



三支概念的一种构建方法

毛华, 武秀

引用本文:

毛华, 武秀. 三支概念的一种构建方法[J]. 智能系统学报, 2020, 15(3): 514–519.

MAO Hua, WU Xiu. A new method for constructing three-way concept[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2020, 15(3): 514–519.

在线阅读 View online: <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201904022>

您可能感兴趣的其他文章

三支决策-基于粗糙集与粒计算研究视角

Three-way decisions: research perspectives for rough sets and granular computing

智能系统学报. 2019, 14(6): 1111–1120 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201905039>

负载敏感的云任务三支聚类评分调度研究

Load-aware score scheduling of three-way clustering for cloud task

智能系统学报. 2019, 14(2): 316–322 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201710004>

三支决策的时空性

Temporality and spatiality of three-way decisions

智能系统学报. 2019, 14(1): 141–149 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201804045>

概率粗糙集三支决策在线快速计算算法研究

Research on a fast online computing algorithm based on three-way decisions with probabilistic rough sets

智能系统学报. 2018, 13(5): 741–750 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201706047>

效用三支决策模型

Utility-based three-way decisions model

智能系统学报. 2016, 11(4): 459–468 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201606010>

基于权值最大圈的概念格构造算法

An algorithm for concept lattice construction based on maximum cycles of weight values

智能系统学报. 2016, 11(4): 519–525 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201606006>

微信公众平台



关注微信公众号, 获取更多资讯信息

DOI: 10.11992/tis.201904022

三支概念的一种构建方法

毛华, 武秀

(河北大学 数学与信息科学学院, 河北 保定 071002)

摘要: 三支概念构建是三支形式概念分析的研究内容之一。为丰富三支概念的研究内容, 利用矩阵结构, 提出一种三支概念构建算法。首先, 给出属性矩阵的定义, 并设计利用属性矩阵构建属性三支概念的算法过程, 对实例进行算法运算, 以此对算法步骤进行说明, 对算法正确性进行了相应验证。其次, 定义对象矩阵, 并设计依据此矩阵构建对象三支概念的算法, 对实例进行算法运算。经上述研究验证, 所提算法正确且有效。研究结果为三支概念在数据处理中的应用提供了更多选择。

关键词: 形式背景; 标准概念; 三支概念; 对象三支概念; 属性三支概念; 矩阵; 属性矩阵; 对象矩阵

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2020)03-0514-06

中文引用格式: 毛华, 武秀. 三支概念的一种构建方法 [J]. 智能系统学报, 2020, 15(3): 514-519.

英文引用格式: MAO Hua, WU Xiu. A new method for constructing three-way concept[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2020, 15(3): 514-519.

A new method for constructing three-way concept

MAO Hua, WU Xiu

(School of Mathematics and Information Science, Hebei University, Baoding 071002, China)

Abstract: The construction of three-way concept is one of the important research subjects of three-way formal concept analysis. To enrich the research of three-way concept, an algorithm for constructing the three-way concept is proposed by using the matrix structure. First, the definition of attribute matrix is given, which displays or shows attributes and its classes. Then the algorithm of the attribute-induced three-way concept is constructed based upon the definition. The operation process of the abovementioned algorithm is illustrated with an example and the validity of the algorithm is verified. Second, the definition of object matrix is given and the algorithm of object-induced three-way concept is designed according to the object matrix definition. Similarly, an example is used to illustrate the algorithm process. The above processes or concepts show that the proposed algorithms are correct and effective. The research results provide more choices for the application of three-way concept in data processing.

Keywords: formal context; classical concept; three-way concept; object-induced three-way concept; attribute-induced three-way concept; matrix; attribute matrix; object matrix

概念格是由 Wille^[1] 于 1982 年提出的理论, 一般可用于解决数据处理等相关的问题。Yao^[2] 于 2009 年将延迟决策引入粗糙集的三支决策中, 将三支决策进而拓展为更符合现实决策情况的三支决策理论。三支决策被引入概念格理论, Qi 等^[3] 提出了三支概念的定义, 将三支概念分为对象三

支概念与属性三支概念。

从完备性方面区分, 形式背景分为完备形式背景与不完备形式背景。本文研究建立在完备形式背景之上。对完备形式背景的研究中, 研究方向通常分为对三支概念的属性约简、概念构建以及其他方面的研究。在属性约简方面, Ren 等^[4] 设计了 4 种属性约简方法, 对 4 种约简方法之间的联系进行了分析; 在三支概念构建方面, Qi 等^[5] 在对标准形式概念的分析基础上, 设计了一种利用标准概念求得三支概念的方法; 汪文威等^[6] 在

收稿日期: 2019-04-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61572011); 河北省自然科学基金项目 (A2018201117).

通信作者: 武秀. E-mail: yxwxhb@126.com.

CbO 算法的基础上进行调整,提出了 CbO3C 算法用于构建三支概念;Qian 等^[7]利用上位背景和低位背景,设计了一种三支概念构建方法;Mao 等^[8]研究了标准概念与对象(属性)三支概念间的关系,并根据所得关系设计了构建三支概念的算法;在其他方面,刘琳等^[9]利用属性三支概念对规则提取问题进行了讨论;Singh^[10]通过对中智图、中智格和 Gödel 剩余格的性质分析,设计了基于模糊概念格生成分量式三支模糊概念的方法,并将其层次顺序可视化;Singh^[11]利用单值中智图的概念格的性质对医学数据集进行分析,提出了计算三支模糊概念的欧几里德距离的方法。其他三支概念格方面的研究参考文献[12-16]。

在采用矩阵结构进行三支概念的研究中,李美争等^[17]定义了对对象-概念辨识矩阵来研究三支近似概念的约简问题;陈雪等^[18]利用差别矩阵及差别函数计算得到了决策形式背景下的属性约简结果。

本文将矩阵思想与三支概念构建的研究相结合,定义出属性(对象)矩阵,并利用属性(对象)矩阵结构设计了构建三支概念的算法。

1 基础知识

对于相对成熟的矩阵理论,在此不做赘述,相关内容详见文献[19]。本节将对利用到的标准形式概念及三支概念的一些定义及性质进行说明,其中标准形式概念的内容详见文献[20],三支概念的相关知识详见文献[3,5]。

定义 1^[20] 形式背景 (G, M, I) 是由两个集合 G 和 M 以及 G 与 M 间的二元关系 I 组成。 G 为对象集, M 为属性集, $I \subseteq G \times M$ 。在对象集合 $A \subseteq G$ 中,令

$$A^* := \{m \in M | I_{gm} \text{ 对于任意 } g \in A\}$$

其中 I_{gm} 表示对象 g 与属性 m 间满足二元关系 I (或者对象 g 具有属性 m)。

在属性集合 $B \subseteq M$ 中,令

$$B^* := \{g \in G | I_{gm} \text{ 对于任意 } m \in B\}$$

若对集合 A, B 有 $A^* = B$ 和 $B^* = A$ 同时成立,则 (A, B) 称为一个标准形式概念。其中标准形式概念的外延为 A , 标准形式概念的内涵为 B 。

所有基于正算子“*”形成的概念 (A, B) 构成集合 $CL(G, M, I)$ 。

任意的概念 (A_1, B_1) 与 (A_2, B_2) 间的关系如下:

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (\Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2)$$

定义 2^[20] 假设 (G, M, I) 是一个形式背景, $I^c = (G \times M) - I$, 对象集合 $A \subseteq G$, 定义

$$A^{\bar{*}} = \{m \in M | \forall g \in A (I_{gm}^c)\}$$

属性集合 $B \subseteq M$, 定义

$$B^{\bar{*}} = \{g \in G | \forall m \in B (I_{gm}^c)\}$$

如果 $A^{\bar{*}} = B$ 和 $B^{\bar{*}} = A$ 同时成立, 则称 (X, A) 为一个标准形式概念。所有负算子“ $\bar{*}$ ”下成立的标准形式概念 (X, A) 记成集合 $NCL(G, M, I)$ 。

定义 3^[5] 假设 (G, M, I) 形式背景, $\prec: P(G) \rightarrow DP(M)$ 和 $\succ: DP(M) \rightarrow P(G)$ 分别为集合 $X \subseteq G$ 和 $A, B \subseteq M$ 上的基于对象导出的算子。算子运算方式如下:

$$X^{\prec} = (X^*, X^{\bar{*}})$$

$$(A, B)^{\succ} = \{x \in G | x \in A^*, x \in B^{\bar{*}}\} = A^* \cap B^{\bar{*}}$$

(G, M, I) 是一个形式背景。 $\prec: P(M) \rightarrow DP(G)$ 和 $\succ: DP(G) \rightarrow P(M)$ 分别为集合 $X, Y \subseteq G$ 和 $A \subseteq M$ 上的基于属性导出的算子。算子运算方式如下:

$$A^{\prec} = (A^*, A^{\bar{*}}),$$

$$(X, Y)^{\succ} = \{v \in M | v \in X^*, v \in Y^{\bar{*}}\} = X^* \cap Y^{\bar{*}}$$

定义 4^[5] 形式背景 (G, M, I) , 如果在对象集合 $X \subseteq G$, 属性集合 $A, B \subseteq M$ 上, $X^{\prec} = (A, B)$ 和 $(A, B)^{\succ} = X$ 同时成立, 则称 $(X, (A, B))$ 为对象三支概念。全体 $((X, Y), A)$ 记入集合 $OEL(G, M, I)$ 。

任意三支概念 $(X, (A, B))$ 和 $(Y, (C, D))$ 之间的关系定义如下:

$$(X, (A, B)) \leq (Y, (C, D)) \Leftrightarrow X \subseteq Y \Leftrightarrow (C, D) \subseteq (A, B)$$

性质 1^[5] 对于集合 $X, X_1, X_2 \subseteq G; A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \subseteq M$, 则有以下性质成立:

$$(OE_1) X \subseteq X^{\prec \succ}, (A, B) \subseteq (A, B)^{\succ \prec}$$

$$(OE_2) X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^{\prec} \subseteq X_2^{\prec}, (A_1, B_1) \subseteq (A_2, B_2) \Rightarrow$$

$$(A_2, B_2)^{\succ} \subseteq (A_1, B_1)^{\succ}$$

$$(OE_3) X^{\prec} = X^{\prec \succ \prec}, (A, B)^{\succ} = (A, B)^{\succ \prec \succ}$$

$$(OE_4) X \subseteq (A, B)^{\succ} \Leftrightarrow (A, B) \subseteq X^{\prec}$$

$$(OE_5) (X_1 \cup X_2)^{\prec} = X_1^{\prec} \cap X_2^{\prec}, ((A_1, B_1) \cup (A_2, B_2))^{\succ} = (A_1, B_1)^{\succ} \cap (A_2, B_2)^{\succ}$$

$$(OE_6) (X_1 \cap X_2)^{\prec} \supseteq X_1^{\prec} \cup X_2^{\prec}, ((A_1, B_1) \cap (A_2, B_2))^{\succ} = (A_1, B_1)^{\succ} \cup (A_2, B_2)^{\succ}$$

定义 5^[5] 形式背景 (G, M, I) , 如果在属性集合 $A \subseteq M$, 对象集合 $X, Y \subseteq G$ 上 $A^{\prec} = (X, Y)$ 和 $(X, Y)^{\succ} = A$ 同时成立, 则称 $((X, Y), A)$ 为属性三支概念。全体三支概念 $((X, Y), A)$ 记入集合 $AEL(G, M, I)$ 。

对于任意的属性三支概念 $((X, Y), A)$ 和 $((Z, W), B)$, 给出如下定义:

$$((X, Y), A) \leq ((Z, W), B) \Leftrightarrow (X, Y) \subseteq (Z, W) \Leftrightarrow B \subseteq A$$

性质 2^[5] 在集合 $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \subseteq G, A, A_1, A_2 \subseteq M$ 上有以下性质成立:

$$(AE_1) (X, Y) \subseteq (X, Y)^{\succ \prec}, A \subseteq A^{\prec \succ}$$

$$(AE_2) (X_1, Y_1) \subseteq (X_2, Y_2) \Rightarrow (X_2, Y_2)^{\succ} \subseteq (X_1, Y_1)^{\succ}$$

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2^{\prec} \subseteq A_1^{\prec}$$

$$(AE_3) (X, Y)^{\succ} = (X, Y)^{\succ \prec \succ}, A^{\prec} = A^{\prec \succ \prec}$$

$$\begin{aligned}
& (AE_4) (X, Y) \subseteq A^< \Leftrightarrow A \subseteq (X, Y)^> \\
& (AE_5) ((X_1, Y_1) \cup (X_2, Y_2))^> = (X_1, Y_1)^> \cap (X_2, Y_2)^>, (A_1 \cup A_2)^< = A_1^< \cap A_2^< \\
& (AE_6) ((X_1, Y_1) \cap (X_2, Y_2))^> \supseteq (X_1, Y_1)^> \cup (X_2, Y_2)^>, (A_1 \cap A_2)^< \supseteq A_1^< \cup A_2^<
\end{aligned}$$

2 概念的构建

2.1 依据属性矩阵构建属性三支概念

定义 6 形式背景 (G, M, I) , 其中属性集合 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。定义: 令 $W = (w_{ij}); w_{ij} = (a_i^* \cap a_j^*, a_i^* \cap a_j^{\bar{*}}); a_i, a_j \in M; n \in \mathbb{Z}^+; i, j = 1, 2, \dots, n$ 。则 W 为一个 $n \times n$ 的属性矩阵, 易得属性矩阵 W 为对称矩阵。

例 1 形式背景 (G_1, M_1, I_1) 如表 1 所示, 在此基础上构建属性矩阵 W_1 。

表 1 形式背景 (G_1, M_1, I_1)
Table 1 Formal context (G_1, M_1, I_1)

G_1	a	b	c	d
1	×		×	
2	×		×	×
3	×	×		
4		×	×	×

注: 本文中, 当对象具有某属性时在表中用“×”表示, 反之则为空

由表 1 可知: $w_{11} = (a^* \cap a^*, a^* \cap a^{\bar{*}}) = (123, 4), w_{12} = (a^* \cap b^*, a^* \cap b^{\bar{*}}) = (3, \emptyset), \dots, w_{34} = (c^* \cap d^*, c^* \cap d^{\bar{*}}) = (2, 3), w_{44} = (d^* \cap d^*, d^* \cap d^{\bar{*}}) = (24, 13)$ 。

所以

$$W_1 = \begin{bmatrix} (123, 4) & (3, \emptyset) & (12, \emptyset) & (2, \emptyset) \\ & (34, 12) & (4, \emptyset) & (4, 1) \\ & & (124, 3) & (24, 3) \\ & & & (24, 13) \end{bmatrix}$$

构建属性三支概念的算法过程如算法 1。

算法 1 属性三支概念生成算法。

输入 形式背景 (G, M, I) 。

输出 $AEL(G, M, I) \setminus \{(G, G), \emptyset\}$ 。

1) 生成形式背景 (G, M, I) 的属性矩阵 W , 并将属性矩阵 W 的所有元素构成的集合记成集合 P ;

2) $i = 1$;

3) $j = 1$;

4) $s = 1$;

5) $w = w_{ij} \cap w_{is}$;

6) 如果 $w \notin P$, 则 $P = P \cup \{w\}$, $s = s + 1$ 并执行 7); 反之 $s = s + 1$, 并执行 7);

7) 如果 $s \leq |P|$, 则执行 5); 反之 $j = j + 1$, 执行 8);

8) 如果 $j \leq |P|$, 则执行 4); 反之 $i = i + 1$, 执行 9);

9) 如果 $i \leq |P|$, 则执行 3); 反之执行 10);

10) 对更新过的集合 P 递归调用 2)~9), 直至集合 P 不再更新;

11) $Y = \emptyset, i = 1$;

12) $j = i$;

13) 如果 $w \subseteq w_{ij}$, 则 $Y = Y \cup \{a_i\} \cup \{a_j\}$, $j = j + 1$, 执行 14);

14) 如果 $j \leq n$, 则执行 13); 反之 $i = i + 1$ 并执行 15);

15) 如果 $i \leq n$, 则执行 12); 反之执行 16);

16) 输出三支概念 (w, Y) 。

因为集合 P 为有限集合, 所以算法 1 在有限步后可以停止。

复杂度分析:

1) 首先, 生成属性矩阵的复杂度为 $O(|M|^2/2)$; 其次, 得外延集的复杂度为 $O(|M|^{4\log_2|M|})$; 最后, 寻找满足条件的 w 对应的属性集, 共比较 $|M|(|M|+1)/2$ 次, 循环 $|P|$ 次, 所以复杂度为 $O(|M|(|M|+1)|P|/2)$; 因此, 算法 1 的复杂度为 $O(|M|^{4\log_2|M|})$ 。

2) 文献 [5] 中的复杂度受生成标准形式概念的复杂度的影响, 选择的方法不同, 复杂度则不同; 其次, 通过找等价类进行概念构建的最大时间复杂度为 $\max\{2^{2|M|}, 2^{G \times |M|}\}$, 因此, 两相比较, 本文方法较好。

3) 文献 [6] 中的时间复杂度为 $O(|G||M|^2|C|)$, 其中 C 表示属性三支核心概念的个数。两相比较, 本文算法较好。

下面给出算法 1 正确性的理论支持。

定理 1 (G, M, I) 为一形式背景, 基于属性矩阵 W 得到的概念均为属性三支概念。

证明 如果 $(A^<, A)$ 不是属性三支概念, 则 $A^{<*>} \neq A$ 。令 $A^{<*>} = A_0$ 。

下面证明 $A_0^< = A^<$: 由 AE_1 、 AE_2 性质可知, $A \subseteq A^{<*>} = A_0$, 则 $A_0^< \subseteq A^<$; 另外, 由 $A^{<*>} = A_0$ 可知, $A^{<*>} = A_0^<$, 又因为 $A^< \subseteq A^{<*>}$, 所以 $A^< \subseteq A_0^<$ 。因此 $A_0^< = A^<$ 成立。

定理 2 (G, M, I) 为一形式背景, 矩阵 W 为 (G, M, I) 上的属性矩阵, 则算法 1 可得到除 $((G, G), \emptyset)$ 外的所有属性三支概念。

证明 属性矩阵 W 中的元素构成的集合记为集合 P , 下面分 3 种情况对集合 P 进行讨论: ①若算法 1 中 5) 的结果为空集, 因为 \emptyset 为任何集合的子集, 所以矩阵 W 中包含了所有的外延; ②若算法 1 中 5) 的结果仍属于集合 P , 则集合 P

中包含了所有的外延;③若算法1中5)的结果不属于集合 P ,则算法1中的6)能够将其纳入集合 P 中,因此,执行有限次后,集合 P 包含所有的外延。最后,对每个外延寻找相应属性集即可得属性三支概念。

例2 利用文献[8]中的形式背景 (G_2, M_2, I_2) (见表2)对算法1的运行过程及有效性进行说明。对象集 G_2 为5个病人组成的集合,属性集 M_2 为病症的集合,分别为腰痛、尿急、排尿困难、尿道肿胀以及急性膀胱炎。为了能够对数据集做出合理分析,可先基于该背景进行三支概念构建,以此对后续判断提供依据。

表2 形式背景 (G_2, M_2, I_2)
Table 2 Formal context (G_2, M_2, I_2)

G_2	a	b	c	d	e
1	×		×		
2	×	×	×		×
3			×		
4	×				
5	×	×	×	×	

首先,由表2中形式背景可知:

$w_{11} = (a^* \cap a^*, a^{\bar{*}} \cap a^{\bar{*}}) = (1245, 3), w_{12} = (a^* \cap b^*, a^{\bar{*}} \cap b^{\bar{*}}) = (25, 3), \dots, w_{45} = (d^* \cap e^*, d^{\bar{*}} \cap e^{\bar{*}}) = (\emptyset, 134), w_{55} = (e^* \cap e^*, e^{\bar{*}} \cap e^{\bar{*}}) = (2, 1345)$ 。

可得

$$W_2 = \begin{bmatrix} (1245, 3) & (25, 3) & (125, \emptyset) & (5, 3) & (2, 3) \\ & (25, 134) & (25, 4) & (5, 134) & (2, 134) \\ & & (1235, 4) & (5, 4) & (2, 4) \\ & & & (5, 1234) & (\emptyset, 134) \\ & & & & (2, 1345) \end{bmatrix}$$

其次,令 $P = \{(1245, 3), (25, 3), (125, \emptyset), \dots, (5, 1234), (\emptyset, 134), (2, 1345)\}$,对集合 P 中元素进行相交,所得结果中 $(25, \emptyset), (5, \emptyset), (2, \emptyset), (\emptyset, 3), (\emptyset, 4), (\emptyset, \emptyset) \notin P$,将其添加到集合 P 中,再次两两相交,相交结果均为空。所以得 $P = \{(1245, 3), (25, 3), (125, \emptyset), \dots, (5, 1234), (\emptyset, 134), (2, 1345), (25, \emptyset), (5, \emptyset), (2, \emptyset), (\emptyset, 3), (\emptyset, 4), (\emptyset, \emptyset)\}$ 。

之后,执行算法1中11)~16)得到三支概念。例如,在矩阵 W_2 中, $(1245, 3) \subseteq w_{11}$, 可得三支概念 $((1245, 3), a)$;对 $(25, 3)$ 来说,在矩阵 W_2 中, $(25, 3) \subseteq w_{11}, w_{12}, w_{22}$, 可得三支概念 $((25, 3), ab)$ 。

因此,三支概念 $AEL(G_2, M_2, I_2) \setminus \{((G_2, G_2), \emptyset)\}$ 的结果,见表3。

表3 属性三支概念
Table 3 Attribute induced three-way concept

$((5, 1234), d)$	$((2, 4), bce)$	$((5, 4), bcd)$
$((2, 1345), e)$	$((25, 4), bc)$	$((25, 134), b)$
$((1235, 4), c)$	$((\emptyset, 4), bcde)$	$((125, \emptyset), ac)$
$((1245, 3), a)$	$((5, 3), abd)$	$((25, \emptyset), abc)$
$((2, 134), be)$	$((2, 3), abe)$	$((2, \emptyset), abce)$
$((5, 134), bd)$	$((\emptyset, 3), abde)$	$((5, \emptyset), abcd)$
$((25, 3), ab)$	$((\emptyset, \emptyset), M_2)$	$((\emptyset, 134), bde)$

依据定理1、2对算法的正确性及有效性进行了验证,且实例2运用算法1所得结果与文献[8]中所得一致,再次说明本文方法有效。

形式背景 (G_2, M_2, I_2) 中 $|M_2| = 5$,所以,执行算法1的2)~10)复杂度为 $O(5^{4\log_2 5})$;11)~16)的复杂度为 $O((5 \times 6 \times 21)/2)$;因此,对例2执行算法1的复杂度为 $O(5^{4\log_2 5})$ 。

2.2 依据对象矩阵构建对象三支概念

本小节将对对象三支概念的算法进行设计,给出相关定义、算法以及实例说明。

定义7 形式背景 (G, M, I) ,其中对象集合 $G = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$,定义: $V = (v_{kt}), v_{kt} = (b_k^* \cap b_t^*, b_k^{\bar{*}} \cap b_t^{\bar{*}})$, $b_k, b_t (k, t = 1, 2, \dots, n) \in G$ 。称矩阵 V 为一个 $n \times n$ 对象矩阵。

例3 形式背景 (G_1, M_1, I_1) 见表1。

由表1可知:

$v_{11} = (1^* \cap 1^*, 1^{\bar{*}} \cap 1^{\bar{*}}) = (ac, bd), v_{12} = (1^* \cap 2^*, 1^{\bar{*}} \cap 2^{\bar{*}}) = (ac, b), \dots, v_{34} = (3^* \cap 4^*, 3^{\bar{*}} \cap 4^{\bar{*}}) = (b, \emptyset), v_{44} = (4^* \cap 4^*, 4^{\bar{*}} \cap 4^{\bar{*}}) = (bcd, a)$ 。

可得:

$$V_1 = \begin{bmatrix} (ac, bd) & (ac, b) & (a, d) & (c, \emptyset) \\ & (acd, b) & (a, \emptyset) & (cd, \emptyset) \\ & & (ab, cd) & (b, \emptyset) \\ & & & (bcd, a) \end{bmatrix}$$

构建对象三支概念的算法过程如算法2。

算法2 生成对象三支概念的算法。

输入 形式背景 (G, M, I) 。

输出 $OEL(G, M, I) \setminus \{(\emptyset, (M, M))\}$ 。

1) 利用定义7生成形式背景 (G, M, I) 的对象矩阵 V ,将对象矩阵 V 的所有元素记入集合 F ;

2) $k = 1$;

3) $t = 1$;

4) $c = 1$;

5) $v = v_{kt} \cap v_{kc}$;

6) 如果 $v \notin F$, 则 $F = F \cup \{v\}$, 并执行 7); 反之直接执行 7);

7) $c = c + 1$, 如果 $c \leq |F|$, 则执行 5); 反之令 $t = t + 1$, 执行 8);

8) 如果 $t \leq |F|$, 则执行 4); 反之令 $k = k + 1$, 执行 9);

9) 如果 $k \leq |F|$, 则执行 3); 反之执行 10);

10) 对更新过的集合 F 递归调用 2)~9), 直至集合 F 不再更新;

11) $H = \emptyset, k = 1$;

12) $t = k$;

13) 如果 $v \subseteq v_{kt}$, 则令 $H = H \cup \{b_k\} \cup \{b_t\}$, $t = t + 1$, 执行 14);

14) 如果 $t \leq |G|$, 则执行 13); 反之令 $k = k + 1$ 并执行 15);

15) 如果 $k \leq |G|$, 则执行 12); 反之执行 16);

16) 输出三支概念 $\text{OEL}(G, M, I) \setminus \{(\emptyset, (M, M))\} = \cup\{(H, v)\}$ 。

由算法 1 的分析理论可知, 算法 2 在有限步后可以停止, 复杂度为 $O(|G|^{4\log_2|G|})$ 。

例 4 采用形式背景 (G_2, M_2, I_2) 对算法 2 的运行过程进行说明。

$v_{11} = (1^* \cap 1^*, 1^{\bar{*}} \cap 1^{\bar{*}}) = (ac, bde), v_{12} = (1^* \cap 2^*, 1^{\bar{*}} \cap 2^{\bar{*}}) = (ac, d), \dots, v_{45} = (4^* \cap 5^*, 4^{\bar{*}} \cap 5^{\bar{*}}) = (a, e), v_{55} = (5^* \cap 5^*, 5^{\bar{*}} \cap 5^{\bar{*}}) = (abcd, e)$ 。

可得

$$V_2 = \begin{bmatrix} (ac, bde) & (ac, d) & (c, bde) & (a, bde) & (ac, e) \\ & (abce, d) & (c, d) & (a, d) & (abc, \emptyset) \\ & & (c, abde) & (\emptyset, bde) & (\emptyset, e) \\ & & & (a, bcde) & (a, e) \\ & & & & (abcd, e) \end{bmatrix}$$

令 $F = \{(ac, bde), (ac, d), (c, bde), \dots, (a, bcde), (a, e), (abcd, e)\}$, 对集合 F 中两两元素相交, 其中结果 $(ac, \emptyset), (a, \emptyset), (c, \emptyset), (c, e), (\emptyset, d), (\emptyset, \emptyset) \notin F$, 将上述结果添加到集合 F 中, 再次相交, 计算结果为空。可得 $F = \{(ac, bde), (ac, d), (c, bde), \dots, (a, bcde), (a, e), (abcd, e), (ac, \emptyset), (a, \emptyset), (c, \emptyset), (c, e), (\emptyset, d), (\emptyset, \emptyset)\}$ 。

之后, 在矩阵 V_2 中, 分别对集合 F 中每一元素执行算法 2 的 11)~16): 例如, 对 (ac, \emptyset) 来说, 在矩阵 V_2 中, $(ac, \emptyset) \subseteq v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{22}, v_{25}, v_{55}$, 可得三支概念 $(125, (ac, \emptyset))$; 对 (a, bde) 来说, 在矩阵 S_2 中, $(a, bde) \subseteq v_{11}, v_{14}, v_{44}$, 可得三支概念 $(14, (a, bde))$ 。

因此, 三支概念 $\text{OEL}(G_2, M_2, I_2) \setminus \{(\emptyset, (M_2, M_2))\}$ 的结果见表 4。

表 4 对象三支概念
Table 4 Object induced three-way concept

$(3, (c, abde))$	$(15, (ac, e))$	$(14, (a, bde))$
$(4, (a, bcde))$	$(13, (c, bde))$	$(1, (ac, bde))$
$(2, (abce, d))$	$(145, (a, e))$	$(1345, (\emptyset, e))$
$(5, (abcd, e))$	$(135, (c, e))$	$(1234, (\emptyset, d))$
$(123, (c, d))$	$(25, (abc, \emptyset))$	$(1235, (c, \emptyset))$
$(124, (a, d))$	$(125, (ac, \emptyset))$	$(1245, (a, \emptyset))$
$(12, (ac, d))$	$(G_2, (\emptyset, \emptyset))$	$(134, (\emptyset, bde))$

在本例中 $|G_2| = 5$, 所以执行算法 2 的复杂度为 $O(5^{4\log_2 5})$ 。

3 结束语

本文给出了属性矩阵与对象矩阵的定义。利用属性(对象)矩阵, 设计了构建属性(对象)三支概念的算法。经验证, 上述算法均有效, 且在复杂度方面, 有所改善。后期, 将继续对三支概念的应用方面进行研究。

参考文献:

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[M]//RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht: Springer, 1982: 445–470.
- [2] YAO Yiyu. Three-way decision: an interpretation of rules in rough set theory[C]//Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Gold Coast, Australia, 2009: 642–649.
- [3] QI Jianjun, WEI Ling, YAO Yiyu. Three-way formal concept analysis[C]//Proceedings of the 9th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Shanghai, China, 2014: 732–741.
- [4] REN Ruishi, WEI Ling. The attribute reductions of three-way concept lattices[J]. Knowledge-based systems, 2016, 99: 92–102.
- [5] QI Jianjun, QIAN Ting, WEI Ling. The connections between three-way and classical concept lattices[J]. Knowledge-based systems, 2016, 91: 143–151.
- [6] 汪文威, 祁建军. 三支概念的构建算法[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2017, 44(1): 71–76.
WANG Wenwei, QI Jianjun. The algorithm of constructing three-way concept[J]. Journal of Xidian University (natural science edition), 2017, 44(1): 71–76.
- [7] QIAN Ting, WEI Ling, QI Jianjun. Constructing three-way concept lattices based on apposition and subposition of

- formal contexts[J]. *Knowledge-based systems*, 2017, 116: 39–48.
- [8] MAO Hua, ZHAO Shufeng, YANG Lanzhen. Relationships between three-way concepts and classical concepts[J]. *Journal of intelligent and fuzzy systems*, 2018, 35(1): 1063–1075.
- [9] 刘琳, 钱婷, 魏玲. 基于属性导出三支概念格的决策背景规则提取 [J]. *西北大学学报(自然科学版)*, 2016, 46(4): 481–487.
- LIU Lin, QIAN Ting, WEI Ling. Rules extraction in formal decision contexts based on attribute-induced three-way concept lattices[J]. *Journal of Northwest University (natural science edition)*, 2016, 46(4): 481–487.
- [10] SINGH P K. Three-way fuzzy concept lattice representation using neutrosophic set[J]. *International journal of machine learning and cybernetics*, 2016, 8(1): 69–79.
- [11] SINGH P K. Medical diagnoses using three-way fuzzy concept lattice and their Euclidean distance[J]. *Computational and applied mathematics*, 2018, 37(3): 3283–3306.
- [12] YU Huiying, LI Qingguo, CAI Mingjie. Characteristics of three-way concept lattices and three-way rough concept lattices[J]. *Knowledge-based systems*, 2018, 146: 181–189.
- [13] KONECNY J. On efficient factorization of standard fuzzy concept lattices and attribute-oriented fuzzy concept lattices[J]. *Fuzzy sets and systems*, 2018, 351: 108–121.
- [14] CIOBANU G, VĂIDEANU C. A note on similarity relations between fuzzy attribute-oriented concept lattices[J]. *Information sciences*, 2018, 460–461: 254–263.
- [15] LI Meizheng, WANG Guoyin. Approximate concept construction with three-way decisions and attribute reduction in incomplete contexts[J]. *Knowledge-based systems*, 2016, 91: 165–178.
- [16] CIOBANU G, VĂIDEANU C. An efficient method to factorize fuzzy attribute-oriented concept lattices[J]. *Fuzzy sets and systems*, 2017, 317: 121–132.
- [17] 李美争, 王国胤. 三支近似概念格中基于对象-概念辨识矩阵的属性约简方法 [J]. *控制与决策*, 2016, 31(10): 1779–1784.
- LI Meijing, WANG Guoyin. Attribute reduction based on object-concept indentified matrix in approximate three-way concept lattices[J]. *Control and decision*, 2016, 31(10): 1779–1784.
- [18] 陈雪, 魏玲, 钱婷. 基于 AE-概念格的决策形式背景属性约简 [J]. *山东大学学报(理学版)*, 2017, 52(12): 95–103.
- CHEN Xue, WEI Ling, QIAN Ting. Attribute reduction of decision formal context based on AE concept lattices[J]. *Journal of Shandong University (science edition)*, 2017, 52(12): 95–103.
- [19] 李乔. 矩阵论八讲 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
- [20] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: mathematical foundations[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

作者简介:



毛华, 教授, 博士, 主要研究方向为概念格、图论、拟阵论。发表学术论文 100 余篇。



武秀, 硕士研究生, 主要研究方向为概念格、图论。