

具有一般化结构的分数阶超前校正器

汪纪锋,李元凯

(重庆邮电大学 自动化学院,重庆 400065)

摘要:根据分数阶系统扩展频域分析法对分数阶相位超前校正器进行建模,这一结构能使该校正器与传统整数阶校正器一样为原系统提供一个零点和一个极点,具有任意阶次超前校正器的统一化形式.给出扩展频域超前校正器的解析法设计步骤,并和一般频率域下不同结构的分数阶超前校正器的适用性作了分析比较和性能仿真.

关键词:分数阶;超前补偿器;扩展频域分析;控制系统

中图分类号:TP13 **文献标识码:**A **文章编号:**1673-4785(2006)02-0062-05

The fractional-order lead compensator with general structure

WANG Ji-feng, LI Yuan-kai

(College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The fractional-order lead compensator provided in this paper is modeled by extended frequency analysis for fractional systems. It has a new structure which gives the original system one zero and one pole definitely like the integer order, and can be regarded as a generalized form of conventional compensators with arbitrary orders. Its analytical design method is given. Also, comparison and simulation are made between two fractional-order lead compensators with different structures in common and extended frequency domain.

Key words: fractional order; lead compensator; extended frequency analysis; control system

对于分数阶控制系统,以往的方法是将其近似为整数阶系统,然后对近似系统进行控制器设计,这样就存在设计偏差,甚至不能满足原系统重要性能如稳定性的要求,因此就有必要进行分数阶控制器的研究和设计^[1-3].目前,分数阶控制器有4种提法,一为TID控制器^[4].它由积分环节、微分环节和一个分数阶环节并联组成,其结构简单,参数较少,调节方便,但很难达到理想效果.二是CRONE控制器.它由Oustaloup提出,已经成功地运用于实际,是控制器的一种理想选择,文献[5]详细论述了CRONE控制器.三是Podlubny提出的PI D^μ控制器^[6],它与TID控制器相比,前者可以获得更精确的控制性能,代价是结构较为复杂,参数较多,有3个增益和2个阶次参数.第四是超前滞后校正补偿器^[7-8],这种形式的控制器同样能够取得很好的控制效果,但是缺乏关于控制器向系统提供的零极点

的合理解释,并且依然需要系统的设计方法.文中基于分数系统扩展频域法^[9],提出不同于以往的分数阶超前校正器,这种新结构能够很好解决零极点问题.

1 扩展频域模型与分数超前校正器

整数阶系统在正负频域内的频域特性极为相似,仅考虑系统的正频域特性即可.然而这并不适用于具有任意性阶次的分数阶系统,因此就有必要将区间作为整体考察其频域特性,即分数阶系统扩展频域法.

1.1 扩展频率模型

扩展频域下的分数阶系统数学模型必须满足确立分数阶系统零极点的唯一性条件^[10].考虑分数阶方程:

$$s^\mu = A(\cos + i \sin) = A, \quad [0, 2]. \quad (1)$$

$$s = A^{\frac{1}{\mu}} \frac{+2k}{\mu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1. \quad (2)$$

由式(1)、(2)可知,原方程的所有解在s^μ平面上均

收稿日期:2006-03-30.

基金项目:重庆市自然科学基金资助项目(CSTC2004BB2165);重庆市教委自然科学基金资助项目(KJ060506).

重合于 A, 而这些解在 s 平面上将以相角差 2/μ 在各方向上形成一系列投影点. s^μ 平面的主黎曼面相角区间为 [0, 2/μ], 图 1 表示了随阶次 μ 的变化而收缩或扩张的 s^μ 的主黎曼面, μ = 0.375 时为 OABO, μ = 1 时为 OABCO, μ = 1.25 时为 OABCDO. s^μ 平面的主黎曼面中的解为该方程的有效解. 对于 μ > 0 下的唯一有效解的条件由下式推出:

$$0 < \mu < 2k < 2\mu \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2} < k < \mu - \frac{1}{2} \tag{4}$$

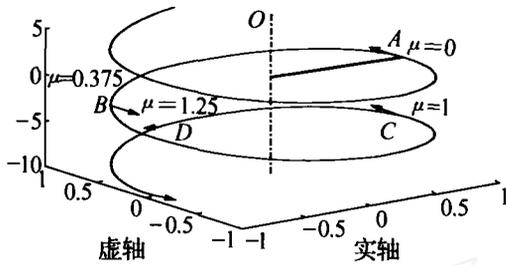


图 1 s^μ 平面的主黎曼面

Fig. 1 Main Riemann surface of s^μ - plane

因此在 1/2 < μ - [μ] 时, 整数 k ∈ [0, [μ]]; 在 1/2 - [μ] < μ - [μ] 时, 整数 k ∈ [0, [μ] - 1]. 于是, 当

$$\mu \in (0, 1) \text{ 且 } 1/2 < \mu - [\mu]$$

$$\text{或 } \mu \in (1, 2) \text{ 且 } 1/2 < \mu - [\mu]$$

$$\text{或 } \mu = 1$$

时, 分数阶方程 s^μ = A 具有唯一有效解.

分数阶控制系统开环传递函数表示如下:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 s^0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s^0} = \frac{K \cdot \prod_{j=1}^{m_0} (z_j s^{\mu_j} + 1)}{s^{0^+} \cdot \prod_{i=1}^{n_0} (p_i s^{v_i} + 1)} \tag{5}$$

式中: K = b₀/a₀, m = 0 + ∑_{j=1}^{m₀} μ_j, n = 0 + ∑_{i=1}^{n₀} v_i.

等式右端每乘积项有且仅有一个有效复域解, 即为零极点.

1.2 分数阶超前校正器

基于分数阶系统模型(5), 分数阶超前校正器可表示为

$$G(s) = K_c \cdot a \frac{(Ts)^{-1} + 1}{(aTs)^2 + 1}, a \in (0, 1) \tag{6}$$

式中: 参数 a 决定校正器带宽; K_c = K/a, 1/a 为低

频增益补偿, K 取决于稳态性能指标. 超前校正器为被控系统提供一个零点和一个极点, 因此式(6)中的 (Ts)⁻¹ + 1 或 (aTs)² + 1 必须满足有效根唯一性条件. 考虑为实数, 利用唯一性条件确定阶次范围 μ_{1, 2} ∈ (0.5, 1.5].

校正器幅值与相位函数如下:

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = K \cdot \frac{\sqrt{(T\omega)^{-2} + 2(T\omega)^{-1} \cos \frac{1}{2} + 1}}{\sqrt{(aT\omega)^2 + 2(aT\omega) \cos \frac{\omega}{2} + 1}} \tag{7}$$

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{(T\omega)^{-1} \sin \frac{1}{2}}{1 + (T\omega)^{-1} \cos \frac{1}{2}} - \arctan \frac{(T\omega) \sin \frac{\omega}{2}}{1 + (T\omega) \cos \frac{\omega}{2}} \tag{8}$$

相角在频率 ω_m 处取极大值 ω_m:

$$\left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = 0 \tag{9}$$

将式(8)带入式(9), ω_m 由此方程确定:

$$\frac{(T\omega)^{-1} + (T\omega)^{-1} + 2\cos \frac{1}{2}}{(aT\omega)^2 + (aT\omega)^{-2} + 2\cos \frac{\omega}{2}} = \frac{1 \sin \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \tag{10}$$

图 2 所示为不同参数值下的不同频率特性. 图中可以看出, 幅值曲线斜率和相位极值随零点阶次 μ₁ 和极点阶次 μ₂ 的变化而变化, 阶次可根据具体情况灵活取值. 若系统对高频噪声抑制无严格要求, 而需要足够多并且具有良好鲁棒性的相角裕度, 则可选择 μ₁ > μ₂. 如果系统已有足够的相角裕度, 然而高频噪声太大, 那么在不破坏系统稳定性的基础上, 可以谨慎选择 μ₁ > μ₂. 对于无特殊要求的通常情况, 取 μ₁ = μ₂ 即可获取所需控制性能, 并能极大简化其设计步骤. 此外图中还表明最大相角 ω_m 随参数 a (系统带宽) 不同而变化的情况, 当 a 下降, ω_m 带宽增加, ω_m 增大.

2 分数阶超前校正器的设计

此方法对于在 (0.5, 1.5] 内取值的任意阶次均适用. 为简化描述, 默认 μ₁ = μ₂, 不具有本质区别.

令式(10)中 μ₁ = μ₂, 于是

$$\frac{(T\omega)^{-1} + (T\omega)^{-1} + 2\cos \frac{1}{2}}{(aT\omega)^{-1} + (aT\omega)^{-1} + 2\cos \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \tag{11}$$

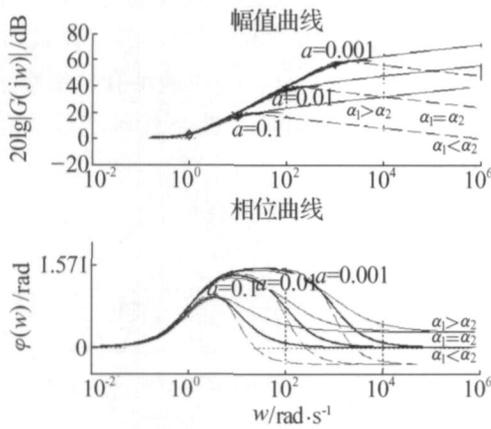


图 2 超前校正器的 Bode 图

Fig. 2 Bode diagrams of lead compensator

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

带入式(7)和(8)

$$K \cdot \frac{\sqrt{(T_m)^2 + 2(T_m) \cos \frac{\alpha}{2} + 1}}{\sqrt{(aT_m)^2 + 2(aT_m) \cos \frac{\alpha}{2} + 1}} = K \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\arctan \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{a^{\frac{1}{2}} + \cos \frac{\alpha}{2}} - \arctan \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{a^{-\frac{1}{2}} + \cos \frac{\alpha}{2}}$$

考虑未校正系统 $G_o(s)$ 需进行超前相位校正,其设计步骤如下:

- 1) 稳态性能指标确定 K . $K_c = K/a$.
- 2) 作原系统 Bode 图. 确定其截止频率 ω_c 和相角裕度 $\gamma = 90^\circ - \varphi(\omega_c)$. 根据期望相角裕度决定相角所需补偿值, $m = \frac{\gamma_c - \gamma}{5^\circ \sim 20^\circ}$.
- 3) 式(8)或式(13)定出相角条件:
$$m = \frac{\gamma_c - \gamma}{5^\circ \sim 20^\circ}$$
- 4) 式(7)或式(12)定出幅值条件:
$$20 \lg A(m) = 20 \lg A_o(m) = 0$$
- 5) 式(10)或式(11)定出极值条件:
$$d(\gamma)/d\omega = 0$$
- 6) 根据性能综合需求,选择分数阶次 α_1, α_2 . 另外根据以上 3 个方程计算参数 a, T, m ,从而确定 2 个转折频率 $\omega_1 = 1/T, \omega_2 = 1/aT$.

3 2 种分数阶超前校正器的比较

超前校正器模型的详细讨论可参考文献[1]和

[5]. 这里重新考虑文献[1]中的控制器模型如下:

$$C(s) = K_c \cdot a \cdot \frac{(Ts + 1)}{aTs + 1}, a \in (0, 1). \quad (14)$$

相对于整数阶控制器,它能在保证系统相位裕度情况下,为被控系统提供更稳定的相位曲线,使得校正系统具有良好的鲁棒性. 问题在于式(14)描述的校正器无法解释其应该向系统提供的关于零点和极点的信息. 零极点信息不明确,就无法成功运用分数阶经典控制理论,包括分数阶扩展频域法和空间根轨迹法. 此外,这种结构难以对超前校正器进行时域分析. 这极大限制了它在分数阶控制系统中的深入拓展与灵活应用. 然而式(6)所描述的控制器可以较好地解决这些问题. 它能够同整数阶控制器一样在原被控系统上增加一个零点和一个极点,严格的说,它是任意阶次相位超前校正器的一般化描述. 通过其提供的零极点信息,分数阶系统一般分析方法均得以较好应用. 表 1 对这 2 种不同结构的分数阶控制器基本特性作了比较.

表 1 2 种不同结构分数阶超前校正器的基本特性比较

Table 1 Comparison of the basic characteristics of the two different fractional-order compensators

分数系统下的分数阶控制器	$\frac{(Ts)^{\alpha_1} + 1}{(aTs)^{\alpha_2} + 1}$	$\frac{(Ts + 1)}{aTs + 1}$
时域线性微分方程模型 (Caputo's 定义)	有限项	无限项
扩展频域分析法	适用	不适用
扩展频率 Nyquist 与对数频率稳定判据	适用	适用
空间根轨迹法	适用	不适用
相角超前校正器的统一化形式	是	否
幅值比较	等价	等价
最大相角比较	见图 3	见图 3

图 3 所示 2 种超前校正器在相应参数下其最大相位的差别. 当 $(0.5, 1)$ 时式(14)控制器可提供的最大相位 m 大于式(6)控制器. $m = 1$ 时它们结构相同,性能一致,具有相同的最大相位. 另外图中还表明每个控制器有其不同的适用范围,可在不同情况下自由选择.

举例说明. 考虑未校正系统^[1]:

$$G_o(s) = \frac{2}{s(0.5s + 1)}. \quad (15)$$

设计超前相位校正器使其速度误差指数 $K_v = 20$,其相位裕度保持 50° 左右,增益截至频率 ω_c 为 10 rad/s . 其幅值与相位在期望截至频率 ω_c 下分别为 -8.13 dB 和 -168.7° . 利用文中第 3 部分的解析法得到系统频率特性如图 4. 图中 3 条曲线分别代表下列不同结构超前校正器的频率特性:

$$G(s) = 10 \times \frac{1 + (0.283/0s)^{0.635}}{1 + (0.0008s)^{0.635}}$$

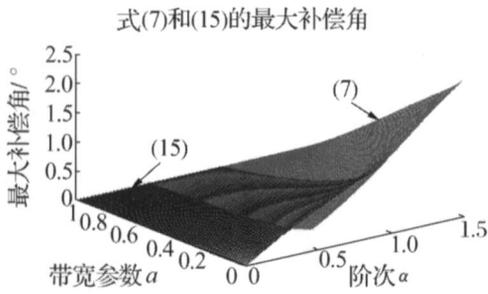


图 3 分数阶超前校正器式(6)和(14)不同的最大相位
Fig. 3 Maximum phase difference of fractional-order lead compensator Eq(6) and (14)

$$G_1(s) = 10 \times \frac{1 + (0.283 \ 0s)}{1 + 0.062 \ 1s}, \quad (16)$$

$$G_2(s) = 10 \times \left(\frac{1 + 0.696 \ 6s}{1 + 0.002 \ 0s} \right)^{0.48}$$

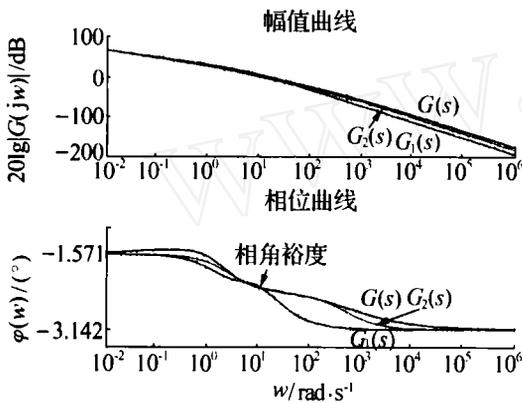


图 4 式(6)和(14)超前校正器的频率特性比较
Fig.4 Comparison of compensator (6) and (14)

它们均能满足系统性能要求。然而，整数阶控制器 $G_1(s)$ 的相位曲线随 ω 的变动下降很快，不如其他 2 种分数阶校正器具有鲁棒性。图中还表明 $G(s)$ 的相位在可忽略的裕度为代价下最具稳定性。简而言之，通过合理选择参数可以得到最为灵活和平滑的相位裕度以满足系统稳定性能，稳定的相位曲线以获得良好的鲁棒性和其他优良特性。

图 5 所示在具有同样参数 $a = 0.01, T = 1$ 的条件下，这 2 种分数阶超前校正器为校正系统提供的最大相角可调空间。使用式(6)或(14)校正器，例中的校正系统得到不同的最大相角，它的大小取决于所选的能满足所需性能要求的参数。同时图 5 是图 3 的一个例证。

4 结束语

文中主要讨论通过扩展频域法建模的分数阶相位超前校正器。不同于以往分数阶超前校正器，它对

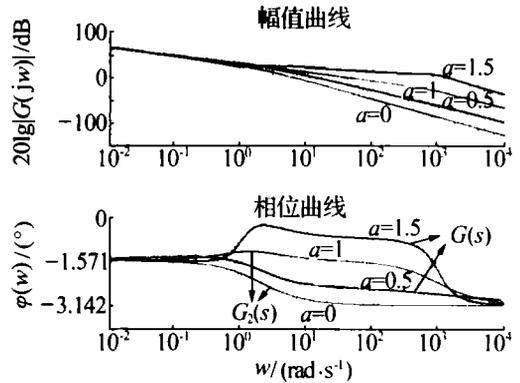


图 5 使用式(6)或(14)的系统最大相角可调空间
Fig.5 Max phase tunable range of system using Eq. (6) or (14)

分数阶控制器为系统提供一个零点和一个极点给予了明确的定义，而零极点间的距离决定着系统的频率带宽，相关参数为 a 。而且，它具有 2 个灵活的阶次：零点阶次和极点阶次，对阶次进行的不同选择能够满足不同的系统性能需求。文章还讨论了解析设计法，为便于描述和简化设计步骤，故取相同零极点阶次。随后对 2 种不同的分数阶超前校正器运用实例进行比较，得出其不同的应用范围的同时，还说明了扩展频域模型下的分数阶控制器和其它分数器件一样具有良好的鲁棒性，更重要的是他能够提供分数系统所需零极点的信息，这极大扩展了这种相角超前的分数校正器模型的应用空间。

参考文献:

- [1] PETRAS I. The fractional-order controllers: methods for their synthesis and application[J]. Journal of Electrical Engineering, 1999, 50(9 - 10) :284 - 288.
- [2] XUE Ding-yu, CHEN Yang-quan. A comparative introduction of four fractional order controllers[A]. Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation02[C]. [S.l.], 2002.
- [3] WANG Zhen-bin, CAO Guang-yi, ZHU Xim-jian. Stability conditions and criteria for fractional order linear time-invariant systems [J]. Control Theory & Applications, 2004(21) :922 - 926.
- [4] LUNEB J. Three-parameter tunable tilt-integral derivative (TID) controller [P]. US Patent US5371 670, 1994.
- [5] OUSTALOUP A, MATHIEU B, LANUSSE P. The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission [J]. European Journal of Control, 1995, (2) :275 - 283.
- [6] PODKYBANY I. Fractional-order systems and PI D μ controllers [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 4(2) :208 - 214.

[7] MONJE C A, CALDERON A J, VINA GREB M, et al. The fractional-order lead compensator [A]. Computational Cybernetics, Second IEEE International Conference[C]. [S.l.], 2004.

[8] RA YNAUDAND H F, ZERGA INOH A. State-space representation for fractional order controllers [J]. Automatica, 2000, 36(5): 1017 - 1021.

[9] WANG Ji-feng, LI Yuan-kai. Frequency domain analysis and applications for Fractional-order control systems [J]. Journal of Physics: Conference series, 2005, 13(5): 265 - 273.

[10] WANG Ji-feng, LI Yuan-kai. Frequency domain stability criteria for fractional-order control systems [J]. Journal of Chongqing University (English Version), 2006, 1(1): 30 - 35.

作者简介:



汪纪锋,男,1944年生,重庆邮电大学教授,博士生导师,主要研究方向为复杂系统理论与应用,在国内外学术期刊上已发表学术论文 70 余篇. E-mail: wangjf@cqupt.edu.cn.



李元凯,男,1981年生,重庆邮电大学控制理论与控制工程专业硕士研究生.主要研究方向为复杂系统理论与应用,在国内外学术期刊上已发表多篇关于分数系统控制的论文. E-mail: yuankai.li@gmail.com.

图像压缩与图像处理国际研讨会 International Workshop on Image Compression and Image Processing

随着计算机技术的飞速发展,数字图像处理技术深入到社会发展的各个领域,受到了通信技术、计算机技术和数学等各领域专家的关注和研究。

本次会议旨在为不同领域的专家提供一个良好的交流平台,会议主题涵盖图像处理的各个方面,包括图像压缩,图像去噪,并行处理和工业应用等。研讨会将安排来自研究机构和工业应用的特邀报告和研究人员的简短发言。会后优秀论文的作者将被邀请扩写论文并发表于英国 Taylor & Francis 出版社出版的杂志《International Journal of Computer Mathematics》或由英国科学出版社出版的杂志《Journal of Algorithms and Computational Technology》。

图像压缩与图像处理国际研讨会由福州大学数学与计算机科学学院福州 - 格林威治应用计算研发中心主办,会议时间为 2006 年 12 月 17 日 -19 日,会议地点为福州大学学术交流中心,中国福建省福州市工业路怡山大厦。会议主题包括但不限于:(1) 图像和视频编码技术;(2) 图像预处理技术;(3) 图像和视频中的对象识别;(4) 图像处理的并行和分布算法;(5) 分形、小波与图像处理;(6) PDE 在图像处理中的应用;(7) 图像处理在工业和生活中的应用,如:档案管理、视频点播、地下管道缺陷检测、历史文物图像恢复、遥感图像处理等。全文截稿日期为 2006 年 10 月 15 日,录用通知截止日期为 2006 年 11 月 15 日。联系电话: 13599409566 0591 - 83717689, E-mail: mqwang@fzu.edu.cn. 会议网站: http://cmcs.fzu.edu.cn/wicap/.