



智能系统学报

CAAI TRANSACTIONS ON INTELLIGENT SYSTEMS

异质多智能体系统二分一致性的充要条件

王晓宇, 刘开恩, 纪志坚, 梁静娴

引用本文:

王晓宇, 刘开恩, 纪志坚, 等. 异质多智能体系统二分一致性的充要条件[J]. 智能系统学报, 2020, 15(4): 679–686.

WANG Xiaoyu, LIU Kaien, JI Zhijian, et al. Necessary and sufficient conditions for bipartite consensus of heterogeneous multi-agent systems[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2020, 15(4): 679–686.

在线阅读 View online: <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201901008>

您可能感兴趣的其他文章

含时延约束的多智能体系统二分一致性

Bipartite consensus for multi-agent systems subject to time delays

智能系统学报. 2020, 15(4): 780–786 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201908027>

多智能体系统安全性问题及防御机制综述

A survey of the security issues and defense mechanisms of multi-agent systems

智能系统学报. 2020, 15(3): 425–434 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201812015>

基于拓扑结构和个体动态层面的多智能体系统可控性分析

Controllability analysis of multi-agent systems based on topological structure and individual dynamic level

智能系统学报. 2020, 15(2): 264–270 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201901006>

分布式事件触发多自主体领导跟随一致性研究

Distributed event-triggered consensus control of multi-agent systems with leader-following

智能系统学报. 2019, 14(5): 991–997 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201809035>

基于牵制控制的异质多智能体系统的群一致性研究

Research on group consensus of heterogeneous multi-agent systems via pinning control

智能系统学报. 2019, 14(2): 355–361 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201710002>

基于二阶邻居事件触发多智能体系统的一致性

Event-triggered consensus of multi-agent systems based on second-order neighbors

智能系统学报. 2017, 12(06): 833–840 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201702008>

微信公众平台



关注微信公众号, 获取更多资讯信息

DOI: 10.11992/tis.201901008

异质多智能体系统二分一致性的充要条件

王晓宇¹, 刘开恩¹, 纪志坚², 梁静娴¹

(1. 青岛大学 数学与统计学院, 山东 青岛 266071; 2. 青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 针对由一阶智能体和二阶智能体组成的异质多智能体系统的二分一致性问题, 对连续和离散系统情形分别设计了二分一致性协议。基于结构平衡的拓扑, 通过规范变换实现了从具有敌对关系的系统到具有非负连接权重系统的转化, 将二分一致性问题转变为一般一致性问题。进一步, 运用代数图论和矩阵理论分析闭环控制系统的动态特性, 得到了异质多智能体系统渐近实现二分一致性的充要条件。最后通过数值模拟验证了所得结果的有效性。

关键词: 异质多智能体系统; 二分一致性; 规范变换; 结构平衡; 连续系统; 离散系统; 代数图论; 矩阵理论

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2020)04-0679-08

中文引用格式: 王晓宇, 刘开恩, 纪志坚, 等. 异质多智能体系统二分一致性的充要条件 [J]. 智能系统学报, 2020, 15(4): 679-686.

英文引用格式: WANG Xiaoyu, LIU Kaizen, JI Zhijian, et al. Necessary and sufficient conditions for bipartite consensus of heterogeneous multi-agent systems[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2020, 15(4): 679-686.

Necessary and sufficient conditions for bipartite consensus of heterogeneous multi-agent systems

WANG Xiaoyu¹, LIU Kaizen¹, JI Zhijian², LIANG Jingxian¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. School of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: To investigate the bipartite consensus problem of heterogeneous multi-agent systems composed of first- and second-order agents, in this study, we designed bipartite consensus protocols for continuous and discrete systems. Based on a structurally balanced topology, we employ gauge transformation to transform a system with antagonistic interactions into one with non-negative connection weights. Accordingly, the bipartite consensus problem is transformed into a general consensus problem. We use algebraic graph theory and matrix theory to analyze the dynamic characteristics of the closed-loop control system and obtain the necessary and sufficient conditions to guarantee that heterogeneous multi-agent systems reach bipartite consensus asymptotically. Finally, we present numerical simulations to illustrate the effectiveness of the obtained theoretical results.

Keywords: heterogeneous multi-agent systems; bipartite consensus; gauge transformation; structural balance; continuous systems; discrete systems; algebraic graph theory; matrix theory

多智能体系统的一致性作为多智能体系统协作控制的基本问题, 因具有重要的理论和现实意义受到国内外研究人员的广泛关注^[1-9]。一

致性是指随着时间的变化, 系统中智能体通过合作或竞争的方式调节各自的目标与行为, 最终使智能个体的部分或全部状态 (如: 位置、速度等) 都收敛到某个共同的值。目前多智能体系统在许多领域中得到广泛应用, 如机器人系统的编队控制、无人机的协作控制、卫星簇的姿态调整、传感器网络的目标跟踪等。

然而随着系统规模的增加和复杂度的提高,

收稿日期: 2019-01-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61873136, 61603288, 61374062); 山东省自然科学基金项目 (ZR2015FM023, ZR2017MF055); 中国博士后科学基金项目 (2015M571995).

通信作者: 刘开恩. E-mail: kaizenliu@pku.edu.cn.

单一平衡点不能满足控制的要求,因此有学者提出了分组一致性的概念,即同一子系统中所有智能体收敛至一个状态,不同子系统中智能体收敛至不同状态^[10-12]。以上的研究成果都是针对具有非负连接权重的多智能体系统获得的,在很多情况下系统中还存在着一种特殊的“共识”现象,即所有的智能体最终能达到大小相同,符号相反的状态。可以理解为,不同智能体之间有的具有合作关系,有的具有敌对关系^[13-16]。2013年,Altfini^[13]在对具有敌对关系的多智能体系统的研究中,给出了系统达到二分一致性的定义。杜明骏等^[14]研究了具有敌对关系且含通讯时滞的多智能体系统的二分一致性。上述文献研究的都是由具有相同动态方程的智能体构成的同质多智能体系统。而实际上,受到各种因素的限制,自然界的个体和人造工程在功能和结构上都存在差异,发生耦合的每个智能体的动态方程可能不同,导致其系统描述的是混合多种动态方程的复杂系统。因此研究具有一阶和二阶智能体组成的异质多智能体系统是很有必要的^[17-19]。刘聪等^[17]讨论了具有有向生成树的离散时间异质多智能体系统的一致性,但对控制增益的要求为 $\alpha > \max_{1 \leq i \leq m} \{l_{ii}\}$ 。Liu等^[18]分别对连续和离散异质多智能体系统设计了一致性协议,证明了系统渐近实现一致性,当且仅当固定有向拓扑包含一棵有向生成树,对于系统具有切换拓扑情形也有相应结论。修言彬等^[19]研究了具有包含两棵有向生成树的拓扑结构的离散异质多智能体系统的分组一致性,但两组的最终收敛状态没有任何关系。

基于上面的研究,本文考虑具有包含一棵有向生成树和结构平衡拓扑结构的由一阶和二阶多智能体混合而成的多智能体系统的二分一致性问题,对连续和离散系统均进行了讨论。

1 预备知识

本文中使用的有向图表示多智能体系统中智能体之间形成的网络拓扑。用 $G=(V,E,A)$ 表示含有 n 个节点的加权有向图,其中 $V=\{v_i:i=1,2,\dots,n\}$ 表示节点集, $E \subseteq V \times V$ 表示有向边集, $A=[a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为加权邻接矩阵。记 $e_{ij}=(v_i,v_j)$ 是有向图 G 中从父节点 v_j 到子节点 v_i 的有向边,与边 e_{ij} 相关的 a_{ij} 称为边的权值。当 $e_{ij} \in E$ 时,有 $a_{ij} \neq 0$ 。节点 v_i 的邻居集用 $N_i=\{v_j \in V:e_{ij} \in E\}$ 表示。图 G 的Laplacian矩阵定义为 $L=A-A \in \mathbf{R}^{n \times n}$,其中 $A=\text{diag}\{\Lambda_{11},\Lambda_{22},\dots,\Lambda_{nn}\}$ 为对角阵, $\Lambda_{ii}=\sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$ 为节点 v_i 的入度。从 v_j 到 v_i 的有向路径为图 G 不同的边构

成的有限有序序列: $(v_i,v_{k1}), (v_{k1},v_{k2}), \dots, (v_{kl},v_j)$ 。若存在一个根节点,使得从它出发到其它任何节点都存在一条有向路径,则称图 G 包含一棵有向生成树。

定义1 (结构平衡)^[13] 图 G 是结构平衡的当且仅当节点集 V 可以分成两个非空集合 V_1 和 V_2 ,且满足下面两个条件:

- 1) $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$;
- 2) $a_{ij} \geq 0, \forall v_i, v_j \in V_q (q \in \{1,2\})$;
 $a_{ij} \leq 0, \forall v_i \in V_q, v_j \in V_r, q \neq r (q,r \in \{1,2\})$

定义2 (规范变换)^[13] 借助正交矩阵 D 对多智能体系统的状态变量 x 进行的线性变换 Dx ,其中 $D=\text{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\sigma_i \in \{\pm 1\}\}$,其具体取值在使用时根据需要选取。

记 \mathbf{R}^n 中所有规范变换矩阵的集合为 $\mathcal{D}=\{D=\text{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\sigma_i \in \{\pm 1\}\}\}$ 。当多智能体系统的拓扑结构为结构平衡时,通过选取合适的 $D \in \mathcal{D}$ 可以使得DAD中的元素非负,同时保证DLD满足非对角线元素非正且行和为零。

引理1^[2] 给定矩阵 $B=[b_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足 $b_{ii} \geq 0, b_{ij} \leq 0, i \neq j$ 且 $\sum_{j=1}^n b_{ij}=0$,则矩阵 B 至少有一个零特征值且其余非零特征值都具有正实部。矩阵 B 仅有简单零特征值,当且仅当矩阵 B 对应的有向图包含一棵有向生成树。

2 问题陈述

考虑由 n 个智能体组成的异质多智能体系统,此处异质的含义为系统中有 $m(1 \leq m < n)$ 个智能体具有二阶动态方程,称它们为二阶智能体, $n-m$ 个智能体具有一阶动态方程,称它们为一阶智能体。不失一般性,假设前 m 个为二阶智能体,智能体的指标集为 $I_1=\{1,2,\dots,m\}$,后 $n-m$ 个为一阶智能体,智能体的指标集为 $I_2=\{m+1,m+2,\dots,n\}$,记 $I=I_1 \cup I_2$ 。

假设1 本文考虑的拓扑结构,按如下分组满足结构平衡关系,设指标集 I_1 对应的二阶智能体构成 V_1 ,指标集 I_2 对应的一阶智能体构成 V_2 ,即将整个系统中二阶智能体分为一组,一阶智能体分为一组,每组内部具有合作关系,两组间具有敌对关系。

首先,考虑连续多智能体系统,其个体的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \dot{v}_i(t) = u_i(t), & i \in I_1 \\ \dot{x}_i(t) = u_i(t), & i \in I_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_i(t), v_i(t) \in \mathbf{R}$ 和 $u_i(t) \in \mathbf{R}$ 分别表示第 i 个智能

体的位置、速度和控制输入。

基于假设1设计如下的二分一致性协议:

$$\begin{cases} u_i(t) = -\alpha v_i(t) + \alpha^2 \left[\sum_{j \in N_{i1}} a_{ij}(x_j(t) - y_i(t)) - \sum_{j \in N_{i2}} |a_{ij}|(y_i(t) + x_j(t)) \right], & i \in I_1 \\ u_i(t) = \alpha \left[\sum_{j \in N_{i2}} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) - \sum_{j \in N_{i1}} |a_{ij}|(x_i(t) + x_j(t)) \right], & i \in I_2 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $y_i(t) = x_i(t) + \frac{1}{\alpha} v_i(t)$, $i \in I_1$, $\alpha > 0$ 为控制增益; N_{i1} 、 N_{i2} 分别表示第 i 个智能体在 V_1 和 V_2 中的邻居集。

其次,考虑离散多智能体系统,其个体的动态方程为

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + T v_i(k), & i \in I_1 \\ v_i(k+1) = v_i(k) + T u_i(k), & i \in I_1 \\ x_i(k+1) = x_i(k) + T u_i(k), & i \in I_2 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $x_i(k)$ 、 $v_i(k) \in \mathbf{R}$ 和 $u_i(k) \in \mathbf{R}$ 分别表示第 i 个智能体在 kT ($k \in \mathbf{N}$, \mathbf{N} 为自然数集) 时刻的位置、速度和控制输入; $T > 0$ 为采样周期。

在文献[19]中,针对系统(3)设计的二分一致性协议为

$$\begin{cases} u_i(k) = -\alpha v_i(k) + \alpha^2 \left[\sum_{j \in N_{i1}} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)) + \sum_{j \in N_{i2}} a_{ij} x_j(k) \right], & i \in I_1 \\ u_i(k) = \alpha \left[\sum_{j \in N_{i2}} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)) + \sum_{j \in N_{i1}} a_{ij} x_j(k) \right], & i \in I_2 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\alpha > 0$ 为控制增益。文献[19]中给出了两条假定:

假定1 $\sum_{j=m+1}^n a_{ij}=0, \forall i \in I_1$, 且 $\sum_{j=1}^m a_{ij}=0, \forall i \in I_2$ 。

假定2 除去两个单零特征值外,图 G 对应的 Laplacian 矩阵 L 的特征值都具有正实部。

在本文中,基于假设1,删除了对上述两条假定的要求并设计了如下的二分一致性协议:

$$\begin{cases} u_i(k) = -\alpha v_i(k) + \alpha^2 \left[\sum_{j \in N_{i1}} a_{ij}(x_j(k) - y_i(k)) - \sum_{j \in N_{i2}} |a_{ij}|(y_i(k) + x_j(k)) \right], & i \in I_1 \\ u_i(k) = \alpha \left[\sum_{j \in N_{i2}} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)) - \sum_{j \in N_{i1}} |a_{ij}|(x_i(k) + x_j(k)) \right], & i \in I_2 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $y_i(k) = x_i(k) + \frac{1}{\alpha} v_i(k)$, $i \in I_1$, $\alpha > 0$ 为控制增益; N_{i1} 、 N_{i2} 的含义同(2)。

注释1 在式(4)协议作用下,式(3)系统虽然能够实现二分一致性,但是两组最终的收敛状态没有任何关系。而在式(5)协议作用下,式(3)系统最终实现二分一致性,并且两组的收敛值互为相反数,这样的收敛状态具有更好的应用价值。

定义3 如果对于式(1)系统的任何初始条件满足:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| x_i(t) - \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} x_j(t) \right| = 0, & \forall i \in I_1, j \in I \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |v_i(t)| = 0, & \forall i \in I_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left| x_i(t) - \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} x_j(t) \right| = 0, & \forall i \in I_2, j \in I \end{cases} \quad (6)$$

则称式(1)系统渐近实现了二分一致性。

如果对于式(3)系统的任何初始条件满足:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| x_i(k) - \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} x_j(k) \right| = 0, & \forall i \in I_1, j \in I \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |v_i(k)| = 0, & \forall i \in I_1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| x_i(k) - \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} x_j(k) \right| = 0, & \forall i \in I_2, j \in I \end{cases} \quad (7)$$

则称式(3)系统渐近实现了二分一致性。

3 一致性分析

基于所考虑多智能体系统的分组,将图 G 的邻接矩阵 A 表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: $A_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$; $A_2 \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$; $A_3 \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$; $A_4 \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ 。

3.1 连续系统的一致性分析

对连续式(1)系统,令 $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)^T$ 。由 $\dot{x}_i = v_i = \alpha(y_i - x_i)$ 和 $\dot{y}_i = \dot{x}_i + \frac{1}{\alpha} \dot{v}_i = v_i + \frac{1}{\alpha} u_i$, 将式(2)协议应用到式(1)系统中,可得:

$$\dot{\xi} = -\bar{L}\xi \quad (9)$$

其中

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \alpha I_m & -\alpha I_m & \mathbf{0} \\ -\alpha \tilde{A}_1 & \alpha(\Lambda_1 + \Lambda_2) & \alpha \tilde{A}_2 \\ \alpha \tilde{A}_3 & \mathbf{0} & -\alpha \tilde{A}_4 + \alpha \Lambda_3 + \alpha \Lambda_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: I_m 表示 $m \times m$ 维的单位矩阵, $\mathbf{0}$ 表示合适维数的零矩阵; $\tilde{A}_i = A_i$ ($i = 1, 4$); $\tilde{A}_j = -A_j$ ($j = 2, 3$);

$$\Lambda_1 = \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^m a_{1j}, \sum_{j=1}^m a_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^m a_{mj} \right\}; \Lambda_2 = \text{diag} \left\{ \sum_{j=m+1}^n -a_{1j}, \sum_{j=m+1}^n -a_{2j}, \dots, \sum_{j=m+1}^n -a_{mj} \right\}; \Lambda_3 = \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^m -a_{(m+1)j}, \sum_{j=1}^m -a_{(m+2)j}, \dots, \sum_{j=1}^m -a_{nj} \right\}; \Lambda_4 = \text{diag} \left\{ \sum_{j=m+1}^n a_{(m+1)j}, \sum_{j=m+1}^n a_{(m+2)j}, \dots, \sum_{j=m+1}^n a_{nj} \right\};$$

易见 $\tilde{A}_i (i=1,2,3,4)$ 中元素全非负。

根据假设 1, 令 $D = \text{diag}\{I_m, I_m, -I_{n-m}\}$, 对 ξ 进行如下规范变换: $\hat{\xi} = D\xi$, 从而式 (9) 系统可写作:

$$\dot{\hat{\xi}} = -\hat{L}\hat{\xi}, \quad (11)$$

其中

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \alpha I_m & -\alpha I_m & \mathbf{0} \\ -\alpha \tilde{A}_1 & \alpha(\Lambda_1 + \Lambda_2) & -\alpha \tilde{A}_2 \\ -\alpha \tilde{A}_3 & \mathbf{0} & -\alpha \tilde{A}_4 + \alpha \Lambda_3 + \alpha \Lambda_4 \end{bmatrix}$$

易知 \hat{L} 和 L 具有相同特征值。又 \hat{L} 行和为 0, 对角线元素全非负, 非对角线元素全非正, 故 \hat{L}

$$\hat{L} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \alpha \tilde{A}_1 \\ \mathbf{0} & -\alpha \tilde{A}_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\alpha \tilde{A}_2 \\ -\alpha \tilde{A}_4 + \alpha \Lambda_3 + \alpha \Lambda_4 \end{bmatrix} \triangleq \alpha \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{bmatrix}$$

从而 $\text{rank}(\hat{L}) = m + \text{rank}(L)$ 。由引理 1, 与 \hat{L} 对应的图 G' 有一棵有向生成树等价于 \hat{L} 只有简单零特征值, 即有 $\text{rank}(\hat{L}) = m + \text{rank}(L) = n + m - 1$, 也即 $\text{rank}(L) = n - 1$ 。因此, 仍由引理 1 可知结论成立。

通过针对式 (9) 系统的规范变换, 我们实现了系统连接权重符号的改变, 将具有敌对关系的式 (9) 系统转换为具有非负连接权重的式 (11) 系统。根据系统渐近实现一致性的定义, 容易得出下面的引理。

引理 3 式 (1) 系统在式 (2) 协议作用下渐近实现二分一致性; 当且仅当式 (11) 系统能够渐近实现一致性。

针对一般一致性问题, 文献 [2] 中有如下引理:

引理 4^[2] 在固定拓扑下, 连续时间多智能体

系统 $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i), i \in I$, 能够渐近实现一致性, 当且仅当图 G 包含一棵有向生成树。

下面给出保证式 (1) 系统二分一致性成立的一个定理。

定理 1 假定假设 1 成立。式 (1) 系统在式 (2) 协议作用下渐近实现二分一致性的充要条件是图 G 包含一棵有向生成树。

$$U = \begin{bmatrix} (1-\alpha T)I_m & \alpha T I_m & \mathbf{0} \\ \alpha T \tilde{A}_1 & I_m - \alpha T(\Lambda_1 + \Lambda_2) & -\alpha T \tilde{A}_2 \\ -\alpha T \tilde{A}_3 & \mathbf{0} & I_{n-m} + \alpha T(\tilde{A}_4 - \Lambda_3 - \Lambda_4) \end{bmatrix}$$

基于假设 1, 令 $D = \text{diag}\{I_m, I_m, -I_{n-m}\}$, 对 z 进行如下规范变换: $\tilde{z} = Dz$, 从而系统 (13) 可写为

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} (1-\alpha T)I_m & \alpha T I_m & \mathbf{0} \\ \alpha T \tilde{A}_1 & I_m - \alpha T(\Lambda_1 + \Lambda_2) & \alpha T \tilde{A}_2 \\ \alpha T \tilde{A}_3 & \mathbf{0} & I_{n-m} + \alpha T(\tilde{A}_4 - \Lambda_3 - \Lambda_4) \end{bmatrix}$$

对矩阵 \tilde{U} 进行初等变换:

$$\tilde{U} \rightarrow \begin{bmatrix} (1-\alpha T)I_m & \mathbf{0} & \alpha T I_m \\ \alpha T \tilde{A}_3 & I_{n-m} + \alpha T(\tilde{A}_4 - \Lambda_3 - \Lambda_4) & \mathbf{0} \\ \alpha T \tilde{A}_1 & \alpha T \tilde{A}_2 & I_m - \alpha T(\Lambda_1 + \Lambda_2) \end{bmatrix} \triangleq \hat{U}$$

可看作是具有 $n+m$ 个节点的图 G' 对应的 Laplacian 矩阵。

引理 2 假定假设 1 成立, 图 G' 包含一棵有向生成树当且仅当图 G 包含一棵有向生成树。

文献 [18] 中针对切换有向拓扑给出了该引理的证明。针对固定拓扑, 本文运用将图 G 的拓扑性质转化为与其等价的代数性质的方法给出新的简单证明。

证明 对 \hat{L} 进行初等变换:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\alpha \tilde{A}_2 \\ -\alpha \tilde{A}_4 + \alpha \Lambda_3 + \alpha \Lambda_4 \end{bmatrix} \triangleq \alpha \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{bmatrix}$$

证明 在假设 1 成立的条件下, 由引理 3, 式 (1) 系统在式 (2) 协议作用下渐近实现二分一致性等价于式 (11) 系统能够渐近实现一致性。由引理 4, 式 (11) 系统能够渐近实现一致性当且仅当图 G' 包含一棵有向生成树。进一步, 结合引理 2 可知定理结论成立。

3.2 离散系统的一致性分析

对离散式 (3) 系统, 令 $\mathbf{x}_m(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k)]^T$, $\mathbf{y}_m(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_m(k)]^T$, $\mathbf{x}_f(k) = [x_{m+1}(k), x_{m+2}(k), \dots, x_n(k)]^T$, 将式 (5) 协议应用到式 (3) 系统中, 可得:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_m(k+1) = (1-\alpha T)\mathbf{x}_m(k) + \alpha T\mathbf{y}_m(k) \\ \mathbf{y}_m(k+1) = I_m\mathbf{y}_m(k) + \alpha T[\mathbf{A}_1\mathbf{x}_m(k) - \mathbf{A}_1\mathbf{y}_m(k) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_f(k) - \mathbf{A}_2\mathbf{y}_m(k)] \\ \mathbf{x}_f(k+1) = I_{n-m}\mathbf{x}_f(k) + \alpha T[\mathbf{A}_4\mathbf{x}_f(k) - \mathbf{A}_4\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{A}_3\mathbf{x}_m(k) - \mathbf{A}_3\mathbf{x}_f(k)] \end{cases} \quad (12)$$

式中: \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_4 中的元素全都非负; \mathbf{A}_2 和 \mathbf{A}_3 中的元素全都非正; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ 与式 (10) 中定义相同。同样地记 $\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i (i=1,4)$, $\tilde{\mathbf{A}}_j = -\mathbf{A}_j (j=2,3)$, 易知 $\tilde{\mathbf{A}}_i (i=1,2,3,4)$ 中元素全非负。

令 $\mathbf{z}(k) = [\mathbf{x}_m^T(k), \mathbf{y}_m^T(k), \mathbf{x}_f^T(k)]^T$, 将式 (12) 写成紧凑形式得:

$$\mathbf{z}(k+1) = U\mathbf{z}(k) \quad (13)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{z}}(k+1) = \tilde{U}\tilde{\mathbf{z}}(k) \quad (14)$$

其中

易知 U 、 \tilde{U} 、 \hat{U} 具有相同特征值。从而可以把式 (14) 系统写为

$$\hat{z}(k+1) = \hat{U}\hat{z}(k) \quad (15)$$

式中: $\hat{z}(k) \triangleq [\hat{x}_n^T(k), \hat{y}_m^T(k)]^T$; $\hat{x}_n(k) \triangleq [\hat{x}_n^T(k), \hat{x}_f^T(k)]^T = [\mathbf{x}_m^T(k), -\mathbf{x}_f^T(k)]^T$; $\hat{y}_m(k) = \mathbf{y}_m^T(k)$ 。

可将矩阵 \hat{U} 写作 $\hat{U} = I_{n+m} - \alpha TV$, 其中

$$V = \begin{bmatrix} I_m & 0 & -I_m \\ -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_4 + \Lambda_3 + \Lambda_4 & 0 \\ -\tilde{A}_1 & -\tilde{A}_2 & \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

显然地, V 的行和为 0, 对角线元素全非负, 非对角线元素非正。 V 可以看成是具有 $n+m$ 个节点的图 \tilde{G} 所对应的矩阵, 其中 G 与 \tilde{G} 之间的关系与之前 G 与 G' 之间的关系相同。由引理 2, 当图 G 包含一棵有向生成树时, 图 \tilde{G} 也包含一棵有向生成树。从而 V 有简单零特征值且其余非零特征值均具有正实部。令 $\varphi_{r1} = (I_m^T, I_{n-m}^T, I_m^T)^T$ 为其对应的右特征向量, 其中 I_m 表示所有元素均为 1 的 m 维列向量。

类似于引理 3, 通过针对式 (13) 系统的规范变换, 容易得出下面的引理。

引理 5 式 (3) 系统在式 (5) 协议作用下渐近实现二分一致性, 当且仅当式 (15) 系统能够渐近实现一致性。

引理 6 假定假设 1 成立且图 G 包含一棵有向生成树。矩阵 \hat{U} 有简单特征值 1 且其余特征值均在复平面上以原点为圆心的单位圆内, 当且仅当 αT 满足 $0 < \alpha T < \min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2)$, 其中 λ_i 为矩阵 V 的非零特征值。

证明 充分性: 由于 λ_i 为矩阵 V 的特征值, 易见 $\mu_i = 1 - \alpha T \lambda_i$ 是矩阵 \hat{U} 的特征值。由于 V 有简单零特征值, 不妨令 $\lambda_1 = 0$, 从而 \hat{U} 有简单的特征值 1。由于 $\hat{U}\varphi_{r1} = (I_{n+m} - \alpha TV)\varphi_{r1} = \varphi_{r1} - \alpha TV\varphi_{r1} = \varphi_{r1}$, 故 φ_{r1} 是矩阵 \hat{U} 对应于特征值 1 的右特征向量。不妨令 $\mu_1 = 1$, 此外 $\mu_i = (1 - \alpha T \text{Re}(\lambda_i)) - \alpha T \text{Im}(\lambda_i)i$, $i = 2, 3, \dots, n+m$, 其中 i 是虚数单位。故 $|\mu_i|^2 = (1 - \alpha T \text{Re}(\lambda_i))^2 + (-\alpha T \text{Im}(\lambda_i))^2 = \alpha T (|\lambda_i|^2 \alpha T - 2\text{Re}(\lambda_i)) + 1$ 。由于 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, 当 $0 < \alpha T < \min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2)$ 时, 对 $\forall \mu_i \neq 1$ 均有 $|\mu_i|^2 < 1$, 即 $|\mu_i| < 1$ 。因此, 矩阵 \hat{U} 的其余特征值均在复平面上以原点为圆心的单位圆内。

必要性: 记 μ_i 为矩阵 \hat{U} 的特征值且 $\mu_i = 1 - \alpha T \lambda_i$, $1 \leq i \leq n+m$, 其中 λ_i 为矩阵 V 的特征值。因为矩阵 \hat{U} 有简单特征值 1, 不妨令 $\mu_1 = 1$, 则有 $\lambda_1 = 0$ 即矩阵 V 有简单零特征值。又因为矩阵 \hat{U} 其余

特征值均在复平面上以原点为圆心的单位圆内即 $|\mu_i| < 1$, 从而有 $|\mu_i|^2 = (1 - \alpha T \text{Re}(\lambda_i))^2 + (-\alpha T \text{Im}(\lambda_i))^2 = 1 - 2\alpha T \text{Re}(\lambda_i) + (\alpha T)^2 ((\text{Re}(\lambda_i))^2 + (\text{Im}(\lambda_i))^2) = 1 - 2\alpha T \text{Re}(\lambda_i) + (\alpha T)^2 |\lambda_i|^2 < 1$, 从而有 $0 < \alpha T < \min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2)$ 。

定理 2 假定假设 1 成立且图 G 包含一棵有向生成树。式 (3) 系统在式 (5) 协议作用下渐近实现二分一致性当且仅当 αT 满足 $0 < \alpha T < \min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2)$, 其中 λ_i 为矩阵 V 的非零特征值。

证明 根据引理 6, 定理 2 等价于: 式 (3) 系统在式 (5) 协议作用下渐近实现二分一致性当且仅当矩阵 \hat{U} 有简单特征值 1 且其余特征值均在复平面上以原点为圆心的单位圆内。

由于假设 1 成立且图 G 包含一棵有向生成树, 由引理 2 知, 图 \tilde{G} 也包含一棵有向生成树, 从而 \tilde{G} 对应的 Laplacian 矩阵 V 有简单零特征值。由引理 6 的证明可知, 矩阵 V 有简单零特征值等价于矩阵 \hat{U} 有简单特征值 1。因此令 J 为矩阵 \hat{U} 的 Jordan 标准型, 则必存在可逆的矩阵 $P \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ 使得 $\hat{U} = PJP^{-1}$, 其中 $J = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n+m-1}^T \\ \mathbf{0}_{n+m-1} & \tilde{J} \end{bmatrix}$, \tilde{J} 为矩阵 \hat{U} 的非 1 特征值对应的 Jordan 块, $\mathbf{0}_{n+m-1}$ 表示所有元素均为 0 的 $n+m-1$ 维列向量。不失一般性, 记

$$P = [\varphi_{r1}, \varphi_{r2}, \dots, \varphi_{r(n+m)}] \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

$$P^{-1} = [\varphi_{l1}^T, \varphi_{l2}^T, \dots, \varphi_{l(n+m)}^T]^T \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

式中: $\varphi_{ri} \in \mathbf{R}^{(n+m)}$, $i = 1, 2, \dots, n+m$, 为矩阵 \hat{U} 的右特征向量以及广义右特征向量; $\varphi_{li} \in \mathbf{R}^{(n+m)}$, $i = 1, 2, \dots, n+m$ 为矩阵 \hat{U} 的左特征向量以及广义左特征向量。

充分性: 因为矩阵 \hat{U} 的非 1 特征值都在复平面的单位圆内, 且

$$\hat{z}(k) = \hat{U}\hat{z}(k-1) = \hat{U}^2\hat{z}(k-2) = \dots = \hat{U}^k\hat{z}(0)$$

则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{z}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \hat{x}_n(k) \\ \hat{y}_m(k) \end{bmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{U}^k \hat{z}(0) = \begin{bmatrix} I_n \varphi_{l1}^T \hat{z}(0) \\ I_m \varphi_{l1}^T \hat{z}(0) \end{bmatrix}$$

其中 $\hat{z}(0) = [\hat{x}_n^T(0), \hat{y}_m^T(0)]^T$ 为式 (15) 系统的初始值。因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_m(k) = \alpha (\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_m(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_m(k)) = \mathbf{0}_m$ 。式 (15) 系统满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(k) - \hat{x}_j(k)| = 0, i, j \in I, \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{y}_i(k)| = 0, i \in I_1$, 也即渐近实现了一致性。再由引理 5 可知, 式 (3) 系统在式 (5) 协议作用下渐近实现了二分一致性。

必要性: 由引理 5, 式 (3) 系统渐近实现二分一致性等价于式 (15) 系统渐近实现一致性,

即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_j(k), i \in I_1, j \in I_2$, 从而易得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{U}^k$ 的秩等于 1。假设必要性不成立, 即矩阵 \hat{U} 除简单特征值 1 外至少有一个特征值不在复平面上以原点为圆心的单位圆内。此时 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{U}^k$ 的秩是大于 1 的, 这与前述 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{U}^k$ 的秩等于 1 矛盾。故结论成立。

4 数值模拟

考虑由 6 个智能体组成的异质多智能体系统。其拓扑结构如图 1 所示, 容易看出此有向图是包含有向生成树且结构平衡的, 具体有 $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$, 其中 V_1 是由二阶智能体组成的节点集, V_2 是由一阶智能体组成的节点集。为简单起见, 若 $a_{ij} \neq 0$, 取 $|a_{ij}| = 1$ 。针对连续系统情形, 选取 6 个智能体的初始位置状态为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, x_4(0) = -1, x_5(0) = -2, x_6(0) = -3$, 二阶智能体的初始速度状态为 $v_1(0) = 1, v_2(0) = -1.5, v_3(0) = 2$, 控制增益为 $\alpha = 1$ 。从图 2 和图 3 可看出, 在式 (2) 协议的作用下, 式 (1) 系统渐近实现了二分一致性。针对离散系统情形, 可求得 V 的特征值为 $0, 1, 2, 2.3017, 0.6983, 2.2271 \pm 0.9874i, 0.7729 \pm 0.9874i$ 。从而可得 $\min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2) = 0.7505$ 。

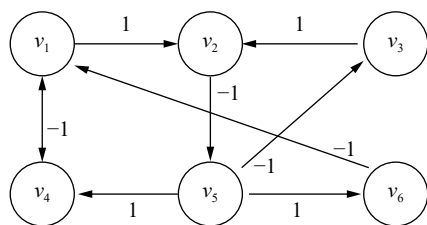


图 1 有向拓扑图-包含一棵有向生成树

Fig. 1 Directed topology which contains a directed spanning tree

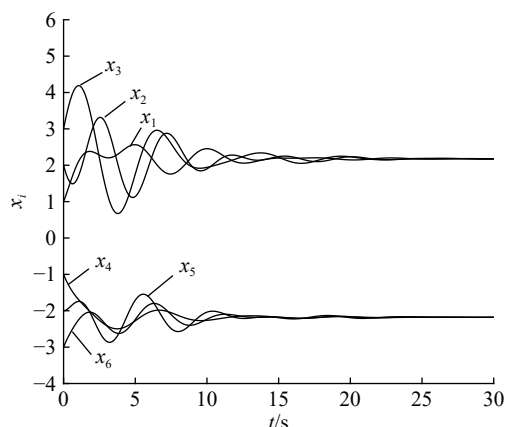


图 2 系统 (1) 中每个智能体的位置

Fig. 2 Position of each agent of system (1)

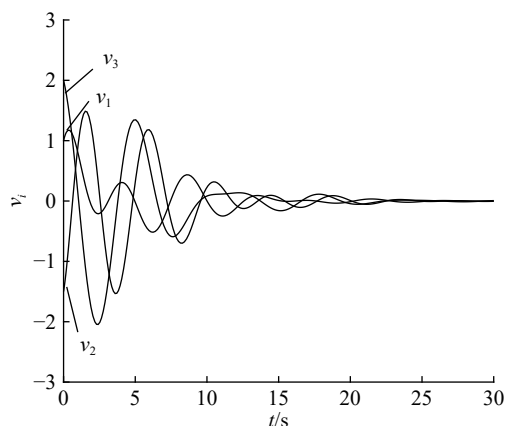


图 3 系统 (1) 分组 V_1 中每个智能体的速度

Fig. 3 Velocity of each agent in V_1 of system (1)

选取 6 个智能体的初始位置状态, 初始速度状态和控制增益同前, 设 $T = 0.2s$, 则 $\alpha T = 0.2 < \min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2)$, 从图 4 和图 5 可以看出, 在式 (5) 协议的作用下, 式 (3) 系统渐近实现了二分一致性。当 $T = 0.756$, 也即 $\alpha T = 0.756 > \min_{2 \leq \lambda_i \leq n+m} (2\text{Re}(\lambda_i)/|\lambda_i|^2)$ 时, 从图 6 和图 7 可以看出式 (3) 系统不能实现二分一致性。

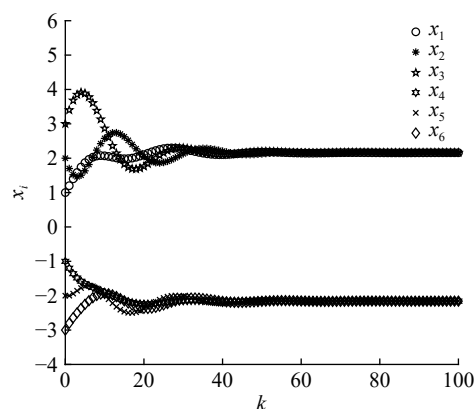


图 4 系统 (3) 中每个智能体的位置 ($\alpha T = 0.2$)

Fig. 4 Position of each agent of system (3) ($\alpha T = 0.2$)

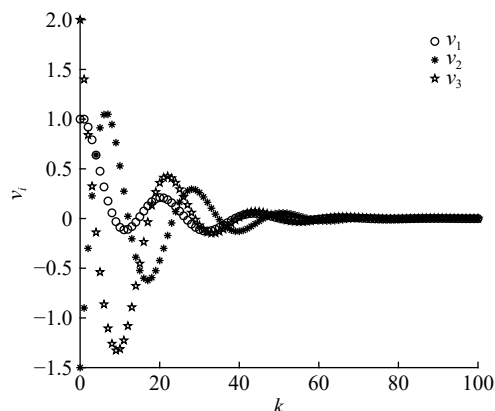
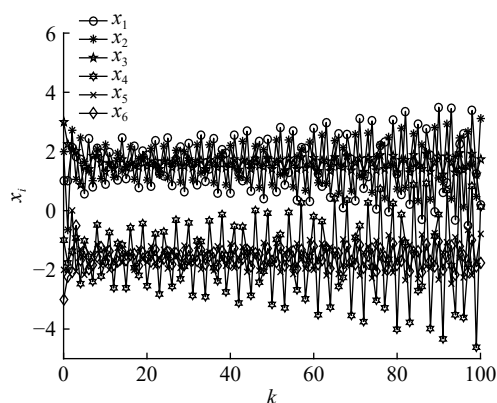
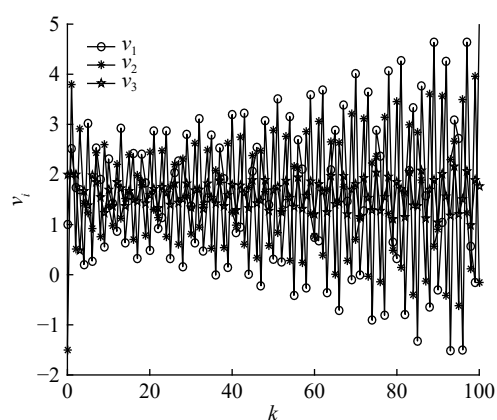


图 5 系统 (3) 分组 V_1 中每个智能体的速度 ($\alpha T = 0.2$)

Fig. 5 Velocities of each agent in V_1 of system (3) ($\alpha T = 0.2$)

图6 系统(3)中每个智能体的位置 ($\alpha T = 0.756$)Fig. 6 Position of each agent of system (3) ($\alpha T = 0.756$)图7 系统(3)分组 V_1 中每个智能体的速度 ($\alpha T = 0.756$)Fig. 7 Velocity of each agent in V_1 of system (3) ($\alpha T = 0.756$)

5 结束语

本文研究了由一阶和二阶智能体混合而成的异质多智能体系统的二分一致性问题。研究的系统具有包含有向生成树和结构平衡的拓扑结构。在设计二分一致性协议中利用了特殊变量 $y_i = x_i + \frac{1}{\alpha}v_i$, 从而取消了已有结果中对控制增益 α 的要求。利用规范变换的方法, 通过一个合适的象限顺序的改变实现了从具有敌对关系的系统到具有非负连接权重系统的转化。对于连续系统, 通过证明等价系统能够实现渐近一致性当且仅当有向图包含一棵有向生成树给出了本文系统能实现二分一致性的充要条件。对于离散系统, 运用矩阵理论通过对等价系统的系数矩阵特征值的分析得到系统达到二分一致性的充要条件。最后通过数值模拟验证了结果的正确性。后续我们将对切换异质多智能体系统和具有通讯时滞的异质多智能体系统的二分一致性进行研究。

参考文献:

- [1] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE transactions on automatic control*, 2004, 49(9): 1520–1533.
- [2] REN Wei, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE transactions on automatic control*, 2005, 50(5): 655–661.
- [3] REN Wei, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. *International journal of robust and nonlinear control*, 2007, 17(10/11): 1002–1033.
- [4] XIE Guangming, WANG Long. Consensus control for a class of networks of dynamic agents[J]. *International journal of robust and nonlinear control*, 2007, 17(10/11): 941–959.
- [5] LIU Kaien, XIE Guangming, REN Wei, et al. Consensus for multi-agent systems with inherent nonlinear dynamics under directed topologies[J]. *Systems & control letters*, 2013, 62(2): 152–162.
- [6] LIU Kaien, JI Zhijian, REN Wei. Necessary and sufficient conditions for consensus of second-order multiagent systems under directed topologies without global gain dependency[J]. *IEEE transactions on cybernetics*, 2017, 47(8): 2089–2098.
- [7] LIU Kaien, JI Zhijian. Consensus of multi-agent systems with time delay based on periodic sample and event hybrid control[J]. *Neurocomputing*, 2017, 270: 11–17.
- [8] 夏倩倩, 刘开恩, 纪志坚. 基于二阶邻居事件触发多智能体系统的一致性[J]. *智能系统学报*, 2017, 12(6): 833–840.
- XIA Qianqian, LIU Kaien, JI Zhijian. Event-triggered consensus of multi-agent systems based on second-order neighbors[J]. *CAAI transactions on intelligent systems*, 2017, 12(6): 833–840.
- [9] GAO Yanping, LIU Bo, YU Junyan, et al. Consensus of first-order multi-agent systems with intermittent interaction[J]. *Neurocomputing*, 2014, 129: 273–278.
- [10] YU Junyan, WANG Long. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays[J]. *Systems & control letters*, 2010, 59(6): 340–348.
- [11] YU Junyan, WANG Long. Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange[J]. *In-*

- ternational journal of systems science, 2012, 43(2): 334–348.
- [12] HAN Guangsong, HE Dingxin, GUAN Zhihong, et al. Multi-consensus of multi-agent systems with various intelligences using switched impulsive protocols[J]. *Information sciences*, 2016, 349-350: 188–198.
- [13] ALTAFINI C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE transactions on automatic control*, 2013, 58(4): 935–946.
- [14] 杜明骏, 孟德元. 具有正负混合连接权重及通讯时滞的多智能体系统一致性 [C]//第 33 届中国控制会议论文集. 南京, 2014: 1075–1088.
- DU Mingjun, MENG Deyuan. Consensus of multi-agent systems with antagonistic interactions and communication delays[C]//Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, 2014: 1075–1088.
- [15] 张晓丹, 刘开恩, 纪志坚. 具有时变时滞多智能体系统二分一致性 [J]. 系统科学与数学, 2018, 38(8): 841–851.
- ZHANG Xiaodan, LIU Kaien, JI Zhijian. Bipartite consensus of multi-agent systems with time-varying delays[J]. *Journal of systems science and mathematical sciences*, 2018, 38(8): 841–851.
- [16] VALCHER M E, MISRA P. On the consensus and bipartite consensus in high-order multi-agent dynamical systems with antagonistic interactions[J]. *Systems & control letters*, 2014, 66: 94–103.
- [17] 刘聪, 周强, 胡晓光. 离散时间异质多智能体系统的一致性控制 [J]. 工程科学学报, 2016, 38(1): 143–148.
- LIU Cong, ZHOU Qiang, HU Xiaoguang. Consensus control of discrete-time heterogeneous multi-agent systems[J]. *Chinese journal of engineering*, 2016, 38(1): 143–148.
- [18] LIU Kaien, JI Zhijian, XIE Guangming, et al. Consensus for heterogeneous multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *Journal of the franklin institute*, 2015, 352(9): 3670–3683.
- [19] 修言彬, 刘聪, 刘亚斌. 离散异质多智能体系统的分组一致性控制 [J]. 计算机测量与控制, 2015, 23(12): 4034–4037.
- XIU Yanbin, LIU Cong, LIU Yabin. Group consensus control of discrete heterogeneous multi-agent system[J]. *Computer measurement & control*, 2015, 23(12): 4034–4037.

作者简介:



王晓宇, 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体系统协作控制。



刘开恩, 副教授, 博士, 主要研究方向为多智能体系统分析与控制。主持山东省自然科学基金项目、中国博士后科学基金面上项目和青岛市博士后应用研究项目各 1 项。发表学术论文 20 余篇。



纪志坚, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为群体系统动力学与协调控制、复杂网络、切换动力系统的分析与控制、系统生物以及基于网络的控制系统。主持国家自然科学基金项目 3 项。发表学术论文 80 余篇。