第 14 卷第 6 期
2019 年 11 月

智 能 系 统 学 报
CAAI Transactions on Intelligent Systems

Vol.14 No.6
Nov. 2019

DOI: 10.11992/tis.201905050
网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20190910.1329.004.html

粒协调决策形式背景的属性约简与规则融合

张晓鹤[1]，米据生[1]，李美争[2]
（1. 河北师范大学 数学与信息科学学院，河北 石家庄 050024; 2. 河北师范大学 计算机与网络空间安全学院，河北 石家庄 050024）

摘　要：针对基于决策形式背景进行属性约简与规则提取能够更便捷有效地获取知识，因此规则提取及属性约简是形式概念分析理论重要的研究课题。本文基于等价关系研究粒协调决策形式背景的属性约简与规则提取，定义粒协调集与粒约简，给出粒协调集判定定理，并结合布尔方法给出属性约简算法，最后利用集值向量包含度这一工具给出决策形式背景中的乐观规则融合方法与悲观规则融合方法。

关键词：属性约简；决策规则；形式背景；辨识矩阵；包含度；规则提取；粒计算；概念格
中图分类号：O236;TP18　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673−4785(2019)06−1138−06

中文引用格式：张晓鹤，米据生，李美争. 粒协调决策形式背景的属性约简与规则融合 [J]. 智能系统学报，2019，14(6)：1138–1143.
英文引用格式：ZHANG Xiaohe, MI Jusheng, LI Meizheng. Attribute reduction and rule fusion in granular consistent formal decision contexts[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(6): 1138–1143.

Attribute reduction and rule fusion in granular consistent formal decision contexts

ZHANG Xiaohe[1], MI Jusheng[1], LI Meizheng[2]
(1. College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China; 2. College of Computer and Cyber Security, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China)

Abstract: Attribute reduction and rule acquisition based on formal decision contexts can acquire knowledge more conveniently and effectively; thus, rule acquisition and attribute reduction are two key research directions of the theory of formal concept analysis (FCA). This study investigates attribute reduction and rule acquisition based on an equivalence relation in formal granular consistent decision contexts. In this paper, the granular consistent set and granular reduction are defined, and the judgment theory of the granular consistent set is given, and by combination with the Boolean method, the granular reduction is formulated. Finally, using the inclusion degree of set-valued vectors, optimistic and pessimistic rule fusion methods in formal decision contexts are proposed.

Keywords: attribute reduction; decision rules; formal context; discernibility matrix; inclusions; extracting rules; granular computing; concept lattice

形式概念分析 (FCA)[1] 于 1982 年由 Wille 教授提出，它是在形式背景中进行数据分析与规则提取的一个重要工具，通过分析形式背景中概念的结构提出了概念格，从本质上对对象和属性的内在联系进行了描述。Ganter[2] 在其专著中进一步总结了概念格相关知识。目前该理论已在信息检索[3]、数据挖掘[4-5]，软件工程[6] 等多个领域取得了广泛应用。

属性约简与规则提取是粗糙集理论中关键的研究方向，同样也是 FCA 中的重要问题。一个决策形式背景生成的全部形式概念，包括概念之间的关系都会储存在概念格中，这使得概念格的分析过程变得极为困难。因此，决策形式背景研究的重要课题之一就是保持决策不变进行属性约简，从而使形式背景中的隐藏知识更容易被发掘，

收稿日期：2019−05−27.　**网络出版日期：**2019−09−10.
基金项目：国家自然科学基金项目 (61573127, 61502144)；河北省自然科学基金项目 (F2018205196)；河北省高等学校科学技术研究项目 (BJ2019014, QN2017095)；河北师范大学博士基金项目 (L2017B19)
通信作者：张晓鹤. E-mail: 985740655@qq.com.

即更易获取决策规则。越来越多的学者开始深入研究决策形式背景的属性约简与规则提取问题。

2009 年, Wu[6] 研究了保持概念格的粒结构不变的属性约简与规则提取, 并给出具体算法。Li 等[7-9] 提出了一种新的决策形式背景知识约简框架, 给出约简算法, 且在决策形式背景研究了保持决策规则不变的属性约简。Li 等[10] 研究了基于同余关系的不协调决策形式背景的属性约简。Li 等[11] 提出了基于最大规则的决策形式背景中的新型属性约简。Chen[12-13] 提出了一种大数据模型下的快速属性约简模型, 并结合实例分析其算法复杂度。Yang[14] 基于蕴涵映射对实数集决策形式背景中的属性约简和规则提取问题进行研究。Qi[15] 从多角度讨论了两类三支概念格与传统概念格之间的联系, 并给出了在经典概念格基础上构造三支概念格的算法。 Zhang 等[16] 利用概念格提出了一种基于案例的层次化分类器。Zhang 等[17] 研究了模糊决策格值信息系统上的近似约简与规则提取。张[18-19] 叙述了信息系统上的知识发现与知识约简, 提出了协调近似表示空间上的规则融合方法。

目前在概念格领域已取得诸多成果, 但仍存在众多问题有待解决。比如基于等价关系的粒协调决策形式背景的属性约简问题, 利用确定性规则获取全部规则的具体途径, 本文将进一步讨论这些问题。

1　预备知识

定义 1[6]　设三元组 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$ 是形式背景, $\boldsymbol{U}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $\boldsymbol{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{A}$。如果 $(x,a)\in\boldsymbol{I}$, 则称 x 具有属性 a。用 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$ 表示 $\boldsymbol{U}$ 的幂集, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的幂集。$\forall\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$, 定义:

$$\boldsymbol{X}^{*}=\{a\in\boldsymbol{A}:\forall x\in\boldsymbol{X},(x,a)\in\boldsymbol{I}\}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}^{\triangleleft}=\{x\in\boldsymbol{U}:\forall a\in\boldsymbol{B},(x,a)\in\boldsymbol{I}\}\tag{2}$$

定义 2[6]　对于形式背景 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$, 若二元组 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})\times\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ 满足 $\boldsymbol{X}^{*}=\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B}^{\triangleleft}=\boldsymbol{X}$, 则 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B})$ 称为形式概念或概念。其中 $\boldsymbol{X}$ 是概念 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B})$ 的外延, $\boldsymbol{B}$ 是概念 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B})$ 的内涵。

定义 3[6]　对于形式背景 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}$, 可以得到形式背景 $\boldsymbol{F_C}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{C},\boldsymbol{I_C})$, $\boldsymbol{F_C}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的子背景, 其中 $\boldsymbol{I_C}$=$\boldsymbol{I}\cap(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{C})$。

则对 $\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{U}$, 定义映射 ${}^{*C}:\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})\to\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}):\boldsymbol{X}^{*C}=\{a\in\boldsymbol{C}:\forall x\in\boldsymbol{X},(x,a)\in\boldsymbol{I}\}$。特别地, 当 $\boldsymbol{X}=\{x\}$, $\boldsymbol{C}=\{a\}$ 时有

$$x^{*\{a\}}=\begin{cases}\{a\}, & (x,a)\in\boldsymbol{I}\\ \varnothing, & (x,a)\notin\boldsymbol{I}\end{cases}\tag{3}$$

定义 4[19]　设 $\boldsymbol{V}_l(l\leqslant m)$ 是非空有限集, 记

$$\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_m):\boldsymbol{E}_l\leqslant\boldsymbol{V}_l(l\leqslant m)\}\subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_1)\times\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_2)\times\cdots\times(\boldsymbol{E}_m)$$

称 $\boldsymbol{P}$ 为集合向量空间。对于 $\boldsymbol{P}$ 中的两个集合向量 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}_1,\cdots,\boldsymbol{E}_m)$, $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_m)$, 如果 $\forall l\leqslant m$, 均有 $\boldsymbol{E}_l\leqslant\boldsymbol{S}_l$, 则记 $\boldsymbol{E}\leqslant\boldsymbol{S}$, 且 $(\boldsymbol{P},\leqslant)$ 为偏序集。

定义 5[19]　设 $(\boldsymbol{P},\leqslant)$ 为偏序集, 称 $\boldsymbol{D}:\boldsymbol{P}^2\to[0,1]$ 为集值向量包含度, 满足下列条件:

1) $0\leqslant\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{E})\leqslant1$;

2) $\boldsymbol{E}\leqslant\boldsymbol{S}$ 时, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{E})=1$;

3) $\boldsymbol{E}\leqslant\boldsymbol{S}\leqslant\boldsymbol{G}$ 时, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{G})\leqslant\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{S})$。

2　基于等价关系的粒协调决策形式背景的属性约简

以往对决策形式背景进行讨论时通常会分别构造条件概念格与决策概念格, 利用两者的序关系来定义形式背景的协调性。本节利用等价关系对对象集进行划分, 从而得到对应的决策类, 可以在保持对象的决策不变的前提下删除冗余属性。

设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 为一个决策形式背景, $\boldsymbol{A}$ 为条件属性集, $\boldsymbol{D}$ 为决策属性集, 并且 $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{D}=\varnothing$, $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{A}$。定义 $\boldsymbol{R}_D=\{(x,y)\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}:d_l(x)=d_l(y)(\forall d_l\in\boldsymbol{D})\}$, 则由上述等价关系可产生 $\boldsymbol{U}$ 上的一个划分:

$$\boldsymbol{U}/\boldsymbol{R}_D=\{[x]_D:x\in\boldsymbol{U}\}=\{\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_r\}$$

其中

$$[x]_D=\{y\in\boldsymbol{U}:(x,y)\in\boldsymbol{R}_D\}$$

如果 $\forall x\in\boldsymbol{U}$, 均满足 $x^{*\boldsymbol{A}\triangleleft}\subseteq[x]_D$, 则称决策形式背景 $\boldsymbol{F}$ 是粒协调的。

定义 6　设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 为粒协调决策形式背景, 对 $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$, 如果 $\forall x\in\boldsymbol{U}$, 都有 $x^{*\boldsymbol{B}\triangleleft}\subseteq[x]_D$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的一个粒协调集。进一步, 如果不存在 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{B}$, 使得 $\forall x\in\boldsymbol{U}$ 都有 $x^{*\boldsymbol{C}\triangleleft}\subseteq[x]_D$, 则 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的粒约简。

注: 1) 对粒协调决策形式背景 $\boldsymbol{F}$ 来说, 必存在粒约简。如用 $\{\boldsymbol{B}_i:i\leqslant l\}$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 所有的粒约简, 则 $\boldsymbol{B}=\bigcap_{i=1}^{l}\boldsymbol{B}_i$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的核心, $\boldsymbol{B}$ 中的元素称为核心元素或绝对必要属性。

2) 对于 $x,y\in\boldsymbol{D}_j$, $\forall d_l\in\boldsymbol{D}$ 有 $d_l(x)=d_l(y)$, 显然决策类中所有对象决策值相同, 记为 $d_l(\boldsymbol{D}_j)$。称 $\boldsymbol{T}_j=\{d_1(\boldsymbol{D}_j),d_2(\boldsymbol{D}_j),\cdots,d_{|D|}(\boldsymbol{D}_j)\}$ 为决策类 $\boldsymbol{D}_j$ 的决策值。

设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 是一个粒协调决策形式背景, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$, 记

$$\boldsymbol{R}_B=\{(x_i,x_j)\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}:x_i^{*\{a\}}\subseteq x_j^{*\{a\}},\forall a\in\boldsymbol{B}\}\tag{4}$$

则容易证明:

1) $x_i^{*\boldsymbol{B}\triangleleft}=\{x_j\in\boldsymbol{U}:(x_i,x_j)\in\boldsymbol{R}_B\}$;

2) $x_i^{*\boldsymbol{B}\triangleleft}\subseteq[x_i]_D\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_B\subseteq\boldsymbol{R}_D$, 即 $\boldsymbol{B}$ 是粒协调集等价

于 $\boldsymbol{R}_B \subseteq \boldsymbol{R}_D$。

定义 7　设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 是一个粒协调决策形式背景，$x,y\in\boldsymbol{U}$，x 与 y 的辨识属性集定义如下：

$$\boldsymbol{D}_d(x,y)=\begin{cases}\{a\in\boldsymbol{A}: x^{*\{a\}}\not\subseteq y^{*\{a\}}\}, & d_l(x)\neq d_l(y)\\ \varnothing, & \text{其他}\end{cases}\tag{5}$$

且 $\boldsymbol{D}^*=\{\boldsymbol{D}_d(x,y)\mid x,y\in\boldsymbol{U}\}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的辨识矩阵。

由定义 7 可知，以下性质显然成立：

1) $\boldsymbol{D}_d(x,x)=\varnothing$;

2) $\boldsymbol{D}_d(x,y)\bigcap\boldsymbol{D}_d(y,x)=\varnothing$。

定理 1　设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 是一个粒协调决策形式背景，$\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$。则 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的粒协调集，当且仅当 $\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$ 时有 $\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$。

证明　($\Rightarrow$) 当 $\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$ 时，由定义 7 可知，$\forall d_l\in\boldsymbol{D}$ 均满足 $d_l(x)\neq d_l(y)$，即 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_D$。而 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的粒协调集，则有 $\boldsymbol{R}_B\subseteq\boldsymbol{R}_D$。因此 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_B$，故必存在 $b\in\boldsymbol{B}$ 使得 $x^{*\{b\}}\not\subseteq y^{*\{b\}}$。所以 $b\in\boldsymbol{D}_d(x,y)$。因而 $\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$。

($\Leftarrow$) 若 $\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$，则 $\forall d_l\in\boldsymbol{D}$，$d_l(x)\neq d_l(y)$，即 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_D$。故 $\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$，一定存在 $b\in\boldsymbol{B}$，使得 $b\in\boldsymbol{D}_d(x,y)$，则有 $x^{*\{b\}}\not\subseteq y^{*\{b\}}$，从而 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_B$。当 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_D$ 时 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_B$，故 $\boldsymbol{R}_B\subseteq\boldsymbol{R}_D$。综上，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的粒协调集。

定理 2　设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 是一个粒协调决策形式背景，$a\in\boldsymbol{A}$，则 a 是 $\boldsymbol{F}$ 的核心属性，等价于存在 $x,y\in\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{D}_d(x,y)=\{a\}$。

证明　($\Rightarrow$) 如果条件属性 $a\in\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的核心属性，则 $\boldsymbol{A}-\{a\}$不可能是 $\boldsymbol{F}$ 的粒约简，即 $\boldsymbol{R}_{A-\{a\}}\not\subseteq\boldsymbol{R}_D$。故存在 $x,y\in\boldsymbol{U}$，使得 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_D$ 时有 $(x,y)\in\boldsymbol{R}_{A-\{a\}}$。此时 $d_l(x)\neq d_l(y)$。又易证 $x^{*\{a\}}\not\subseteq y^{*\{a\}}$，由定义 7 可知 $a\in\boldsymbol{D}_d(x,y)$，即 $\exists x,y\in\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{D}_d(x,y)=\{a\}$(事实上，如 $x^{*\{a\}}\subseteq y^{*\{a\}}$，则由 $(x,y)\in\boldsymbol{R}_{A-\{a\}}$ 可知 $(x,y)\in\boldsymbol{R}_A$。又 $\boldsymbol{F}$ 是一个粒协调决策形式背景，所以 $\boldsymbol{R}_A\subseteq\boldsymbol{R}_D$，即 $\forall d_l\in\boldsymbol{D}$ 均满足 $d_l(x)=d_l(y)$，这与 $d_l(x)\neq d_l(y)$ 矛盾，所以 $x^{*\{a\}}\not\subseteq y^{*\{a\}}$)。

($\Leftarrow$) 如果 $D_d(x,y)=\{a\}$，定义 7 可知 $d_l(x)\neq d_l(y)$ $x^{*\{a\}}\not\subseteq y^{*\{a\}}$ 并且任取 $b\in\boldsymbol{A}-a$，必有 $x^{*\{b\}}\subseteq y^{*\{b\}}$。因此 $(x,y)\notin\boldsymbol{R}_D$ 且 $(x,y)\in\boldsymbol{R}_{A-\{a\}}$。故可得 $\boldsymbol{R}_{A-\{a\}}\not\subseteq\boldsymbol{R}_D$，即 $\boldsymbol{A}-\{a\}$ 不是 $\boldsymbol{F}$ 的粒约简，a 是 $\boldsymbol{F}$ 的核心属性。

定义 8　设 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$ 是一个粒协调决策形式背景，$x,y\in\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{D}_d(x,y)\neq\varnothing$。记

$$\boldsymbol{M}=\wedge(\vee\boldsymbol{D}_d(x,y))=\wedge(\vee\{a_l: a_l\in\boldsymbol{D}_d(x,y)\})\tag{6}$$

基于文献 [18] 可知，如果 $\boldsymbol{B}_k^q=\{a_{i_t}: t\leqslant q_k\}$ 中没有重复元素，则

$$\boldsymbol{M}=\vee_{k=1}^{p}(\wedge_{t=1}^{q_k}a_{i_t})\tag{7}$$

称为 $\boldsymbol{F}$ 的极小析取范式。$\boldsymbol{B}_k(k\leqslant p)$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的所有粒约简的集合，具体算法如下：

算法 1 粒协调决策形式背景的属性约简算法

输入　粒协调决策形式背景 $\boldsymbol{F}$=($\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{G}$)

输出　$\boldsymbol{B}$ (粒约简集)

```
for 1≤i≤|U| and 1≤s≤|A|
if (x_i, a_s) ∈ I, x_i^{*{a_s}} = a_s
else x_i^{*{a_s}} = Ø
initialize D_d(x_i, x_j) = Ø
for 1≤s≤|A| and 1≤l≤|D| do
  if x_i^{*{a_s}} ⊈ x_j^{*{a_s}} and d_l(x_i) ≠ d_l(x_j) then
      D_d(x_i, x_j) ← D_d(x_i, x_j) ∨ a_s
  end if
end for
initialize B = Ø
for 1≤i≤|U|, 1≤j≤|U| do
   B = B ∧ D_d(x_i, x_j)
end for
compute B = ∨_{m=1}^{p} (∧_{q=1}^{s_i} a_q)
return B
```

例 1　表 1 给出了一个决策形式背景，其中对象集 $\boldsymbol{U}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$，$\boldsymbol{D}=\{d\}$ 为决策属性集。$\boldsymbol{A}=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$ 为条件属性集。

表 1　决策形式背景 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$

Table 1　A formal decision context: $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	d
x_1	1	–	–	–	–	1	–	–	1
x_2	1	–	–	–	–	1	1	–	1
x_3	1	1	–	–	–	1	1	–	1
x_4	–	1	–	–	1	1	1	1	3
x_5	1	–	1	–	1	–	–	–	2
x_6	1	1	1	–	1	–	–	–	2
x_7	–	1	1	1	–	–	–	–	3

计算可知：

$x_1^{**}=\{x_1,x_2,x_3\}=[x_1]_D,x_2^{**}=\{x_2,x_3\}\subseteq[x_2]_D=[x_1]_D$

$x_3^{**}=\{x_3\}\subseteq[x_3]_D=[x_1]_D,x_4^{**}=\{x_4\}\subseteq\{x_4,x_7\}=[x_4]_D$

$x_5^{**}=\{x_5,x_6\}\subseteq\{x_5,x_6\}=[x_5]_D$

$x_6^{**}=\{x_6\}\subseteq[x_6]_D=[x_5]_D,x_7^{**}=\{x_7\}\subseteq[x_7]_D=[x_4]_D$

可知 $\boldsymbol{F}$ 为粒协调的，其辨识矩阵如表 2 所示。由布尔方法可获取 $\boldsymbol{F}$ 的所有粒约简，具体过程如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\wedge(\vee D_d(x,y))\\&=a_1\wedge a_4\wedge a_6\wedge a_8\wedge(a_3\vee a_5)\\&=(a_1\wedge a_4\wedge a_6\wedge a_8\wedge a_3)\vee(a_1\wedge a_4\wedge a_6\wedge a_8\wedge a_5)\end{aligned}$$

故该形式背景存在两个粒约简，即 $\boldsymbol{B}_1=\{a_1,a_3,a_4,a_6,a_8\}$ 与 $\boldsymbol{B}_2=\{a_1,a_4,a_5,a_6,a_8\}$，$\boldsymbol{F}$ 的核心属性为 a_1,a_4,a_6 与 a_8。

表 2 $F=(U,A,I,D,G)$ 的辨识矩阵

Table 2 The discernibility matrix of $F=(U,A,I,D,G)$

U	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1\}$	$\{a_6\}$	$\{a_6\}$	$\{a_1,a_6\}$
x_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1\}$	$\{a_6,a_7\}$	$\{a_6,a_7\}$	$\{a_1,a_6,a_7\}$
x_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1\}$	$\{a_2,a_6,a_7\}$	$\{a_6,a_7\}$	$\{a_1,a_6,a_7\}$
x_4	$\{a_2,a_7,a_8\}$	$\{a_2,a_8\}$	$\{a_8\}$	$\varnothing$	$\{a_2,a_6,a_7,a_8\}$	$\{a_6,a_7,a_8\}$	$\varnothing$
x_5	$\{a_3,a_5\}$	$\{a_3,a_5\}$	$\{a_3,a_5\}$	$\{a_1,a_3,a_5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1,a_5\}$
x_6	$\{a_2,a_3,a_5\}$	$\{a_2,a_3,a_5\}$	$\{a_3,a_5\}$	$\{a_1,a_3,a_5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1,a_5\}$
x_7	$\{a_2,a_3,a_4\}$	$\{a_2,a_3,a_4\}$	$\{a_3,a_4\}$	$\varnothing$	$\{a_2,a_4\}$	$\{a_4\}$	$\varnothing$

3 基于等价关系的粒协调决策形式背景上的规则融合

本节给出粒协调决策形式背景中决策规则及最优决策规则的定义, 进一步讨论粒协调决策形式背景上规则融合算法, 并给出相关实例。

定义 9 设 $F=(U,A,I,D,G)$ 是一个粒协调决策形式背景, 称 $(X,Y\in L(U,A,I)$ 为条件概念。决策类 D_j 与其决策值 T_j 构成的二元组 (D_j,T_j) 称为决策概念。如果 $X\neq\varnothing$, $Y\neq\varnothing$, 并且有 $X\subseteq D_j$, 则称 $(X,Y)\Rightarrow(D_j,T_j)$ 为决策形式背景的粒决策规则。所有粒决策规则的集合记为 $\Im(F)$。

对于粒协调决策形式背景来说, 必有 $x_i^{*A\triangleleft}\subseteq[x_i]_D$。于是可得到 $|U|$ 条确定性规则。显然还存在一些不确定性规则, 下文给出用 $|U|$ 条确定性规则得到全部规则的两种规则融合方法。

设 $F=(U,A,I,D,G)$ 是一个粒协调决策形式背景, $\forall x\in U$, $a_l\in A$, 定义

$$f_l(x_i)=\begin{cases}1, & (x_i,a_l)\in I\\ 0, & (x_i,a_l)\notin I\end{cases}$$

$\forall B\in A$, $a_l\in A$, 定义 $v_l(B)=\begin{cases}1, & a_l\in B\\ 0, & a_l\notin B\end{cases}$。

定义 10 设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集, 对于 P 中的两个集合向量 E 和 S, 定义包含度为

$$D(S/E)=\sum_{i=1}^{m}\frac{|S_l|}{\sum\limits_{i=1}^{m}|S_i|}\chi_{F_l}(E_l) \tag{8}$$

其中 $\chi_{F_l}(E_l)=\begin{cases}1, & E_l\subseteq S_l\\ 0, & E_l\nsubseteq S_l\end{cases}$。

3.1 乐观规则融合

1) 由 R_D 对 U 进行划分, 得到

$$U/R_D=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$$

2) 对于决策类 $D_i(j\leqslant r)$, 记

$$M_j=\{(\{f_1(x_i)\},\{f_2(x_i)\},\cdots,\{f_m(x_i)\})\,\big|\,x_i^{*\triangleleft}\subseteq D_j\}(j\leqslant r)$$

3) 将 M_j 中的向量取并运算, 即每个分量取并运算, 得到 $S_j=(S_1^j,S_2^j,\cdots,S_m^j)(j\leqslant r)$。

4) 对于概念 $(X,B)\in L(U,A,I)$, 记

$$E=(\{v_1\},\{v_2\},\cdots,\{v_m\})$$

计算 $D(S_j/E)$, 若 $D(S_{j_0}/E)=\max\limits_{j\leqslant r}D(S_j/E)$, 则有:

$$\text{If } B, \text{then } T_{j_o}\quad(D(S_{j_o}/E))$$

算法 2 粒协调决策形式背景中乐观规则融合算法

输入 $F=(U,A,I,D,G)$

输出 R(决策规则)

1) for $1\leq t\leq|D|$ do

2) $\quad U/R_D=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}=\{[x]_D:x\in U\}$

3) end for

4) for $D_j\,(j\leqslant r)$, do

5) $M_j=\{(\{f_1(x_i)\},\{f_2(x_i)\},\cdots,\{f_{|A|}(x_i)\})\,|\,x_i^{*\triangleleft}\subseteq D_j\}$

6) compute $S_j=\{(\vee\{f_1(x_i)\},\cdots,\vee\{f_{|A|}(x_i)\})|x_i^{*\triangleleft}\subseteq D_j\}$

7) for $(X,B)\in L(U,A,I)$ do

8) $\quad E=(\{v_1(B)\},\{v_2(B)\},\cdots,\{v_{|A|}(B)\})$

9) end for

10) compute $D(S_j/E)$

11) if $D(S_{jo}/E)=\max D(S_j/E)$, then

12) $\quad R:B\Rightarrow T_{j_o}(D(S_{j_o}/E))$

13) end if

14) return R

例 2 接例 1, $F=(U,A,I,D,G)$ 中的所有条件概念计算如下:

$(\{x_1,x_2,x_3\},\{a_1,a_6\})$; $(\{x_2,x_3\},\{a_1,a_6,a_7\})$; $(\{x_3\},\{a_1,a_2,a_6,a_7\})$
$(\{x_4\},\{a_2,a_6,a_7,a_8\})$; $(\{x_5,x_6\},\{a_1,a_3,a_5\})$
$(\{x_6\},\{a_1,a_2,a_3,a_5\})$; $(\{x_7\},\{a_2,a_3,a_4\})$
$(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{a_6\})$; $(\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6\},\{a_1\})$
$\{x_2,x_3,x_4\},\{a_6,a_7\})$; $(\{x_3,x_4\},\{a_2,a_6,a_7\})$
$(\{x_3,x_6\},\{a_1,a_2\})$; $(\{x_3,x_4,x_6,x_7\},\{a_2\})$; $(x_{567},\{a_3\})$
$(\{x_6,x_7\},\{a_2,a_3\})$; $(U,\varnothing)$; $(\varnothing,A)$

为使讨论更具实际意义, 在下列讨论中我们忽略 $(U,\varnothing)$、$(\varnothing,A)$。

计算可知:

$$U/R_D=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4,x_7\},\{x_5,x_6\}\}$$

则所有决策概念计算如下:

$$(\{x_1,x_2,x_3\},\{1\});(\{x_4,x_7\},\{3\});(\{x_5,x_6\},\{2\}) \tag{9}$$

记

$$\boldsymbol{D}_1=\{x_1,x_2,x_3\},\ \boldsymbol{D}_2=\{x_4,x_7\},\ \boldsymbol{D}_3=\{x_5,x_6\}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_1=\{&(\{1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{0\},\{0\}),\\&(\{1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{1\},\{0\}),\\&(\{1\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{1\},\{0\})\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2=\{&(\{0\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{1\},\{1\}),\\&(\{0\},\{1\},\{1\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{0\})\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_3=\{&(\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\}),\\&(\{1\},\{1\},\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\})\}\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{S}_1=(\{1\},\{0,1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{0,1\},\{0\})$$
$$\boldsymbol{S}_2=(\{0\},\{1\},\{0,1\},\{0,1\},\{0\},\{0,1\},\{0,1\},\{0,1\})$$
$$\boldsymbol{S}_3=(\{1\},\{0,1\},\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\})$$

对于条件概念 $(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{a_6\})$ 来说, 有 $\boldsymbol{E}=(\{0\},\{0\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{0\},\{0\})$。

计算可知:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}_1/\boldsymbol{E})=0.9$$
$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}_2/\boldsymbol{E})\approx 0.92$$
$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}_3/\boldsymbol{E})\approx 0.56$$

综上可得规则“$\{a_6\}\Rightarrow d=3(0.92)$”, 此处 0.92 为该方法中此条规则的可信度。由上述方式可获取规则:

$\{a_1,a_6\}\Rightarrow d=1(1)$; $\{a_1,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(1)$

$\{a_1,a_2,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(1)$; $\{a_2,a_6,a_7,a_8\}\Rightarrow d=2(1)$

$\{a_1,a_3,a_5\}\Rightarrow d=3(1)$; $\{a_1,a_2,a_3,a_5\}\Rightarrow d=3(1)$

$\{a_2,a_3,a_4\}\Rightarrow d=2(1)$; $\{a_6\}\Rightarrow d=2(0.92)$

$\{a_1\}\Rightarrow d=1(0.9)$; $\{a_6,a_7\}\Rightarrow d=2(0.92)$

$\{a_2,a_6,a_7\}\Rightarrow d=2(1)$; $\{a_1,a_2\}\Rightarrow d=2\ (0.92)$

$\{a_2\}\Rightarrow d=2(1)$;$\{a_3\}\Rightarrow d=2(0.92)$

$\{a_2,a_3\}\Rightarrow d=2(1)$

由定义 9 可知, 粒决策规则如下:

$\{a_1,a_6\}\Rightarrow d=1(1)$;$\{a_1,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(1)$

$\{a_1,a_2,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(1)$;$\{a_2,a_6,a_7,a_8\}\Rightarrow d=2(1)$

$\{a_1,a_3,a_5\}\Rightarrow d=3(1)$

显然粒决策规则在乐观规则融合方法中同样为确定性规则。

3.2 悲观规则融合

1) 由 $\boldsymbol{R_D}$ 对 $\boldsymbol{U}$ 进行划分, 得到

$$\boldsymbol{U}/\boldsymbol{R_D}=\{\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_r\}$$

2) 对于决策类 $\boldsymbol{D}_i(j\leqslant r)$, 记

$$\boldsymbol{M}_j=\{(\{f_1(x_i)\},\{f_2(x_i)\},\cdots,\{f_m(x_i)\})\,\big|\,x_i^{*\triangleleft}\subseteq\boldsymbol{D}_j\}(j\leqslant r)$$

3) 将 $\boldsymbol{M}_j$ 中的向量取最大值, 即每个分量取最大值, 得到 $\boldsymbol{L}_j=(\boldsymbol{L}_1^j,\boldsymbol{L}_2^j,\cdots,\boldsymbol{L}_m^j)(j\leqslant r)$。

4) 对于概念 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$, 记

$$\boldsymbol{E}=(\{v_1\},\{v_2\},\cdots,\{v_m\})$$

计算 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_i/\boldsymbol{E})$, 若 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_{i_0}/\boldsymbol{E})=\max\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_i/\boldsymbol{E})$, 则有:

$$\text{If }\boldsymbol{B},\text{then }\boldsymbol{T}_{j_o}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_{j_o}/\boldsymbol{E})) \tag{10}$$

粒决策规则在该方法中可信度并不一定为 1, 且两种规则融合方式获取的规则并不一致。下面给出具体算法。

算法 3 粒协调决策形式背景中悲观规则融合算法

输入 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G})$

输出 $\boldsymbol{R}$(决策规则)

1) for $1\leq t\leq|\boldsymbol{D}|$

2) $\boldsymbol{U}/\boldsymbol{R_D}=\{\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_r\}=\{[x]_{\boldsymbol{D}}:x\in\boldsymbol{U}\}$

3) for $\boldsymbol{D}_j\,(j\leqslant r)$, do

4) $\boldsymbol{M}_j=\{(\{f_1(x_i)\},\{f_2(x_i)\},\cdots,\{f_{|A|}(x_i)\})\,|\,x_i^{*\triangleleft}\subseteq\boldsymbol{D}_j\}$

5) $\boldsymbol{L}_j=\left\{(\max\{f_1(x_i)\},\max\{f_2(x_i)\}\cdots,\max\{f_{|A|}(x_i)\})\,|\,x_i^{*\triangleleft}\subseteq\boldsymbol{D}_j\right\}$

6) for $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$ do

7) $\boldsymbol{E}=(\{v_1(\boldsymbol{B})\},\{v_2(\boldsymbol{B})\},\cdots,\{v_{|A|}(\boldsymbol{B})\})$

8) compute $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_j/\boldsymbol{E})$

9) if $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_{jo}/\boldsymbol{E})=\max\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_j/\boldsymbol{E})$

10) then $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{T}_{j_o}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_{j_o}/\boldsymbol{E}))$

11) return $\boldsymbol{R}$

12) end for

例 3 通过悲观融合方法同样可以获取 $\boldsymbol{F}$ 中的全部规则。

首先计算可知:

$$\boldsymbol{L}_1=(\{1\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\},\{1\},\{1\},\{0\})$$
$$\boldsymbol{L}_2=(\{0\},\{1\},\{1\},\{1\},\{0\},\{1\},\{1\},\{1\})$$
$$\boldsymbol{L}_3=(\{1\},\{1\},\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{0\},\{0\})$$

对条件概念 $(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{a_6\})$, 有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_1/\boldsymbol{E})=0.625$$
$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_2/\boldsymbol{E})=0.375$$
$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}_3/\boldsymbol{E})=0.375$$

可得规则“$\{a_6\}\Rightarrow d=1(0.625)$”, 此处 0.625 为该方法中此条规则的可信度。由该方式可规则如下:

$\{a_1,a_6\}\Rightarrow d=1(0.75)$;$\{a_1,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(0.875)$

$\{a_1,a_2,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(1)$;$\{a_2,a_6,a_7,a_8\}\Rightarrow d=1(0.75)$

$\{a_2,a_6,a_7,a_8\}\Rightarrow d=2(0.75)$;$\{a_1,a_3,a_5\}\Rightarrow d=3(0.75)$

$\{a_1,a_2,a_3,a_5\}\Rightarrow d=3(1)$;$\{a_2,a_3,a_4\}\Rightarrow d=2(0.625)$

$\{a_2,a_3,a_4\}\Rightarrow d=3(0.625)$;$\{a_6\}\Rightarrow d=1(0.625)$

$\{a_1\}\Rightarrow d=1(0.625)$;$\{a_1\}\Rightarrow d=3(0.625)$

$\{a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(0.75)$;$\{a_2,a_6,a_7\}\Rightarrow d=1(0.875)$

$\{a_1,a_2\}\Rightarrow d=1(0.75)$;$\{a_1,a_2\}\Rightarrow d=3(0.75)$

$\{a_2\}\Rightarrow d=1(0.75)$;$\{a_2\}\Rightarrow d=3(0.625)$

$\{a_3\}\Rightarrow d=3(0.625)$;$\{a_2,a_3\}\Rightarrow d=3(0.75)$

4 结束语

形式概念分析中至关重要的两个研究问题就是属性约简问题与规则提取问题, 而这两方面的研究都是为了更准确便捷地获取决策。本文用对象集与决策属性集之间的等价关系代替要求更为严格的伽罗瓦连接, 使决策形式背景的模型更易

获取决策。

本文利用集值向量包含度给出两种规则融合方法，获取了决策形式背景的全部规则，其中包括确定性规则与大量不确定性规则。在现实生活，这些不确定性规则可能具有重要意义，如何在部分不确定性规则不变的前提下进行属性约简，将是未来研究的重要方向。

参考文献：

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[M]//RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht: Springer, 1982: 445−470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations[M]. Berlin: Springer, 1999.

[3] SUTTON A, MALETIC J I. Recovering UML class models from C++: a detailed explanation[J]. Information and software technology, 2007, 49(3): 212–229.

[4] MISSAOUI R, GODIN R, BOUJENOUI A. Extracting exact and approximate rules from databases[C]//Proceedings of the SOFTEKS Workshop on Incompleteness and Uncertainty in Information Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993: 209-222.

[5] SHAO Mingwen, LEUNG Y, WU Weizhi. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. International journal of approximate reasoning, 2014, 55(1): 259–274.

[6] WU Weizhi, LEUNG Y, MI Jusheng. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE transactions on knowledge and data engineering, 2009, 21(10): 1461–1474.

[7] LI Jinhua, MEI Changlin, LV Yuejin. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. Knowledge-based systems, 2011, 24(5): 709–715.

[8] LI Jinhua, MEI Changlin, LV Yuejin. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information sciences, 2012, 189: 191–207.

[9] LI Jinhua, MEI Changlin, WANG Junhong, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices[J]. Knowledge-based systems, 2014, 71: 435–445.

[10] LI Junyu, WANG Xia, WU Weizhi, et al. Attribute reduction in inconsistent formal decision contexts based on congruence relations[J]. International journal of machine learning and cybernetics, 2017, 8(1): 81–94.

[11] LI Leijun, MI Jusheng, XIE Bin. Attribute reduction based on maximal rules in decision formal context[J]. International journal of computational intelligence systems, 2014, 7(6): 1044–1053.

[12] CHEN Jinkun, LI Jinjin. An application of rough sets to graph theory[J]. Information sciences, 2012, 201: 114–127.

[13] CHEN Jinkun, MI Jusheng, XIE Bin, et al. A fast attribute reduction method for large formal decision contexts[J]. International journal of approximate reasoning, 2019, 106: 1–17.

[14] YANG Hongzhi, YEE L, SHAO Mingwen. Rule acquisition and attribute reduction in real decision formal contexts[J]. Soft computing, 2011, 15(6): 1115–1128.

[15] QI Jianjun, QIAN Ting, WEI Ling. The connections between three-way and classical concept lattices[J]. Knowledge-based systems, 2016, 91: 143–151.

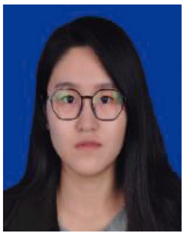
[16] ZHANG Qi, SHI Chongyang, NIU Zhendong, et al. HCBC: a hierarchical case-based classifier integrated with conceptual clustering[J]. Transactions on knowledge and data engineering, 2019, 31(1): 152–165.

[17] ZHANG Xiaoyan, WEI Ling, XU Weihua. Attributes reduction and rules acquisition in an lattice-valued information system with fuzzy decision[J]. International journal of machine learning and cybernetics, 2017, 8(1): 135–147.

[18] 张文修, 梁怡, 吴志伟. 信息系统与知识发现 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[19] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
ZHANG Wenxiu, QIU Guofang. Uncertain decision making based on rough sets[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.

作者简介：



张晓鹤，女，1993 生，硕士研究生，主要研究方向为粗糙集、概念格

米据生，男，1966 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为粗糙集、粒计算、概念格、数据挖掘与近似推理。主持国家自然科学基金项目 3 项，教育部博士点基金项目 1 项。获得省级自然科学奖 3 项。发表学术论文 130 余篇

李美争，女，1984 年生，讲师，博士，CCF 会员，主要研究方向为粒计算、概念格。发表学术论文 10 余篇。