证明，在采用广义全交叠输入隶属函数的前提下，该系统具有通用逼近性，并得到了其作为通用逼近器的充分条件[16].

而陈卫田[17] 则利用终值定理，对带有非模糊规则后件的模糊逻辑控制(FLC)系统进行分析，证明了该系统具有通用逼近性，并得到了其作为通用逼近器的充分条件[17].

在文献[18]中，Hua o. Wang 提到了线性 T-S 模糊系统和 PDC 控制器，并讨论了它们的基本性能，得到了 2 个结果：

1) 线性 T-S 模糊系统是光滑非线性动态系统的通用逼近器；

2) PDC 控制器是非线性状态反馈控制器的通用逼近器.

T-S 模糊系统作为通用逼近器的基本思想是：采用局部线性化实现全局非线性逼近. 目前，对 T-S 模糊系统的研究并不多，并且主要集中在对线性 T-S 模糊系统通用逼近性的研究上，应浩、曾珂、陈卫田所提出的方法虽然各不相同，但它们之间有一定的相关性，这从线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件的比较中可以看出. 他们的方法有共同的优点：所证明的线性 T-S 模糊系统对隶属函数类型、模糊逻辑控制以及去模糊方法没有任何限制. 但与此同时，3 种方法证明过程中的限制条件也提出了 T-S 模糊系统研究中待解决的问题：线性 T-S 模糊系统可以实现全局非线性逼近，那么非线性 T-S 模糊系统是否也可以作为非线性逼近器？

1.3　其他模糊系统的逼近性问题

随着模糊逼近理论的不断发展，研究各种类型的通用逼近器逐渐成为研究的热点. 目前，除了 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统，所研究的其他主要模糊系统包括：1) 模糊控制器，2) 递阶模糊系统，3) 加型模糊系统.

1.3.1　模糊控制器

近些年来，对于模糊控制器的研究不断增多，模糊控制是一种基于规则的控制，它直接采用语言型控制规则，其依据是现场操作员的控制经验或相关专家的知识，在设计中不需要建立被控对象的精确数学模型，因而使得控制机理和策略易于接受和理解，设计简单，便于使用.

在文献[19]中，Buckley 将基本模糊控制器分为 3 类：1) expert systems；2) approximation reasoning(fuzzy logic)；3) Sugeno controller.

通用控制器研究方向的第一个结果是：如果一个过程可由一个连续控制器(不一定是模糊控制器)控制，那么这个过程也可由多元素同时运行的模糊控制器所控制.

在文献[20]中，Buckley 证明了基于 Sugeno 型模糊控制器是通用模糊控制器；在 Buckley[1-3] 中，又证明了基于 ξ 系列的模糊控制器是通用逼近器. 但是，在证明 ξ 系列的模糊控制器是通用逼近器的过程中遇到了 2 个问题：

1) $\delta = FC(e, \Delta e)$ 不是 $(e, \Delta e)$ 的连续函数；

2) 在多变量情况下 ξ 不封闭,因此不能使用 Stone-Weierstrass 定理.

由于上面 2 个问题的存在,Buckley 未能找到基于逼近原理(模糊逻辑) 的通用模糊控制器,因此,寻找是否存在基于逼近原理的通用模糊控制器将成为一个深入研究的课题.

Castro[21] 回答了一个基本的理论问题"为什么模糊系统对各种各样的实际问题具有如此优越的性能?",同时提出了模糊逻辑控制器(FLC) 的概念,模糊逻辑控制器包括 2 种类型:具有模糊规则后件的模糊逻辑控制器和具有非模糊规则后件的模糊逻辑控制器. 在文献中,他一方面说明了一种特殊类型的模糊逻辑控制器是通用逼近器,这种类型的模糊逻辑控制器满足:高斯隶属函数、乘法模糊推理、中心去模糊. 另一方面,又证明了其他类型的模糊逻辑控制器也是通用逼近器,这些模糊逻辑控制器包括:

1) 具有其他隶属函数的模糊系统(包括三角形隶属函数、梯形隶属函数等);

2) 以任意协范数为模型的模糊连接器;

3) 只需满足较弱特性的模糊推理;

4) 只需满足较弱条件的去模糊方法.

证明了诸多模糊逻辑控制器是通用逼近器之后,又出现了一个比较实际的问题:给出一个特定的控制问题之后,哪一种类型的模糊逻辑控制器更适合呢? 文献[21]没有解决,另外,文献[21]也没有给出最优模糊逻辑控制器的结构和大小.

但是,尽管在实际应用中,由于不知道最优控制器是怎样进行选择的,但上面的叙述却从理论上说明了模糊控制可以作为通用控制工具. 有了这些理论基础,Ngnyen[22] 证明了模糊控制可用于许多实际控制系统中(如分布式系统). 尽管如此,模糊控制方法的选择还要由许多附加条件所决定,如控制结果的光滑性、稳定性、灵敏性等.

1.3.2　递阶模糊系统

上面所讲述的模糊系统都是标准模糊系统,但是限制典型模糊控制器广泛应用的一个重要问题是"规则爆炸"问题,也就是模糊规则数随着模糊控制器输入变量数的增加而迅速增加. 这就增加了模糊系统的复杂性. 王立新[23] 提出了递阶模糊系统,从而解决了"多维曲面"的问题. 递阶模型的基本思想是把一个多维输入模糊系统转化成低维模糊系统的集合. 其中的低维模糊系统称为 Takagi-Sugeno-Kang(TSK) 模糊系统.

在文献[23]中,王立新以三输入模糊系统为例用 Stone-Weierstrass 定理证明了递阶模糊系统是通用逼近器,并且模糊规则数随着输入变量的增加而线性增加. 后来,Campello[24] 又进一步证明,一个参数较少的递阶模糊关系系统可以转化成一个等价的非递阶模糊关系. 这个等价模型可以用于提取模糊规则,也可以用于减少所提取的规则.

从本质上讲,标准模糊系统的 IF 部分需要包括整个论域,所以 THEN 部分要简单(可以是常数);递阶模糊系统的 IF 部分不包括整个论域,从而使 THEN 部分变得复杂.

从上面的分析可以看出,虽然递阶模糊系统的模糊规则总数比相对应的标准模糊系统要少,即较好地解决了"规则爆炸"问题,但递阶模糊系统的每一条规则要比标准模糊系统复杂得多,因为它的 THEN 部分是输入变量的顺序多项式.

1.3.3　加型模糊系统

所谓加型模糊系统(SAM),是指将模糊规则的输出或结论部分子集加到输入之中,这样便得到一个输入 - 输出状态空间,它覆盖函数的图像并将交叠的模糊补块平均化. 加型模糊系统就是通过用输入 - 输出状态空间的模糊补块覆盖来逼近函数的. 每一条模糊规则定义了一个模糊补块,从而将状态空间的几何图形与实际内容联系起来.

Kosko[25-26] 利用有限覆盖定理研究了加型模糊系统的函数逼近性. 证明了一个加型模糊系统通过神经元或统计聚类算法逼近一个位置的模糊补块,并从训练数据中产生一个模糊系统. Kosko 在文献[25]对模糊集互相重叠个数做了假设,在文献[26]中对这一假设进行了削弱.

张恩勤[27] 采用了较为简单的方法证明了一类基于规则的加型模糊系统的通用逼近特性,由于很多环节的处理上更为自由,所研究的加型模糊系统更为广泛.

关于模糊系统在通用逼近性的存在性方面所取得的研究成果可参见文献[42].

2　模糊系统作为通用逼近器的充分条件研究与分析

2.1　关于充分条件的研究

由于充分条件决定了模糊系统逼近误差的上界,对已得到的模糊系统一致逼近任意连续时函数的各种充分条件进行比较分析,判定哪一个充分条件所确定的逼近误差上界更小,或者在什么情况下更小,以及计算复杂程度等等,这些工作无疑在理论和应用上都有非常重要的意义.

纵观国内所有关于模糊系统作为函数逼近器及

其充分条件的研究,在前期的证明中有不少作者使用了十分复杂的 Weierstrass-stone 定理[13],使得证明体现不出模糊系统的结构,难于实际应用. 后来的证明不少采用了 Weierstrass 定理[6,13-14,28],这样能够揭示模糊系统作为函数逼近器的内部结构,并能很容易导出其作为函数逼近器的充分条件. 根据 Weierstrass 定理,多项式可以任意精度逼近一个任意在实域上连续的非线性或线性函数. 那么要证明模糊系统能够逼近任意函数,只需证明该模糊系统能够逼近任意多项式即可. 因此,一般有关模糊系统是通用逼近器及其充分条件的研究都遵循如下的 2 个步骤:1) 模糊系统能逼近任意多项式;2) 采用 Weierstrass 近似定理进行过渡.

目前,对模糊系统作为通用逼近器的充分条件的研究主要集中于 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统. 式中:文献[6-7]研究的是 Mamdani 模糊系统,文献[13-14,16-17,28-29]研究的是 T-S 模糊系统. Hao Ying[6] 首先研究了简化 Mamdani 模糊系统(规则后件是单点模糊集)作为通用逼近器的充分条件,但是要求每一个输入变量的模糊子集有相同的隶属函数形式,并且每一模糊子集的隶属函数在中心点以左是不减的,在中心点以右是不增的. 曾珂在文献[7]中引入广义全交叠的概念,对隶属函数的限定条件与文献[6]相比放宽了许多,所得到的充分条件在形式上更简洁.

Hao Ying 在文献[13-14]中分别讨论了 2 种采用比例的线性函数作为规则后件的简化 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件. 更进一步,在文献[28]中,Hao Ying 研究了一般的采用输入变量的线性函数作为规则后件和全交叠输入隶属函数的 T-S 模糊系统的充分条件. 曾珂在文献[29]中研究了采用输入变量的线性函数作为规则后件和广义全交叠隶属函数的 T-S 模糊系统以任意精度一致逼近紧支集上任意连续时函数的一个充分条件,并给出了数值示例,所得结果远远优于文献[28]的结果. 陈卫田[17]通过采用与[28]不同的方法,首次直接针对一类模糊系统,给出了它们逼近函数的构造性充分条件,并给出了逼近精度与模糊规则数量之间的关系的显式公式.

2.2 关于模糊规则数量的比较

为了便于比较与分析,把上述 3 种方法获得的充分条件列于表 1. 表中各符号的意义可参见文献[6,17,28-29]. 从表中可以看出,由 Zeng's 方法得到的充分条件在形式上也更简洁. 同时,注意到用 Zeng's 方法计算所得的结果不会大于用 Ying's 方法算得的结果. 但是,由于 Ying's 方法仅取决于多项式函数的系数,其计算复杂度要比依赖于偏微分极值的 Zeng's 方法低许多,特别在维数很高的情况下更是如此. Zeng's 方法和 Chen's 方法得出的充分条件和 Ying's 方法相比,均具有较低的保守性.

那么,Zeng's 方法和 Chen's 方法谁的保守性更低?换句话说,这 3 个充分条件之间又有怎样的关系呢?在文献[31]中已经给出了证明,有如下结果:

1) 对 Mamdani 模糊系统和线性 T-S 模糊系统,Ying's 方法得到的模糊系统作为通用逼近器的充分条件的保守性最大;

2) 对 Mamdani 模糊系统,当 Chen's 方法的模糊系统对输入变量进行模糊等分时,其得到的充分条件与 Zeng's 方法所得到的充分条件是等价的. 而不等分时,曾珂所得到的充分条件保守性要大些.

3) 对线性 T-S 模糊系统,Zeng's 方法和 Chen's 方法所得的比较结果之间则不存在简单的大小关系.

表 1 充分条件比较

Table 1 Comparison of coefficient conditions

方法	模糊规则后件为模糊集合(或单一实数)	模糊规则后件为 T-S 模型
Ying's 方法[6,44]	a) $n^* = \frac{c_1^{\max}}{\varepsilon_2}\sum_{d_1=1}^{d}(\|\beta_{d_1}\|\cdot d_1), r=1$ b) $n^* \approx \frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{d_i>0}\left(\|\beta_{d_1,\cdots,d_r}\|\sum_{i=1}^{r}(d_i\cdot c_i^{\max})\right), r>1$	$n^* \geq \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\|\beta_{1,0}\|+\|\beta_{0,1}\| + \sum_{d_1=0}^{M_1}\sum_{d_2=0}^{M_2}\|\beta_{d_1,d_2}\|(2^{d_1+d_2}-1)\right),$
Zeng's 方法[45]	$n_0 > \frac{1}{\varepsilon_2}\cdot\sum_{i=1}^{r}\left\|\frac{\partial P_q}{\partial x_i}\right\|_\infty - 1, r>1$	$n_0 > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\left\|\frac{\partial^2 P_q}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_\infty} - 1$
Chen's 方法[17]	$k^{fuz} \geq \prod_{i=1}^{r}\left[\mathrm{int}\left(\frac{rM_{i1}}{\varepsilon_2}\right)+1\right], r>1$	$k^{\mathrm{non}} \geq \prod_{i=1}^{r}\left[\mathrm{int}\left(\frac{rM_{i1}}{2\varepsilon_2}\right)+1\right], r>1$

2.3　Mamdani 模糊系统与 T-S 模糊系统之间的比较

众所周知, T-S 模糊系统的通用逼近性要好于 Mamdani 模糊系统,一般的理解是, T-S 模糊系统相当于用许多块可以由不同倾斜方向的超平面来拟合一个光滑曲面,因此其函数逼近性能要优于仅用水平超平面进行拟合的 Mamdani 模糊系统. 从 Zeng 所得的结论也可以看出,当 ε 充分小时有, T-S 模糊系统一致逼近时需要的模糊子集数 $n_0 \propto 1/\sqrt{\varepsilon}$, 而对于 Mamdani 模糊系统, $n_0 \propto 1/\varepsilon$. 而从 Chen 的结论也可以直观地看出, T-S 模糊系统一致逼近时所需要的模糊子集数 $k \propto 1/2\varepsilon$,而 Mamdani 模糊系统 $k \propto 1/\varepsilon$. 因此,与 Mamdani 模糊系统相比,对于同样给定的定义在紧致集上的连续实函数和一致精度 ε, T-S 模糊系统每个输入变量所需的模糊子集数要少得多.

总的看来,目前对模糊系统的一致逼近定义在紧致集上的任意连续时函数的充分条件已经取得了一定的成果,但仍然存在着一些问题:

1) 逼近精度越高,所需的模糊子集数越多,这在理论上是可行的. 但在实际应用中是非常困难甚至是不可能的.

2) 在较小逼近上界的情况下,能否在数量上估计出模糊子集和模糊规则数?

下一步的主要工作应当致力于放宽限制条件和得到最小误差上界[37].

3　模糊系统作为通用逼近器的必要条件

从实用角度出发,只要能够满足精度,希望采用简单的模糊系统(控制器或模型)逼近给定的函数. 这就激励人们去研究具有最小系统构成的 Mamdani 模糊系统或 T-S 模糊系统作为通用逼近器的必要条件. 这些条件在实际应用中用来确定模糊系统的输入子集、输出子集和模糊规则. 另外,这些必要条件为模糊系统的鲁棒性和局限性的深入分析提供了基础. 主要的鲁棒性是:对于一些表达式复杂却有相对较少极点函数,一致逼近所需的模糊规则较少. 主要的局限性是:为了以较高精度逼近连续函数,模糊规则必须很大.

目前,研究必要条件的文献还比较少,只有应浩确定了一般 SISO 模糊系统[32]、一些典型 MISO 模糊系统(单点模糊输出)[32]、一般 MISO 模糊系统[33]和 T-S 模糊系统[33]作为通用逼近器的必要条件,并将 T-S 模糊系统作为通用逼近器的必要条件与 Mamdani 模糊系统作为通用逼近器的必要条件进行了比较[34],指出了如何根据逼近精度和欲逼近连续函数极值点的个数来确定模糊系统的输入模糊子集、输出模糊子集和模糊规则.

对于一般 SISO 模糊系统和一些典型 MISO 模糊系统(单点模糊输出)作为通用逼近器的必要条件,文献[32-33]分别给出了 2 个定理.

基于上述定理,应浩得出了一般的结论:

1) 一方面,对于一些表达式复杂却有相对较少极点的函数,一致逼近所需的模糊规则较少. 另一方面,对于一些表达式简单却有相对较多极点的函数,一致逼近所需的模糊规则较多. 与其他逼近技术相比,在逼近一个较高频率的连续函数时,一般不用模糊系统,尤其是使用三角形模糊子集的 SISO 和 MISO 模糊系统. 这就是所谓的模糊系统的逼近强度和局限性问题.

2) 典型 T-S 模糊系统和一般 Mamdani 模糊系统的最小配置由于逼近函数的极点数及位置决定. 当使用梯形或三角形模糊子集时,在最小配置方面, T-S 模糊系统和 Mamdani 模糊系统是兼容的;当使用非梯形或非三角形模糊子集时, T-S 模糊系统的最小配置比 Mamdani 模糊系统要小.

由于对模糊系统作为通用逼近器的必要条件的研究还不多,因此还有许多待解决的问题,例如:

1) 文献[32]中所得到的必要条件是否可用于其他系统中;

2) 文献[33]中 T-S 模糊系统和 Mamdani 模糊系统所得到的比较结果还需要严格的数学证明.

4　逼近精度简要分析

近年来,模糊系统发展很快,其优点是能够根据与逼近函数和语言信息进行设计,但这种优点同时伴随着一个问题 ——模糊系统的逼近精度问题.

曾小军[44-45]通过研究隶属函数和逼近精度的关系,讨论了怎样通过设计隶属函数来改善模糊系统的逼近精度:当模糊子集对应的隶属函数 $A_i(x)$ 和 $A_{i+1}(x)$ 的交点在中心点附近时,模糊系统的逼近精度高,反之,逼近精度低.

王立新[46]提出了设计模糊系统的 2 种方法:聚类法(包括三角形隶属函数和高斯型隶属函数)和查表法. 在文献[46]中,王立新还得出了影响逼近精度的 2 个因素:1) 设计模糊系统时的解决方法;2) 欲逼近函数的光滑程度.

目前对模糊系统逼近精度的研究还很不够. 一般而言,逼近精度越高,所设计的模糊系统越复杂,从而影响模糊系统的实际应用. 因此,研究模糊系统

的逼近精度问题必将是模糊逼近理论研究的永恒的课题.

5 结 论

在短短 20 多年的时间里,模糊理论得到长足的发展,而模糊系统通用逼近性的研究也越发显得重要.它的应用领域涉及了诸多方面,控制方法也有了很大进展.但是,模糊系统理论还有一些重要的理论课题没有解决,其中几个重要的问题是:

1) 模糊规则设计方法的研究,包括模糊集合隶属函数设定方法、规则和隶属函数参数自动生成等问题;

2) 如何保证模糊系统的稳定性.

另外,模糊规则是建立在"IF-THEN"表达式之上,这种方式容易让人理解.但是在自动生成、调整参数和模糊规则上却很困难.而神经网络对环境的变化具有较强的自适应能力,所以可结合神经网络的学习能力来训练模糊规则,提高整个系统的学习能力和表达能力,这是目前最受注目的一个课题.

文中针对在理论和实际应用中都具有极为重要意义的模糊系统逼近理论,从模糊系统的通用逼近性、模糊系统作为通用逼近器的充分条件、模糊系统作为通用逼近器的必要条件和模糊系统的逼近精度等 4 个方面的研究状况进行了分析.首先总结了目前已经证明能够作为通用逼近器或通用控制器的模糊模型,概括了各种不同的证明方法,指出了各种方法相应的优点及局限性.然后总结了 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件和必要条件,最后简要阐述了模糊系统的逼近精度问题.文中的综合性分析,为模糊系统在实际应用中作为通用逼近器提供了综合性参考,并为以后进一步进行这方面的工作奠定了理论基础.

参考文献:

[1] WANG Lixin. Fuzzy systems are universal approximators [C]. IEEE Conf Fuzzy Systems. San Diego, USA. 1992: 1163 - 1170.

[2] WANG Lixin, JERRY M. Mendel fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least - squares learning [J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 1992, 3(5): 807 - 814.

[3] ZENG Xiaojun, MADAN G. Singh approximation theory of fuzzy systems - SISO case [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 1994, 2(2): 162 - 176.

[4] ZENG Xiaojun, MADAN G. Singh approximation theory of fuzzy systems - MIMO case [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 1995, 3(2): 219 - 235.

[5] HAO Ying. General fuzzy systems are universal approximators[A]. Pro of the 32nd Conf on Decision and Control[C]. San Antonio, USA. 1993: 1739 - 1742.

[6] HAO Ying. Sufficient condition on general fuzzy systems as function approximatiors [J]. Automatic, 1994, 30 (3): 521 - 525.

[7] 曾 珂, 徐文立, 张乃尧. 特定 Mamdani 模糊系统的通用逼近性[J]. 控制与决策, 2000, 15(4): 435 - 438.
ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Universal approximation of special Mamdani fuzzy systems [J]. Control & decision, 2000, 15(4): 435 - 438.

[8] MAO Zhihong, LI Yanda, ZHANG Xuefeng. Approximation capability of fuzzy systems using translation and dilations of one fixed function as membership functions [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 1997, 5(3): 468 - 473.

[9] 毛志宏, 张雪枫, 李衍达. 模糊系统作为通用函数逼近器研究[J]. 中国科学(E辑), 1997, 27(4): 362 - 367.
MAO Zhihong, ZHANG Xuefeng, LI Yanda. Study on fuzzy systems as universal function approximators [J]. China Science(E), 1997, 27(4): 362 - 367.

[10] 李洪兴. 模糊系统的数学本质与一类高精度控制器的设计[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 868 - 876.
LI Hongxing. Mathematical essence of fuzzy systems and design of a kind of high accuracy controller [J]. Control Theory & Application, 1997, 14(6): 868 - 876.

[11] 李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. 中国科学(E辑), 1998, 28(3): 259 - 267
LI Hongxing. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. China Science(E), 1998, 28(3): 259 - 267.

[12] 张恩勤, 施颂椒, 翁正新. 采用三角型隶属函数的模糊逻辑系统的插值特性[J]. 自动化学报, 27(6): 784 - 790.
ZHANG Enqin, SHI Songjiao, WENG Zhengxin. Fuzzy systems using triangle MF as interpolation functions [J]. Automatic, 2001, 27(6): 784 - 790.

[13] HAO Ying. General SISO Takagi - Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 1998, 6(4): 582 - 587.

[14] HAO Ying. General Takagi - Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 1998(108): 91 - 107.

[15] 曾 珂, 徐文立, 张乃尧. 典型 T-S 模糊系统是通用逼近器[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(2): 294 - 297.
ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Typical T-S fuzzy systems are universal approximators [J]. Control

Theory & Application, 2001, 18(2): 294 - 297.

[16]曾　珂,徐文立,张乃尧. 线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件[J]. 自动化学报,2001,27(5):606 - 612.
ZENG Ke, XU Wenli, ZHANG Naiyao. Sufficient condition on the linear T-S fuzzy systems as universal approximatiors [J]. Acta Automatica Sinica., 2001, 27(5): 606 - 612.

[17] CHEN Weitian. Sufficient conditions on fuzzy logic controllers as universal approximators [J]. IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics, 2001, 31(2): 270 - 274.

[18] WANG Hua'o, LI Jing, DAVID N, KAZUO T. T-S fuzzy model with linear rule consequence and PDC controller: a universal framework for nonlinear control systems[A]. IEEE Conf Fuzzy Systems[C]. [s.l.], 2000.

[19] BUCKLEY J J. Universal fuzzy controllers [J]. Automatic, 1992, 28(6): 1245 - 1248.

[20] BUCKLEY J J. Sugeno type controllers are universal controllers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993(53): 299 - 303.

[21] CASTRO J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators [J]. IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics, 1995, 25(4): 629 - 635.

[22] HUNG T, NGUYEN, VLADIK K, ONGARD S. Fuzzy control as a universal control tool [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80: 71 - 86.

[23] WANG Lixin. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 93: 223 - 230.

[24] CAMPELLO R J B, AMARAL W C. Hierarchical fuzzy relational models: lingustic interpretation and uiversal approximation[A]. IEEE Conf Fuzzy Systems [C]. Hawaii, USA. 2002.

[25] BART K. Fuzzy systems as universal approximators [A]. IEEE Conf Fuzzy Systems[C]. [s.l.], 1992.

[26] JULIE A. DICKERSON, BART K. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules [A]. IEEE Conf Fuzzy Systems[C]. New Orleans, Louisiana, USA. 1996.

[27]张恩勤,施颂椒,翁正新. 模糊系统的函数逼近特性研究[J]. 模糊系统与数学,2000,14(2):60 - 64.
ZHANG Enqin, SHI Songjiao, WENG Zhengxin. Study on fuzzy systems as universal approximators [J]. Fuzzy Systems & Math, 2000, 14(2): 60 - 64.

[28] HAO Ying. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate function by T-S fuzzy systems with linear rule consequent [J]. IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 1998, 28(4): 515 - 520.

[29] ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773 - 780.

[30]曾　珂,徐文立,张乃尧. 模糊系统作为通用逼近器的充分条件及其比较分析[A]. 智能控制和自动化第三次世界会议[C]. 中国,合肥,2000.
ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Comparison and analysis of sufficient conditions for fuzzy systems as universal approximators[A]. Proc. 3rd World Congress on Intelligent control and Automatic[C]. Hefei, China, 2000.

[31]刘福才,邵　慧. 两类模糊系统作为通用逼近器的充分条件的研究及分析[J]. 模糊系统与数学, 2006,20(5): 101 - 106.
LIU Fucai, SHAO Hui. Study and analysis of sufficient conditions for two class fuzzy systems as universal approximators [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006,20(5):101 - 106.

[32] HAO Ying, CHEN Guanrong. Necessary conditions for some typical fuzzy systems as universal approximators [J]. Automatic, 1997, 33(7): 1333 - 1338.

[33] DING Yongsheng, HAO Ying, SHAO Shihuang. Necessary conditions for general MISO fuzzy systems as universal approximators[A]. IEEE Conf Fuzzy Systems [C]. Anchorage, USA. 1997.

[34] HAO Ying, DING Yongsheng, LI Shaokuan, SHAO Shihuang. Comparison of necessary conditions for Typical Takaqi - Sugeno and Mamdani fuzzy systems as universal approximators [J]. IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 1999, 29(5): 508 - 514.

[35] ZENG Xiaojun, JOHN A, KEANE. Approximation capabilities of hierarchical fuzzy systems[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2005, 13(5): 659 - 672.

[36] RICARDO J. CAMPELLO GB, WAGNER C. Hierarchical fuzzy relational models: linguistic interpretation and universal approximation[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14(3):446 - 453.

[37]邱中华,李　雷. D. C. 隶属函数模糊集及其应用(II) ——D. C. 隶属函数模糊集的万能逼近性[J]. 模糊系统与数学,2006,20(2):50 - 60.
QIU Zhonghua, LI Lei. Fuzzy set based on D. C. membership functions and its applications (II) universal approximation of D. C. membership function fuzzy sets [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(2): 50 - 60.

[38]张宇卓,李洪兴. 广义递阶 Mamdani 模糊系统及其泛逼近性[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 450 - 454.

ZHANG Yuzhuo, LI Hongxing. Generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems and their universal approximation[J]. Control Theory & Application, 2006, 23(3): 450 - 454.

[39]张化光,王智良,黎 明,等. 广义模糊双曲正切模型:一个万能逼近器[J]. 自动化学报, 2004, 30(3): 416 - 422.

ZHANG Huaguang, WANG Zhiliang, LI Ming, et al. Generalized fuzzy hyperbolic model: a universal approximator[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(3): 416 - 422.

[40]孙多青,霍 伟. 具有任意形状隶属函数的分层模糊系统逼近性能研究[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 377 - 381.

SUN Duoqing, HUO Wei. Study on universal approximation of hierarchical fuzzy systems with arbitrary membership functions[J]. Control Theory & Application, 2003, 20(3): 377 - 381.

[41]侯 健,李洪兴,王加银. 两类模糊系统具有插值性的充要条件[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 287 - 291.

HOU Jian, LI Hongxing, WANG Jiayi. Sufficient and necessary conditions for fuzzy systems possessing interpolation property[J]. Control Theory & Application, 2006, 23(2): 287 - 291.

[42]刘慧林,冯汝鹏,胡瑞栋,等. 模糊系统作为通用逼近器的10年历程[J]. 控制与决策, 2004, 19(4): 367 - 371.

LIU Huilin, FENG Rupeng, HU Ruidong, et al. Decennary development of fuzzy system s as universal approximators[J]. Control and Decision, 2004, 19(4): 367 - 371.

[43]DING Yongsheng, HAO Ying, SHAO Shihuang. Necessary conditions on minimal system configuration for general MISO Mamdani fuzzy systems as universal approximators [J]. IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics —Part B: Cybernetics, 2000, 30(6): 857 - 864.

[44]ZENG XiaoJun, MADAN G. Singh. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 44 - 63.

[45]ZENG XiaoJun, MADAN G. Singh. A relationship between membership functions and approximation accuracy in fuzzy system [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics, 1996, 26(1): 176 - 180.

[46]WANG Lixin, CHEN Wei. Approximation accuracy of some nuero-fuzzy approaches [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2000, 8(4): 470 - 478.

作者简介:

刘福才,男,1966年生,博士,教授. 主要研究方向为模糊辨识与预测控制、电力拖动及其计算机控制. 编写《现代控制理论》、《交流伺服运动控制系统》、《非线性系统的模糊模型辨识及其应用》等书籍;发表论文90余篇.

E-mail: lfc_xb@263.net.

陈 超,女,1982年生,硕士研究生,主要研究方向为模糊辨识与模糊控制.

邵 慧,女,1980年生,硕士研究生,主要研究方向为信号的检测与处理.