

DOI: 10.11992/tis.201709045

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20180418.0936.004.html>

# 一类分数阶神经网络的自适应 $H_\infty$ 同步

袁晓琳, 莫立坡

(北京工商大学理学院, 北京 100048)

**摘要:** 针对一类不确定分数阶神经网络系统, 研究了其自适应  $H_\infty$  同步问题和参数辨识问题。提出了一个新的可以使闭环系统实现  $H_\infty$  同步的自适应控制协议, 利用鲁棒控制的方法和 Gronwall-Bellman 不等式证明了驱动系统和响应系统在该协议下可以实现同步, 同时满足  $H_\infty$  性能。通过仿真实验, 验证了所设计控制协议的有效性, 并且说明了利用该控制协议可以对未知参数进行辨识。

**关键词:** 分数阶; 神经网络; 自适应;  $H_\infty$ ; 同步; 未知参数; 辨识; 控制器

**中图分类号:** TP18; O193   **文献标志码:** A   **文章编号:** 1673-4785(2019)02-0239-07

中文引用格式: 袁晓琳, 莫立坡. 一类分数阶神经网络的自适应  $H_\infty$  同步[J]. 智能系统学报, 2019, 14(2): 239-245.

英文引用格式: YUAN Xiaolin, MO Lipo. Adaptive  $H_\infty$  synchronization of a class of fractional-order neural networks[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(2): 239-245.

## Adaptive $H_\infty$ synchronization of a class of fractional-order neural networks

YUAN Xiaolin, MO Lipo

(School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

**Abstract:** This study aims to address the adaptive  $H_\infty$  synchronization problem and parameter identification problem of a class of uncertain fractional order neural networks. First, an adaptive control law is proposed to make the closed-loop system achieve  $H_\infty$  synchronization. Second, by using the robust control method and Gronwall-Bellman inequality, it is shown that the drive system and the response system can achieve synchronization under the proposed control law while satisfying the  $H_\infty$  performance. Finally, by numerical simulations, the effectiveness of the control law is verified, illustrating that the unknown parameters can also be identified using the proposed control law.

**Keywords:** fractional-order; neural networks; adaptive;  $H_\infty$ ; synchronization; unknown parameters; identification; controller

由于分数阶算子具有许多良好的性质, 如记忆性和遗传性, 近年来这一领域吸引了众多学者的研究。如: Zhang 等<sup>[1]</sup>为分数阶系统提出了许多简化的 LMI 稳定性条件, Li 等<sup>[2]</sup>研究了分数阶非线性动态系统的 Mittag-Leffler 稳定性等。

人工神经网络的概念由 McCulloch 等首次提出<sup>[3]</sup>。随后 Hopfield 提出了一个新的名为 Hopfield 神经网络的循环神经网络<sup>[4]</sup>, 这为解决优化问题和数值计算问题做了很大的贡献。目前, 神经网络被广泛应用于许多的领域, 例如, 模型预测<sup>[5]</sup>、自动化控制<sup>[6]</sup>以及优化<sup>[7]</sup>。但大部分结果都

假设系统的动态模型是整数阶的。然而, 在很多实际应用中, 分数阶微分方程能够更好的描述实际系统。目前, 有许多关于分数阶神经网络同步问题的研究结果, 如自适应同步<sup>[8]</sup>、全局同步<sup>[9-10]</sup>、有限时间同步<sup>[11-12]</sup>、 $\alpha$ 同步<sup>[13]</sup>等。此外, 当系统中存在未知参数时, 文献<sup>[14]</sup>研究了此类分数阶神经网络的自适应同步问题。事实上, 除系统参数外, 系统的输入也可能是未知的, 并且系统不可避免地受外部干扰。然而, 据我们所知, 目前很少有关于这方面的研究结果。

受文献<sup>[15-16]</sup>的启发, 本文用  $H_\infty$  控制的方法来研究了一类分数阶神经网络的  $H_\infty$  同步问题。提出了一个使闭环系统实现自适应同步和自适应  $H_\infty$  同步的自适应控制协议。并且通过利用鲁棒控制方法和 Gronwall-Bellman 不等式完成了闭环

收稿日期: 2017-10-09. 网络出版日期: 2018-04-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61772063); 北京市自然科学基金项目 (Z180005); 北京市教委一般项目 (KM201910011007).

通信作者: 莫立坡. E-mail: [beihangmlp@126.com](mailto:beihangmlp@126.com).

系统的收敛性分析及 $H_\infty$ 性能分析。与文献[17]相比,它所考虑的是无外界干扰的整数阶神经网络模型,而我们在这篇论文中考虑了分数阶的动态模型,同时考虑了未知外部干扰的影响。与文献[14]相比较,它模型中的外部输入是已知的,而在此篇论文中考虑了未知的外部输入。众所周知, $H_\infty$ 性能主要是用于刻画系统的输入输出间关系的一种性能指标,文献[14]并没有研究系统的 $H_\infty$ 性能,在本文中我们做了相应的研究。

## 1 分数阶算子的基础理论知识

本部分主要介绍分数阶算子的定义和相关引理,这对于我们以后的分析是非常重要的。

**定义 1<sup>[18]</sup>** 函数 $f$ 的 Riemann-Liouville 型 $\alpha$ 阶分数阶积分定义为

$$I_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

式中: $t \geq t_0; 0 < \alpha < 1; \Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。

**定义 2<sup>[18]</sup>** 函数 $f \in C^n([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ 的 Caputo 型 $\alpha$ 阶分数阶微分定义为

$${}_t D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

式中: $t \geq t_0; n$ 是一个正整数使得 $n-1 < \alpha < n$ 。

特别地,当 $0 < \alpha < 1$ 时,

$${}_t D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

**引理 1<sup>[19]</sup>** 设函数 $g(t)$ 在 $t \in [t_0, b]$ 上是连续可微的,则对任意的常数及 $t \in [t_0, b]$ 有

$${}_t D_t^\alpha (g(t) - h)^2 \leq 2(g(t) - h) {}_t D_t^\alpha g(t)$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 。

**引理 2<sup>[20]</sup>** 令 $n = [\alpha] + 1$ , 当 $\alpha \notin \mathbb{N}$ 时, 或令 $n = \alpha$ 当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时。如果 $y(t) \in C^n[t_0, b]$ , 则

$${}_t I_{t_0}^\alpha {}_t D_t^\alpha y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k$$

特别地, 当 $0 < \alpha < 1$ 及 $y(t) \in C^1[t_0, b]$ 时, 有 ${}_t I_{t_0}^\alpha {}_t D_t^\alpha y(t) = y(t) - y(t_0)$ 。

**引理 3<sup>[14]</sup>** 假设 $x(t), y(t) \in C^1[t_0, b]$ , 如果对 $\forall t \in [t_0, b]$ 有 $x(t) \leq y(t)$ , 则 ${}_t I_{t_0}^\alpha x(t) \leq {}_t I_{t_0}^\alpha y(t)$ 。

**引理 4<sup>[21]</sup> (Gronwall-Bellman 不等式)** 若存在 $x(t)$ 满足 $x(t) \leq \int_0^t a(\tau)x(\tau)d\tau + b(t)$ , 其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是两个已知的实函数, 则

$$x(t) \leq \int_0^t a(\tau)b(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau + b(t)$$

如果 $b(t)$ 是可微的, 从而

$$x(t) \leq b(0)\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right) + \int_0^t \dot{b}(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau$$

如果 $b(t)$ 是一个常数, 从而

$$x(t) \leq b(0)\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)$$

**引理 5<sup>[22-23]</sup>** Riemann-Liouville 型分数阶非线性微分方程 $D^\alpha x_i(t) = f_i(x(t)), i = 1, 2, \dots, N$ , 可以被表示成

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i(w, t)}{\partial t} &= -w z_i(w, t) + f_i(x_i(t)) \\ x_i(t) &= \int_0^\infty \mu(w) z_i(w, t) dw \end{aligned}$$

式中: $x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t) \ \dots \ x_N^T(t)]^T$ 是系统状态;  $z_i(w, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ 是拟状态变量;  $\mu(w) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} w^{-\alpha}$ 是脉冲响应的拟拉普拉斯变换。

## 2 研究问题的系统模型描述

考虑如下分数阶神经网络作为驱动系统

$$D^\alpha x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中: $0 < \alpha < 1; i = 1, 2, \dots, n, n$ 表示神经元的个数;  $x_i(t) \in \mathbb{R}$ 是第 $i$ 个神经元在 $t$ 时刻的状态;  $c_i$ 是一个正的常数, 表示第 $i$ 个神经元在无任何连接情况下恢复到静息状态的速率;  $a_{ij}$ 表示第 $j$ 个神经元与第 $i$ 个神经元之间的连接权重, 并且满足 $|a_{ij}| \leq \mu$ , 其中 $\mu$ 是一个正常数;  $I_i$ 表示是外部输入, 它是不可以被获得的;  $f_j(\cdot)$ 是第 $j$ 个神经元的激励函数, 它满足全局的李普希兹条件, 即存在 $L_j > 0$ 使得

$$|f_j(u) - f_j(v)| \leq L_j |u - v| \quad (2)$$

式中: $u, v \in \mathbb{R}; j = 1, 2, \dots, n$ 。

考虑如下响应系统:

$$D^\alpha y_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) + u_i(t) + w_i(t) \quad (3)$$

式中: $y_i(t) \in \mathbb{R}$ 是响应状态;  $\hat{a}_{ij}(t)$ 表示 $a_{ij}(t)$ 的参数估计值;  $u_i(t)$ 是控制输入,  $w_i(t)$ 是未知的外部干扰, 它们属于:

$$D = \left\{ w(t) = [w_1^T(t) \ w_2^T(t) \ \dots \ w_N^T(t)]^T \left| \int_0^\infty \sum_{i=1}^N w_i^T(t) w_i(t) dt \leq \beta^2 \right. \right\}$$

其中 $\beta > 0$ 是一个正常数。

**定义 3<sup>[18]</sup>** 称驱动系统(式(1))与响应系统(式(3))是全局渐近同步的, 如果存在控制器 $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - x_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## 3 一致性收敛分析

### 3.1 自适应同步

考虑闭环系统的零输入响应, 即研究当外部

干扰不存在时系统式(1)和式(3)的同步问题。为此,设计如下自适应控制律:

$$u_i(t) = -d_i(t)e_i(t) + \hat{I}_i(t) \quad (4)$$

$$D^\alpha d_i(t) = k_i e_i(t)^2 \quad (5)$$

$$D^\alpha \hat{I}_i(t) = -r_i e_i(t) \quad (6)$$

$$D^\alpha \hat{a}_{ij}(t) = -l_{ij} f_j(y_j(t)) e_i(t) \quad (7)$$

式中:  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  定义为状态误差;  $\hat{I}_i(t) \in \mathbb{R}$  定义为未知外部输入的估计值;  $d_i(t) \in \mathbb{R}$  是时变的控制强度;  $k_i$ 、 $r_i$  和  $l_{ij}$  是正常数, 它们的取值待定。

利用自适应控制律式(4)~(7), 动态误差闭环系统可以写成如下形式:

$$D^\alpha e_i(t) = -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \tilde{I}_i(t) - d_i(t) e_i(t) \quad (8)$$

式中:  $\tilde{I}_i(t) = \hat{I}_i(t) - I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

**注1** 我们通常所说的控制律(控制协议)是指一系列信息传输规则, 当驱动系统采取该控制律时, 可以与响应系统实现同步。与传统的控制律形成对比, 本文设计了新的自适应控制律(4)~(7), 且控制律中  $d_i(t)$ 、 $\hat{I}_i(t)$ 、 $\hat{a}_{ij}(t)$  的动态方程是分数阶的, 因而更具有一般性。除此之外, 利用该控制律还可以对未知参数  $\hat{a}_{ij}(t)$  进行估计。

**定理1** 对任给的正常数  $k_i, r_i, l_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ 。如果外部干扰不存在, 即  $w_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 那么利用自适应控制律(4)和参数估计器(5)~(7), 驱动系统(1)和响应系统(3)可以实现全局渐近同步。

**证明** 定义如下类似李雅普诺夫函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i(t)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2k_i} (d_i(t) - d_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} \tilde{I}_i(t)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2l_{ij}} \tilde{a}_{ij}(t)^2 \quad (9)$$

式中  $\tilde{a}_{ij}(t) = \hat{a}_{ij}(t) - a_{ij}$ 。

注意到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) = \\ & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(y_j(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) \leq \\ & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} L_j e_j(t), \end{aligned}$$

其中  $\mu = \sup(a_{ij}), \varepsilon_i > 0$  是一个正常数。

利用引理1, 计算系统(9)的  $V(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 型导数, 有

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} D^\alpha e_i(t)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2k_i} D^\alpha (d_i(t) - d_i)^2 + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} D^\alpha \tilde{I}_i(t)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2l_{ij}} D^\alpha \tilde{a}_{ij}(t)^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^n e_i(t) D^\alpha e_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} (d_i(t) - d_i) D^\alpha d_i(t) + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{I}_i(t) D^\alpha \tilde{I}_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{l_{ij}} \tilde{a}_{ij}(t) D^\alpha \tilde{a}_{ij}(t) = \\ & \sum_{i=1}^n e_i(t) \left[ -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) \right] - \\ & \sum_{i=1}^n e_i(t) \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \tilde{I}_i(t) - d_i(t) e_i(t) \right] + \\ & \sum_{i=1}^n (d_i(t) - d_i) e_i(t)^2 + \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i(t) D^\alpha [-e_i(t)] + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [-\tilde{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) e_i(t)] \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left\{ -c_i e_i^2(t) + e_i(t) \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} f_j(y_j(t)) + \right. \\ & \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^n \mu^2 L_j^2 e_j(t)^2 + \varepsilon_i e_i(t)^2 + \tilde{I}_i(t) e_i(t) - \\ & d_i(t) e_i(t)^2 + (d_i(t) - d_i) e_i(t)^2 - \\ & \left. \tilde{I}_i(t) e_i(t) - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) e_i(t) \right\} = - \\ & \sum_{i=1}^n q_i e_i(t)^2 \leq -\underline{q} \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 \end{aligned}$$

式中:  $q_i = d_i + c_i - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_i} L_j^2 \mu^2 - \varepsilon_i > 0; \underline{q} = \min\{q_i\} > 0$ 。

事实上, 我们可以通过取足够大的  $d_i$  来保证  $q_i > 0$ ,

所以  $D^\alpha V(t) \leq -\underline{q} \sum_{i=1}^n e_i(t)^2$ 。

由引理2和3可得

$$V(t) - V(0) \leq -\frac{2\underline{q}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} U(\tau) d\tau$$

其中  $U(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i(t)^2$ 。从  $V(t)$  的定义中很容易看出  $U(t) \leq V(t)$ , 从而

$$U(t) \leq V(t) \leq V(0) - \frac{2\underline{q}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} U(\tau) d\tau$$

利用引理4, 可以得到

$$\begin{aligned} U(t) &\leq V(0) \exp\left(-\frac{2\underline{q}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau\right) = \\ & V(0) \exp\left(-\frac{2\underline{q}}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha\right) \end{aligned}$$

所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} 2U(t) = 0$ 。

综上, 利用控制律(4)~(7), 响应系统与驱动系统可以实现自适应同步。

**注2** 在定理1中, 我们只能保证驱动系统和响应系统可以实现同步。为了对所有的未知参

数进行辨识,需要对激励函数 $f_j(\cdot)$ 添加额外的条件。基于误差系统(8),当两个系统实现同步时,误差系统可以被重写为如下形式:

$$D^\alpha e_i(t) = \sum_{j=1}^n (\hat{a}_{ij}(t) - a_{ij}) f_j(x_j(t)) = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

根据函数线性无关的条件,当 $f_j(x_j(t))$ 线性无关时可以对未知参数进行辨识。

**注3** 与其他相关文献中设计的控制协议相比,如文献[14],我们所考虑的是带有未知参数和未知外部输入的系统。因此,文献[14]中所考虑的模型是本文的特例。

### 3.2 自适应 $H_\infty$ 同步

利用 $H_\infty$ 性能指标来研究外部干扰对系统同步的影响。

**定理2** 考虑驱动系统(式(1))和响应系统(式(3))。利用控制律式(4)和估计器即式(5)~(7),则对于给定 $\gamma > 0$ ,误差系统(8)可以满足 $H_\infty$ 性能,即在零初始条件下可以满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 。

**证明** 由于在零初始条件下, Caputo型导数与Riemann-Liouville型导数等价,利用引理5,误差系统(8)和估计(5)~(7)可以用以下分布表示:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_i(w, t)}{\partial t} = -w z_i(w, t) - c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(t) f_j(y_j(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \tilde{I}_i(t) - d_i(t) e_i(t) + w_i(t) \\ e_i(t) = \int_0^\infty \mu(w) z_i(w, t) dw \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial D_i(w, t)}{\partial t} = -w D_i(w, t) + k_i e_i(t)^2 \\ \tilde{d}_i(t) = \int_0^\infty \mu(w) D_i(w, t) dw \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{ij}(w, t)}{\partial t} = -w A_{ij}(w, t) - l_{ij} f_j(y_j(t)) e_i(t) \\ \tilde{a}_{ij}(t) = \int_0^\infty \mu(w) A_{ij}(w, t) dw \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_i(w, t)}{\partial t} = -w B_i(w, t) - r_i e_i(t) \\ \tilde{I}_i(t) = \int_0^\infty \mu(w) B_i(w, t) dw \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\tilde{d}_i(t) = d_i(t) - d_i$ ;  $z_i, A_{ij}, B_i, D_i$ 均是无限维的分布式状态变量;  $\mu(w)$ 在引理5中被定义。定义如下类似李雅普诺夫函数:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \mu(w) z_i(w, t)^2 dw + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2l_{ij}} \int_0^\infty \mu(w) A_{ij}(w, t)^2 dw + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} \int_0^\infty \mu(w) B_i(w, t)^2 dw + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2k_i} \int_0^\infty \mu(w) D_i(w, t)^2 dw \end{aligned}$$

从而 $V(t)$ 的导函数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \mu(w) z_i(w, t) \frac{\partial z_i}{\partial t} dw + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{l_{ij}} \int_0^\infty \mu(w) A_{ij}(w, t) \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} dw + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \int_0^\infty \mu(w) B_i(w, t) \frac{\partial B_i}{\partial t} dw + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \int_0^\infty \mu(w) D_i(w, t) \frac{\partial D_i}{\partial t} dw \end{aligned}$$

利用不等式 $ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$ ,由方程(10)~(13)不难得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left( d_i + c_i - \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_j} \right) L_i^2 \mu^2 - \varepsilon_i \right) e_i(t)^2 \right\} + \\ & \sum_{i=1}^n \{ e_i(t) w_i(t) \} \leq \\ & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left( d_i + c_i - \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_j} \right) L_i^2 \mu^2 - \varepsilon_i - \frac{1}{\gamma} \right) e_i(t)^2 \right\} + \\ & \sum_{i=1}^n \{ \gamma w_i(t)^2 \} \\ \dot{V}(t) + \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 - \gamma \sum_{i=1}^n w_i(t)^2 \leq & \end{aligned}$$

可以通过取足够大的 $d_i$ 值得使得

$$d_i + c_i - \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_j} \right) L_i^2 \mu^2 - \varepsilon_i - \frac{1}{\gamma} - 1 > 0$$

从而有 $\int_0^\infty \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 dt < \int_0^\infty \gamma \sum_{i=1}^n w_i(t)^2 dt$ ,即在满足 $H_\infty$ 性能下,闭环系统可以实现同步。

**注4** 目前,关于 $H_\infty$ 控制问题的研究主要集中在整数阶系统,比如文献[15-16]。本文通过利用分数阶微分方程的分布式表达形式将这些结果推广到了不确定分数阶神经网络系统,提出了一个可以使闭环系统实现 $H_\infty$ 同步的自适应协议。

## 4 仿真实验

通过给出的仿真实例来验证我们所提出的控制器在实现自适应同步和 $H_\infty$ 同步方面是有效的。此外,我们讨论了相关的参数辨识问题。

**例:** 对于驱动系统(式(1)),响应系统(式(3))以及控制协议即式(4)~(7),令

$$\begin{aligned} \alpha = 0.98, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 1, \\ \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T, \mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T, \\ f_j(x_j(t)) = \tanh(x_j(t)), f_j(y_j(t)) = \tanh(y_j(t)), \\ i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

以及

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1.2 & 0 \\ 1.8 & 1.71 & 1.15 \\ -4.75 & 0 & 1.1 \end{bmatrix}$$

选取初始条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(0) &= [0.3 \ -0.4 \ 0.9]^T, \mathbf{y}^T(0) = [2.8 \ -0.4 \ 4.6]^T, \hat{a}_{11}(0) = 1, \\ \hat{a}_{12}(0) &= 1, \hat{a}_{13}(0) = 1, \hat{a}_{21}(0) = 1, \hat{a}_{22}(0) = 1, \hat{a}_{23}(0) = 1, \\ \hat{a}_{31}(0) &= 1, \hat{a}_{32}(0) = 1, \hat{a}_{33}(0) = 1, \hat{l}_1(0) = 1, \hat{l}_2(0) = 1, \hat{l}_3(0) = 1, \\ d_1(0) &= 1, d_2(0) = 1, d_3(0) = 1, k_1 = k_2 = k_3 = 5, r_1 = r_2 = r_3 = 5, \\ l_{ij} &= 5, i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

图1为驱动系统(1)和未加控制器的响应系统(3)的状态轨迹图,显然两个系统并没有实现同步。

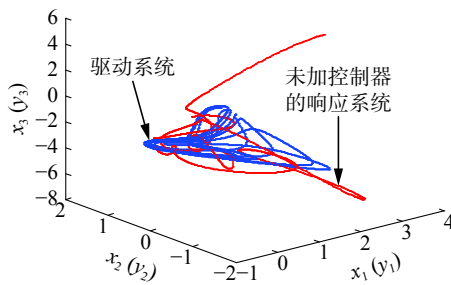


图1 驱动系统(1)与未加控制器的响应系统(3)状态图  
Fig. 1 States of drive system (1) and response system (3) without controller

图2为驱动系统(1)和加了控制律(4)~(7)的响应系统(3)的状态轨迹图,该图显示利用控制律(4)~(7)这两个系统实现了同步。

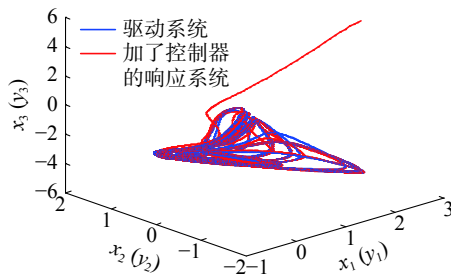


图2 驱动系统(1)与加控制律响应系统(3)状态图  
Fig. 2 States of drive system (1) and response system (3) with controller

图3为控制强度,当时间趋于无穷时它们都收敛到一个确定的常数。从图4~6可以看出响应系统中(3)中所有的未知参数可以很好地辨识出来,辨识值为

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= 1.99, \hat{a}_{12} = -1.2, \hat{a}_{13} = 0, \hat{a}_{21} = 1.8, \hat{a}_{22} = 1.7, \\ \hat{a}_{23} &= 1.15, \hat{a}_{31} = -4.75, \hat{a}_{32} = 0, \hat{a}_{33} = 1.1 \end{aligned}$$

与权重矩阵 $A$ 中的初始值相一致。这表明所提出的控制器是有效的并且可以精确地辨识所有的未知参数。

若将初始值改变为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(0) &= [0.3 \ -0.4 \ 0.9]^T, \\ \mathbf{y}^T(0) &= [0.3 \ -0.4 \ 0.9]^T \end{aligned}$$

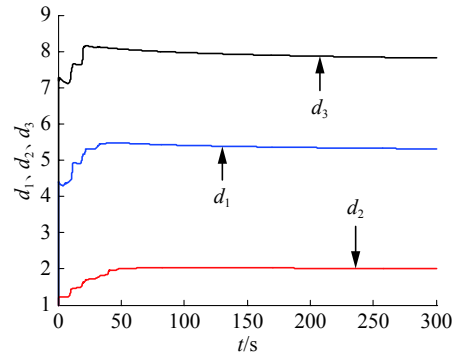


图3  $d_1, d_2, d_3$ 随时间 $t$ 的变化图

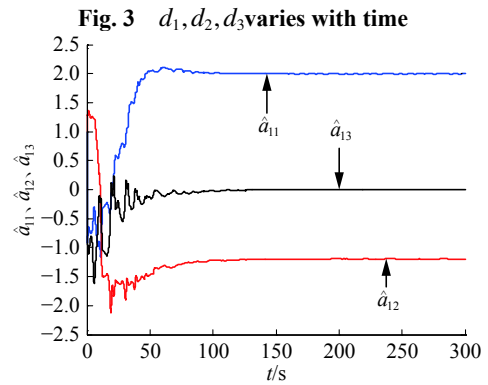


图4  $\hat{a}_{11}, \hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}$ 的辨识  
Fig. 4 Identification of  $\hat{a}_{11}, \hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}$

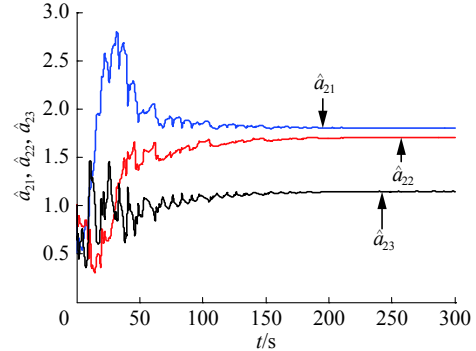


图5  $\hat{a}_{21}, \hat{a}_{22}, \hat{a}_{23}$ 的辨识  
Fig. 5 Identification of  $\hat{a}_{21}, \hat{a}_{22}, \hat{a}_{23}$

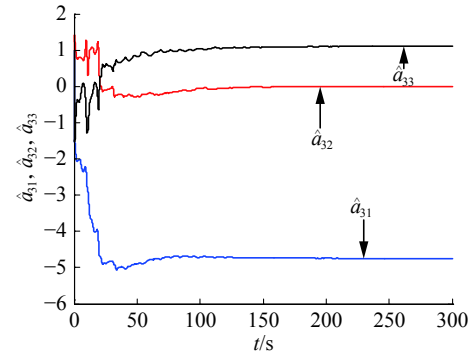


图6  $\hat{a}_{31}, \hat{a}_{32}, \hat{a}_{33}$ 的辨识  
Fig. 6 Identification of  $\hat{a}_{31}, \hat{a}_{32}, \hat{a}_{33}$



并且添加条件:

$$w_i(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中  $i = 1, 2, 3$ 。通过图7可以读出  $\gamma = 0.4663$ 。

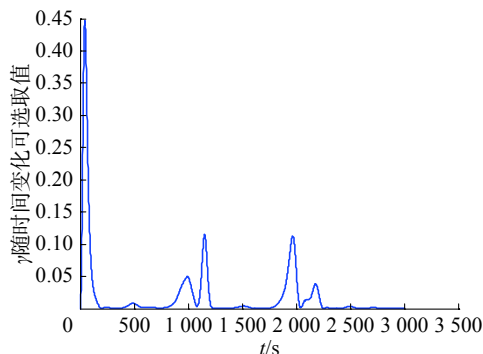


图7  $\gamma$ 随时间变化可取值图

Fig. 7 The value of  $\gamma$  varies with time

图8显示当  $t \rightarrow \infty$  时, 有

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 dt < \int_0^\infty \gamma \sum_{i=1}^n w_i(t)^2 dt$$

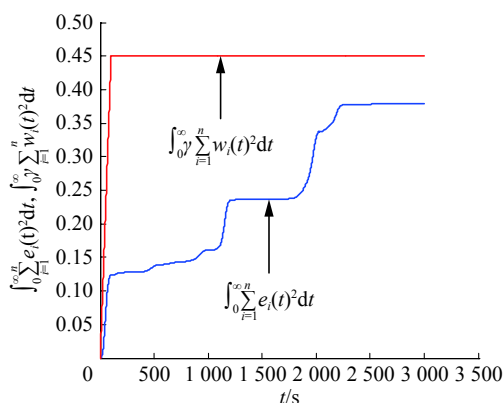


图8  $\int_0^\infty \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 dt$  与  $\int_0^\infty \gamma \sum_{i=1}^n w_i(t)^2 dt$  的能量轨迹图

Fig. 8 The energy trajectories of  $\int_0^\infty \sum_{i=1}^n e_i(t)^2 dt$  and  $\int_0^\infty \gamma \sum_{i=1}^n w_i(t)^2 dt$

即满足  $H_\infty$  同步。

## 5 结束语

本文针对一类不确定分数阶神经网络系统, 本文研究了其自适应  $H_\infty$  同步与参数辨识问题。注意到, 不确定项总是存在于实际的神经网络中, 而文中所得研究结果可以很好的解决这一问题, 即可以精确地对不确定参数项进行辨识同时具有很强的鲁棒性。因而, 本文的研究结果具有很强的实际应用价值, 可以广泛的应用于实际神经网络。

然而, 本文所考虑的是理想化的网络模型, 在实际应用中, 时滞总是存在于神经元之间的通讯过程中, 并对系统的稳定性产生严重的影响, 进而影响对未知参数的辨识精度。注意到, 目前还没有关于此方面比较好的研究结果, 因此, 有必要设计相关的控制协议来抵消时滞对系统稳定性造成的影响。在未来的研究中, 我们将进一步针对带有时滞的不确定分数阶神经网络, 设计相关的控制协议, 从而对系统中的未知参数进行精确地辨识, 同时使系统实现同步。

## 参考文献:

- [1] ZHANG Shou, YU Yongguang, YU Junzhi. LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks[J]. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2017, 28(10): 2423–2433.
- [2] LI Yan, CHEN Yangquan, PODLUBNY I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(8): 1965–1969.
- [3] HAYMAN S. The McCulloch-pitts model[C]//International Joint Conference on Neural Networks. Washington, USA, 1999: 4438–4439.
- [4] HOPFIELD J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities[J]. *Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America*, 1982, 79(8): 2554–2558.
- [5] YAN Zheng, WANG Jun. Robust model predictive control of nonlinear systems with unmodeled dynamics and bounded uncertainties based on neural networks[J]. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2014, 25(3): 457–469.
- [6] PAN Yunpeng, WANG Jun. Robust model predictive control using a discrete-time recurrent neural network[C]// International Symposium on Neural Networks: advances in Neural Networks. Berlin, Heidelberg, Germany: , 2008: 883–892.
- [7] KASLIK E, SIVASUNDARAM S. Multistability in impulsive hybrid Hopfield neural networks with distributed delays[J]. *Nonlinear analysis: real world applications*, 2011, 12(3): 1640–1649.
- [8] BAO Haibo, PARK J H, CAO Jinde. Adaptive synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delay[J]. *Nonlinear dynamics*, 2015, 82(3): 1343–1354.
- [9] CHEN Jiejie, ZENG Zhigang, JIANG Ping. Global mittag-leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. *Neural networks*, 2014, 51: 1–8.

- [10] WU Wei, CHEN Tianping. Global synchronization criteria of linearly coupled neural network systems with time-varying coupling[J]. *IEEE transactions on neural networks*, 2008, 19(2): 319–332.
- [11] VELMURUGAN G, RAKKIYAPPAN R, CAO Jinde. Finite-time synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delays[J]. *Neural networks*, 2016, 73: 36–46.
- [12] ABDURAHMAN A, JIANG Haijun, TENG Zhidong. Finite-time synchronization for memristor-based neural networks with time-varying delays[J]. *Neural networks*, 2015, 69: 20–28.
- [13] YU Juan, HU Cheng, JIANG Haijun.  $\alpha$ -stability and  $\alpha$ -synchronization for fractional-order neural networks[J]. *Neural networks*, 2012, 35: 82–87.
- [14] MA Weiyuan, LI Changpin, WU Yujiang, et al. Adaptive synchronization of fractional neural networks with unknown parameters and time delays[J]. *Entropy*, 2014, 16(12): 6286–6299.
- [15] LIN Peng, JIA Yingmin, LI Lin. Distributed robust  $H_\infty$  consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. *Systems and control letters*, 2008, 57(8): 643–653.
- [16] MO L, JIA Y.  $H_\infty$  consensus control of a class of high-order multi-agent systems[J]. *IET control theory and application*, 2011, 5(1): 247–253.
- [17] MATHIYALAGAN K, ANBUVITHYA R, SAKTHIVEL R, et al. Non-fragile  $H_\infty$  synchronization of memristor-based neural networks using passivity theory[J]. *Neural networks*, 2016, 74: 85–100.
- [18] PODLUBNY I. Fractional differential equations: mathematics in science and engineering[M]. San Diego, Calif, USA: Academic Press, 1999.
- [19] AGUILA-CAMACHO N, DUARTE-MERMOUD M A, GALLEGOS J A. Lyapunov functions for fractional order systems[J]. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 2014, 19(9): 2951–2957.
- [20] KILBAS A A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Boston: Elsevier, 2006.
- [21] SLOTINE J J E, LI Weiping. Applied nonlinear control[M]. Beijing, China Machine Press, 2004.
- [22] TRIGEASSOU J C, MAAMRI N, SABATIER J, et al. A lyapunov approach to the stability of fractional differential equations[J]. *Signal processing*, 2011, 91(3): 437–445.
- [23] TRIGEASSOU J C, MAAMRI N. State space modeling of fractional differential equations and the initial condition problem[C]//Proceedings of the 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices. Djerba, Tunisia, 2009: 1–7.

#### 作者简介:



袁晓琳, 女, 1994 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为复杂系统的分析与控制。



莫立坡, 男, 1980 年生, 副教授, 博士, 主要研究方向为随机系统、多智能体系统的协调控制、智能优化算法。主持多项国家自然科学基金项目。发表学术论文 30 余篇, 其中被 SCI、EI 检索 20 余篇。