

DOI:10.11992/tis.201512021

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20170227.2155.018.html>

# 一种多非完整移动机器人分布式编队控制方法

李苗<sup>1,2</sup>, 刘忠信<sup>1,2</sup>, 陈增强<sup>1,2</sup>

(1.南开大学津南校区 计算机与控制工程学院, 天津 300353; 2.天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300353)

**摘要:**本文研究了多非完整移动机器人编队控制算法。在该算法中,参考轨迹被视为虚拟领导者,只有部分机器人可以接收到领导者信息,机器人之间只能进行局部信息交互。利用坐标变换将机器人系统的编队问题转化为变换后系统的一致性问题,在持续激励的条件下,设计了一种分布式控制算法,通过图论与 Lyapunov 理论证明了该分布式控制算法可以使移动机器人队伍指数收敛于期望队形,并使队形的几何中心指数收敛到参考轨迹。最后,数值仿真验证了该控制算法的有效性。

**关键词:**非完整移动机器人;编队控制;一致性;分布式控制

**中图分类号:** TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2017)01-0088-07

中文引用格式:李苗,刘忠信,陈增强.一种多非完整移动机器人分布式编队控制方法[J].智能系统学报,2017,12(1):88-94.

英文引用格式:LI Miao, LIU Zhongxin, CHEN Zengqiang. A distributed formation control method for multiple nonholonomic mobile robots[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2017, 12(1): 88-94.

## A distributed formation control method for multiple nonholonomic mobile robots

LI Miao<sup>1,2</sup>, LIU Zhongxin<sup>1,2</sup>, CHEN Zengqiang<sup>1,2</sup>

(1. College of Computer and Control Engineer, Jinnan Campus, Nankai University, Tianjin 300353, China; 2. Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Tianjin 300353, China)

**Abstract:** This paper addresses the algorithm of formation control for multiple nonholonomic mobile robots. The reference trajectory was represented by a virtual leader whose states were available to a subset of the following mobile robots and the robots only interacted with each other locally. Coordinate transformation was proposed to convert the formation control problem for multiple nonholonomic mobile robots into a state consensus problem. Under the restriction of persistent excitation on reference trajectories, distributed control laws were proposed for achieving the formation control objectives. Using the Lyapunov function and graph theory, rigorous proofs show that the group of mobile robots can exponentially converge to a desired geometric formation pattern and its centroid can move along the reference trajectory. The validity of the proposed control method is verified by numerical simulation.

**Keywords:** nonholonomic mobile robots; formation control; consensus; distributed control

近年来,随着移动机器人技术的发展,多机器人的协调控制受到了越来越多的关注。多移动机器人通过协作能完成单个机器人不能完成的任务,因此在地理勘测、巡逻侦察、安全救援和运输大型货物等领域具有广阔的应用前景。编队控制是一个典型的

多机器人协调问题,是研究其他协调问题的基础,其控制算法主要包括基于行为法<sup>[1]</sup>、领航-跟随法<sup>[2-3]</sup>、虚拟结构法<sup>[4-8]</sup>和人工势场法<sup>[5]</sup>等。

移动机器人存在非完整约束和非线性特性,因此对机器人的控制更有难度。文献[6]研究了非完整移动机器人系统的一致性问题,提出了一个线性时不变连续状态反馈,使系统状态变量达到了一致。文献[7]通过坐标变换将机器人的运动模型转换成

收稿日期:2015-12-12. 网络出版日期:2017-02-27.

基金项目:国家自然科学基金项目(61573200, 61273138);天津市自然科学基金项目(13JCYBJC17400, 14JCYBJC18700, 14JCZDJC39300).

通信作者:刘忠信. E-mail: lzhx@nankai.edu.cn

链式结构,利用反步法设计的轨迹跟踪控制器达到了期望的效果。文献[8]采用一致性算法与虚拟结构法研究了自主水下航行器小尺度编队控制问题,设计的跟踪控制律使 AUV 在有限时间内实现了对参考轨迹的跟踪。文献[9]将虚拟结构法和反步法相结合,提出的非线性控制算法解决了机器人编队问题,但该算法要求机器人速度不能为0。

随着多智能体协同控制理论的发展,它的控制策略已经被应用在多非完整移动机器人编队控制中。文献[10]研究了离散模型的多智能体领航跟随编队控制算法,在该算法中,通过引入基于邻居的局部控制律以及基于邻居的状态估计规则设计了一种新型控制器,经过理论分析,给出了固定拓扑和切换拓扑时系统稳定编队的充分条件。文献[11]在每个移动机器人都知道参考轨迹信息的条件下,提出了一个移动机器人编队控制器。在持续激励的条件下,文献[12-13]利用非自治系统的级联控制方法和线性智能体的协同控制方法,将非完整约束多个体系统的控制问题转化为多个线性时变系统的控制问题,文中的控制律可以实现系统  $K$ -指数稳定的跟踪控制。文献[14]提出了一种新坐标变换,将移动机器人编队问题转化为状态变量实现一致的问题,设计的分布式控制律可以使系统指数收敛于期望轨迹,但是每个机器人个体都要知道参考轨迹的角速度。

在上述工作的基础上,本文进一步研究了非完整移动机器人编队控制问题。文中通过引入坐标变换公式,将机器人编队问题转化为一致性问题。在持续激励条件下,利用邻居信息设计了分布式控制协议,然后用图论和 Lyapunov 方法,在理论上证明了该控制协议的正确性。最后,文中通过 MATLAB 仿真来验证该控制算法的可行性。不同于文献[12,14],本文把参考轨迹视为虚拟领导者,它的状态信息只有部分跟随者能接收到。与文献[11]相比,考虑机器人之间只能进行局部信息交互,利用图论和 Lyapunov 方法设计的分布式控制律,可以保证整个机器人队伍指数收敛于指定队形,并且队形几何中心收敛到参考轨迹。

## 1 问题的提出

考虑  $n$  个非完整约束移动机器人组成的系统,系统中的每个机器人具有相同的结构,有两个驱动轮和一个自由轮,如图1所示。用  $\theta = \{1, 2, \dots, n\}$  表示移动机器人序列,移动机器人  $i$  的运动学表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i = v_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i = \omega_i \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x_i, y_i$  分别表示移动机器人  $i$  的笛卡尔坐标;  $\theta_i$  为其航向角,即前进方向与  $X$  轴夹角;  $v_i, \omega_i$  分别为

移动机器人  $i$  的线速度和角速度。文中假设非完整约束移动机器人  $i$  满足纯滚动无滑动,用公式表示为  $\dot{y}_i \cos \theta_i - \dot{x}_i \sin \theta_i = 0$ 。

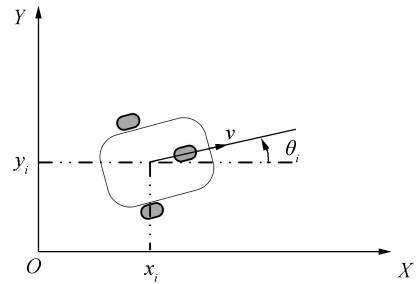


图1 移动机器人示意图

Fig.1 The sketch of mobile robot

图论可以清晰完整地模拟移动机器人之间的连接关系,本文利用无向图来描述多移动机器人之间的通信关系。令  $G = (V, E)$  表示一个无向图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  表示由  $n$  个节点构成的节点集,  $E \subseteq V \times V$  表示边的集合。如果  $(v_i, v_j) \in E$ , 则表示机器人  $i$  与机器人  $j$  可以接收到彼此的信息。

无向图  $G$  的邻接矩阵为  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中  $a_{ij}$  表示  $(v_i, v_j)$  连接权重, 即

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E, i \neq j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在无向图中,  $(v_i, v_j) \in E$ , 则  $(v_j, v_i) \in E$ , 且  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i \neq j$ 。如果  $(v_i, v_j) \in E$ , 那么  $v_j$  是  $v_i$  的邻居顶点。我们定义顶点  $v_i$  的邻居点集合为  $N_i = \{j \in V: (v_i, v_j) \in E, \forall i \neq j\}$ 。

无向图  $G$  的度矩阵为  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 那么图  $G$  的拉普拉斯(Laplacian)矩阵为  $L = D - A$ 。

假设  $n$  个移动机器人形成编队队形  $\mathcal{F}$ ,  $(p_{0x}, p_{0y})$  为编队队形  $\mathcal{F}$  的几何中心,  $(p_{ix}, p_{iy})$  表示机器人  $i$  相对于队形  $\mathcal{F}$  几何中心的期望位置矢量, 即

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_{ix}}{n} = p_{0x}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{p_{iy}}{n} = p_{0y} \quad (2)$$

为了计算简单,不失一般性,我们假设  $p_{0x} = 0$ ,  $p_{0y} = 0$ 。

整个机器人队伍的参考轨迹  $T$  的运动学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \cos \theta_0 \\ \dot{y}_0 = v_0 \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = \omega_0 \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $v_0, \omega_0$  为已知时变函数。在实际应用中, 机器人群体完成特定任务时, 只有一个或者几个移动机器人知道任务的信息, 其他机器人个体需要通过与邻居的信息交互, 才能完成特定的任务。因此为了符合实际, 本文将参考轨迹  $T$  视为虚拟领导者 0 的运动轨迹, 假设参考轨迹的信息并不是全局已知的, 采用牵制控制的思想, 来实现多机器人编队控制。移动机器人  $i$  与虚拟领导者 0 之间的通信关系用对

角矩阵  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$  来表示。如果机器人  $i$  能获得虚拟领导者 0 的信息, 则对角元素  $b_i = 1$ , 否则  $b_i = 0$ 。

分布式编队控制的目标是基于邻居和自己的状态信息, 为每个机器人设计控制器, 使整个机器人队伍形成编队队形  $\mathcal{S}$ , 同时几何中心实现对虚拟领导者 0 的轨迹跟踪, 即设计的控制器满足式 (4)~(7):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_i(t) - x_j(t) \\ y_i(t) - y_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{ix} - p_{jx} \\ p_{iy} - p_{jy} \end{bmatrix}, 0 \leq i, j \leq n, i \neq j \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i - \theta_0) = 0, 0 \leq i \leq n \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i(t)}{n} - x_0(t) \right) = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{y_i(t)}{n} - y_0(t) \right) = 0 \quad (7)$$

在介绍分布式控制算法之前, 先给出本文的一些符号表示和多机器人系统满足的两个假设, 以及后面证明所需要用到的两个重要引理。

本文约定如下:  $\mathbf{I}$  代表单位矩阵;  $\mathbf{1}_n = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbf{R}^n$ ;  $\lambda_{\min}(\cdot)$  和  $\lambda_{\max}(\cdot)$  分别表示矩阵的最小特征值和最大特征值; 向量  $\mathbf{x}$  的 2-范数为  $\|\mathbf{x}\|_2$ , 1-范数为  $\|\mathbf{x}\|_1$ ; 矩阵  $\mathbf{A}$  的  $F$ -范数为  $\|\mathbf{A}\|_F$ ; 当  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $\text{sign}(\mathbf{x}) = [\text{sign}(x_1) \ \dots \ \text{sign}(x_n)]^T$ , 其中, 当  $x_i \neq 0$  时,  $\text{sign}(x_i) \triangleq x_i/|x_i|$ ; 当  $x_i = 0$  时,  $\text{sign}(x_i) = 0$ 。

**假设 1**<sup>[12-13]</sup>  $\omega_0$  是持续激励信号, 即存在正常数  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\delta$ , 使得对于所有的  $t > 0$ , 满足

$$\alpha_1 \mathbf{I} \leq \int_t^{t+\delta} \omega_0(\tau) \omega_0^T(\tau) d\tau \leq \alpha_2 \mathbf{I}$$

**假设 2** 图  $G$  是无向连通的, 至少存在一个移动机器人和虚拟领导者 0 是直接连通的, 且这种连通是单向的。

**引理 1**<sup>[15]</sup> 如果实数矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  正定对称, 那么对于任意向量  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  都满足下面条件

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

**引理 2**<sup>[16]</sup> 对于矩阵  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) > 0$ , 如果无向图  $G$  连通, 那么矩阵  $\mathbf{L} + \mathbf{B}$  是正定的。

## 2 分布式控制算法

### 2.1 控制器的设计

为了便于控制器的设计, 我们将移动机器人的运动学模型进行坐标变换, 使用如下的坐标变换<sup>[13]</sup>:

$$\begin{cases} x_{1i} = \theta_i \\ x_{2i} = (x_i - p_{ix}) \cos \theta_i + (y_i - p_{iy}) \sin \theta_i + k_0 \text{sign}(u_{1i}) x_{3i} \\ x_{3i} = (x_i - p_{ix}) \sin \theta_i - (y_i - p_{iy}) \cos \theta_i \end{cases} \quad (8)$$

同时, 控制输入的变换方程为

$$\begin{cases} \omega_i = u_{1i} \\ v_i = u_{2i} + (1 + k_0^2) u_{1i} x_{3i} \end{cases} \quad (9)$$

通过上述变换, 机器人  $i$  运动学模型变为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1i} = u_{1i} \\ \dot{x}_{2i} = u_{2i} + k_0 |u_{1i}| x_{2i} \\ \dot{x}_{3i} = u_{1i} x_{2i} - k_0 |u_{1i}| x_{3i} \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $0 \leq i \leq n$ ;  $k_0 > 0$ ;  $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}$  表示系统坐标变换后的状态量;  $u_{1i}, u_{2i}$  表示系统坐标变换后控制输入。

通过上面的坐标变换式 (8), 多移动机器人编队问题转化为新状态变量  $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}$  实现一致的问题。采用误差控制策略, 定义变换后的状态误差为

$$\begin{cases} \tilde{x}_{1i} = x_{1i} - x_{10} \\ \tilde{x}_{2i} = x_{2i} - x_{20} \\ \tilde{x}_{3i} = x_{3i} - x_{30} \end{cases} \quad (11)$$

对式 (11) 求导可得

$$\dot{\tilde{x}}_{1i} = u_{1i} - u_{10} \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{x}}_{2i} = u_{2i} + k_0 |u_{1i}| x_{2i} - \dot{x}_{20} \quad (13)$$

$$\dot{\tilde{x}}_{3i} = u_{1i} x_{2i} - k_0 |u_{1i}| x_{3i} - u_{10} x_{20} + k_0 |u_{10}| x_{30} \quad (14)$$

为了解决多机器人编队问题, 把状态误差系统式 (12)~(14) 分解为一个一阶子系统和一个二阶子系统, 其中一阶子系统的运动学方程为式 (12), 二阶子系统的运动学方程为式 (13) 和式 (14)。考虑只有部分机器人与虚拟领导者 0 有信息交互, 设计  $u_{1i}$ , 使得一阶子系统式 (12) 在有限时间内收敛于 0; 设计  $u_{2i}$ , 使得二阶子系统式 (13) 和式 (14) 指数收敛于 0。构造如下的分布式控制律:

$$u_{1i} = \frac{1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij} + b_i} (-k_1 \varepsilon_{1i} - k_2 \text{sign}(\varepsilon_{1i}) + \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{1j} + b_i u_{10}) \quad (15)$$

$$u_{2i} = -k_3 \varepsilon_{2i} - k_4 \text{sign}(\varepsilon_{2i}) - k_0 |u_{1i}| x_{2i} - u_{1i} x_{3i} \quad (16)$$

式中:  $1 \leq i \leq n$ ;  $k_1, k_2, k_3 \geq 0, k_4 \geq \kappa |\dot{x}_{20}|$ ;  $|\dot{x}_{20}| \leq \kappa$ ;  $\varepsilon_{1i} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_{1i} - x_{1j}) + b_i (x_{1i} - x_{10})$ ;  $\varepsilon_{2i} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_{2i} - x_{2j}) + b_i (x_{2i} - x_{20})$ ;  $\varepsilon_{3i} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_{3i} - x_{3j}) + b_i (x_{3i} - x_{30})$ 。

根据控制律式 (15) 和式 (16), 以机器人 1 为例, 控制算法的原理框图如图 2 所示。它由两部分组成, 一部分为机器人坐标变换  $i \in \theta$ , 另一部分为分布式控制器。

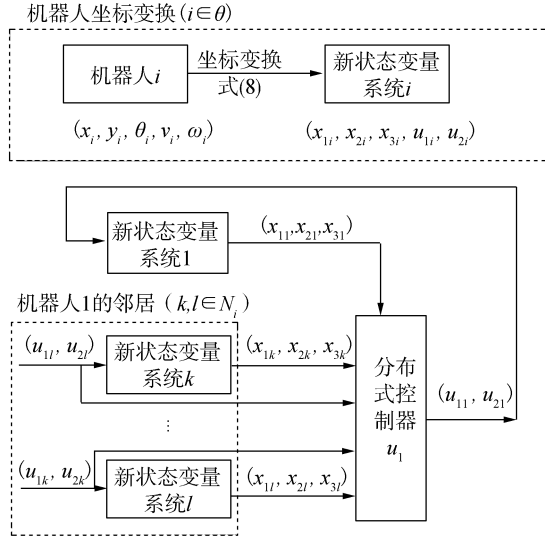


图 2 移动机器人 1 控制原理框图

Fig.2 The control principle block diagram of mobile robot 1

## 2.2 稳定性分析

对于一阶子系统式(12),考虑分布式控制律式(15),将式(10)中  $\dot{x}_{li} = u_{li}$  代入式(15),整理可得

$$\dot{\varepsilon}_{li} = -k_1 \varepsilon_{li} - k_2 \text{sign}(\varepsilon_{li}) \quad (17)$$

令  $\mathbf{x}_1^* = [\mathbf{x}_{11} \cdots \mathbf{x}_{1n}]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_1^* = \mathbf{x}_1^* - \mathbf{1}_n \mathbf{x}_{10}$ , 把式(17)整理成矩阵形式,那么就得到了一阶子系统式(12)所对应的闭环系统的表达式:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^* = -k_1 \tilde{\mathbf{x}}_1^* - k_2 (\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \text{sign}[(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_1^*] \quad (18)$$

**定理 1** 系统满足假设 1 和假设 2,则分布式控制律式(15)能使系统式(18)在有限时间内收敛于 0,即  $\lim_{t \rightarrow T_1} (x_{li}(t) - x_{10}(t)) = 0$ 。收敛时间  $T_1$  满足

$$T_1 = \frac{1}{k_1} \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2} k_1 \lambda_{\max}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \sqrt{V_1(0)}}{k_2 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})} \right)$$

式中,  $V_1(0) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T}(0) (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_1^*(0)$ 。

**证明** 针对系统式(18),构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_1^*$$

根据引理 1,可得到

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}^2(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \|\tilde{\mathbf{x}}_1^*\|_2^2 \leq V_1 \leq$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{\max}^2(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \|\tilde{\mathbf{x}}_1^*\|_2^2$$

对  $V_1$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^* = -k_1 \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_1^* - \\ &k_2 \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \text{sign}[(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_1^*] \leq \\ &-k_1 \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_1^* - k_2 \|\tilde{\mathbf{x}}_1^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B})\|_1 \leq \\ &-2k_1 V_1 - k_2 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \|\tilde{\mathbf{x}}_1^*\|_2 \leq \\ &-2k_1 V_1 - \frac{\sqrt{2} k_2 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}{\lambda_{\max}(\mathbf{L} + \mathbf{B})} \sqrt{V_1} \end{aligned}$$

求解上述微分不等式可得:当  $0 \leq t \leq T_1$  时,

$$\sqrt{V_1} \leq \frac{\sqrt{2} k_1 \lambda_{\max}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \sqrt{V_1(0)} + k_2 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}{\sqrt{2} k_1 \lambda_{\max}(\mathbf{L} + \mathbf{B})} \times \exp(-k_1 t) - \frac{k_2 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}{\sqrt{2} k_1 \lambda_{\max}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}$$

当  $t \geq T_1$  时,  $V_1(x) = 0$ 。因为  $\mathbf{L} + \mathbf{B} > 0$ , 由  $V_1$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_1^*$  定义可得  $x_{li} = x_{10}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 此时有  $u_{li} = u_{10}$  ( $1 \leq i \leq n$ )。

收敛时间  $T_1$  依赖于初始值  $V_1(0)$ , 满足下式:

$$T_1 = \frac{1}{k_1} \ln \left[ 1 + \frac{\sqrt{2} k_1 \lambda_{\max}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \sqrt{V_1(0)}}{k_2 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})} \right]$$

定理 1 证毕。

从定理 1 中  $u_{li}$  的收敛时间  $T_1$  表达式可以看出,  $k_2$  影响一阶子系统的收敛速度,  $k_2$  越大, 收敛速度越快。但是  $k_2$  越大, 由于  $\text{sign}(\cdot)$  函数不连续所造成的抖振现象对系统稳定性影响越大, 所以, 选择  $k_2$  时, 需要综合考虑控制精度、收敛速度等方面影响。二阶子系统表达式(13)和式(14)中存在变量  $u_{li}$ , 所以一阶子系统的动态特性会影响二阶子系统的动态特性, 但是一阶子系统式(12)稳定性并不受二阶子系统中变量的影响。由定理 1 可知, 在控制律式(15)的作用下,  $x_{li}, u_{li}$  在有限时间  $T_1$  内收敛于  $x_{10}, u_{10}$ 。所以下面我们只考虑二阶子系统式(13)和式(14)。

$$\text{令 } \mathbf{x}_2^* = [x_{21} \ x_{22} \cdots x_{2n}]^T, \mathbf{x}_3^* = [x_{31} \ x_{32} \cdots x_{3n}]^T$$

$$\mathbf{u}_1^* = \text{diag}(u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1n})$$

$$|\mathbf{u}_1^*| = \text{diag}(|u_{11}|, |u_{12}|, \cdots, |u_{1n}|)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_2^* = \mathbf{x}_2^* - \mathbf{1}_n x_{20}, \tilde{\mathbf{x}}_3^* = \mathbf{x}_3^* - \mathbf{1}_n x_{30}$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{u}_1^* - u_{10} \mathbf{I}) \mathbf{1}_n x_{20} - k_0 (|\mathbf{u}_1^*| - |u_{10}| \mathbf{I}) \mathbf{1}_n x_{30}$$

基于分布式控制协议式(16), 二阶子系统式(13)和式(14)闭环特性可以表示为下面的矩阵形式:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2^* &= -k_3 (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_2^* - k_4 \text{sign}[(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_2^*] - \\ &\mathbf{u}_1^* (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_3^* - \mathbf{1}_n \dot{x}_{20} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_3^* &= -k_0 |\mathbf{u}_1^*| \tilde{\mathbf{x}}_3^* + \mathbf{u}_1^* \tilde{\mathbf{x}}_2^* + \mathbf{y} \end{aligned} \quad (19)$$

**定理 2** 系统满足假设 1 和假设 2, 则控制律式(18)能使式(19)描述的二阶子系统指数收敛于 0, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{2i}(t) - x_{20}(t)) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} (x_{3i}(t) - x_{30}(t)) = 0$ 。

**证明** 由定理 1 可知, 当  $t > T_1$  时,  $u_{li}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 收敛到  $u_{10}$ , 下面分两步来证明定理 2。

1) 证明当  $t \leq T_1$  时,  $\tilde{\mathbf{x}}_2^*$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_3^*$  是有界的。

对闭环系统式(19)构造的 Lyapunov 函数为

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_2^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_2^* + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_3^{*T} (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_3^* \quad (20)$$

根据引理 1 可以得到

$$V_2 \geq \frac{1}{2} [\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \|\tilde{\mathbf{x}}_2^*\|_2^2 + \lambda_{\min}^2(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \|\tilde{\mathbf{x}}_3^*\|_2^2] \geq$$



$$\frac{\alpha}{2}(\|\tilde{\mathbf{x}}_{2*}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2^2) \geq \alpha \|\tilde{\mathbf{x}}_{2*}\|_2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2 \quad (21)$$

式中,  $\alpha = \min(\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B}), \lambda_{\min}^2(\mathbf{L} + \mathbf{B}))$ 。

对  $V_2$  沿着轨迹式(19)求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{2*} + \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{3*} = \\ & -k_3 \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{2*} - k_4 \|\tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})\|_1 - \\ & \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{u}_{1*} (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_{3*} - \\ & \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{1}_n \dot{\mathbf{x}}_{20} - k_0 \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 |\mathbf{u}_{1*}| \tilde{\mathbf{x}}_{3*} + \\ & \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \mathbf{u}_{1*} \tilde{\mathbf{x}}_{2*} + \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (22)$$

根据定理1可知,在有限时间内,机器人的状态误差  $\tilde{\mathbf{x}}_{1*}$  收敛于0,这就意味着  $\tilde{\mathbf{x}}_{1*}$  是有界的,即存在一个正数  $C$ ,使  $\|\mathbf{u}_{1*}\|_F < C$ ,  $|\mathbf{x}_{20}| < C$ ,  $|\mathbf{x}_{30}| < C$  成立,进而存在一个正数  $\mu$ ,使得  $\|\mathbf{y}\|_2 \leq \mu$ 。再根据矩阵范数与向量范数的相容性定理和 Cauchy-Schwarz 不等式,由式(22)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2 + \\ & 2 \|\mathbf{u}_{1*}\|_F \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{2*}\|_2 \leq \\ & \frac{2}{\alpha} C \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 V_2 + \mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2 \end{aligned}$$

当  $\|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2 \leq 1$  时,可以得到

$$\dot{V}_2 \leq \frac{2}{\alpha} C \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 V_2 + \mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 \quad (23)$$

当  $\|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2 > 1$  时,可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \frac{2}{\alpha} C \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 V_2 + \mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{3*}\|_2^2 \leq \\ & \frac{2}{\alpha} C \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 V_2 + \frac{2}{\alpha} \mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 V_2 \end{aligned} \quad (24)$$

结合式(23)和式(24)可知,对于任何  $\tilde{\mathbf{x}}_{2*}$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_{3*}$ ,  $\dot{V}_2$  都满足:

$$\dot{V}_2 \leq \frac{2}{\alpha} \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 (2C + \mu) V_2 + \mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2$$

求解上述微分不等式可得

$$\begin{aligned} V_2 \leq & \left[ V_2(0) + \frac{\mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2}{\frac{2}{\alpha} \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 (2C + \mu)} \right] \times \\ & \exp \left\{ \left[ \frac{2}{\alpha} \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 (2C + \mu) \right] t \right\} - \\ & \frac{\mu \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2}{\frac{2}{\alpha} \|\mathbf{L} + \mathbf{B}\|_F^2 (2C + \mu)} \end{aligned}$$

于是,当  $t \leq T_1$  时  $V_2$  是有界的,进而  $\tilde{\mathbf{x}}_{2*}$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_{3*}$  是有界的。

2) 证明当  $t > T_1$  时,  $\tilde{\mathbf{x}}_{2*}$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_{3*}$  指数收敛于零。

根据定理1,当  $t > T_1$  时,  $u_{1i} = u_{10}$ ,  $x_{1i} = x_{10}$ , 则二阶子系统闭环表达式(19)化简为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{2*} = -k_3 (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_{2*} - k_4 \text{sign}[(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_{2*}] - \\ \quad u_{10} (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{x}}_{3*} - \mathbf{1}_n \dot{\mathbf{x}}_{20} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{3*} = -k_0 |u_{10}| \tilde{\mathbf{x}}_{3*} + u_{10} \tilde{\mathbf{x}}_{2*} \end{cases} \quad (25)$$

则式(22)整理为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_3 \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{2*} - k_4 \|\tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})\|_1 - \\ & \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{1}_n \dot{\mathbf{x}}_{20} - k_0 |u_{10}| \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{3*} \leq \\ & -k_3 \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{2*} - (k_4 - \kappa) \|\tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})\|_1 - \\ & k_0 |u_{10}| \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{3*} \end{aligned} \quad (26)$$

因为式(26)中  $(\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 > 0$ ,  $k_4 > \kappa$ ,  $k_3 > 0$ , 所以  $\dot{V}_2 \leq 0$ 。则二阶子系统式(19)至少是一致渐进稳定。

$$\dot{V}_2 \leq -k_3 \tilde{\mathbf{x}}_{2*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{2*} -$$

$$k_0 |u_{10}| \tilde{\mathbf{x}}_{3*}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^2 \tilde{\mathbf{x}}_{3*} \leq -2\beta V_2$$

式中  $\beta = \min(k_3 \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B}), k_0 |u_{10}|)$ 。那么,可得  $V_2 \leq V_2(T_1) \exp(-2 \int_{T_1}^t \beta d\tau) = V_2(T_1) \exp[-2\beta(\xi)(t - T_1)]$ ,  $\xi \in \mathbf{R}^+$ ,  $\xi \in (T_1, t)$ 。所以,  $V_2$  指数收敛于0,进而可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{2i} - x_{20}) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{3i} - x_{30}) = 0$ 。定理2得证。

综合定理1和定理2,当  $t \leq T_1$  时,一阶子系统的变量  $\tilde{x}_{1i}$  有限时间收敛于0,二阶子系统的变量  $\tilde{x}_{2i}$ ,  $\tilde{x}_{3i}$  是有界的;当  $t > T_1$  时,一阶子系统的  $\tilde{x}_{1i}$  收敛于0,二阶子系统  $\tilde{x}_{2i}$ ,  $\tilde{x}_{3i}$  指数收敛于0,这也意味着在分布式控制算法式(15)和式(16)的作用下,每个机器人个体的各个变量  $\tilde{x}_{1i}$ ,  $\tilde{x}_{2i}$ ,  $\tilde{x}_{3i}$  至少指数收敛为0。本文讨论的机器人的通信拓扑结构是无向连通的,而当通信网络是有向拓扑时,则  $\mathbf{L} + \mathbf{B}$  不是对称矩阵,需要重新设计 Lyapunov 函数来证明系统的稳定性。

### 3 仿真结果分析

本节中,我们用 MATLAB 对移动机器人系统进行了仿真研究,仿真中  $n = 4$ , 移动机器人之间的通信拓扑为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

期望的编队队形  $\mathcal{S}$  为一个正方形:

$$\begin{aligned} (p_{1x}, p_{1y}) &= (1, 1), (p_{2x}, p_{2y}) = (-1, 1) \\ (p_{3x}, p_{3y}) &= (-1, -1), (p_{4x}, p_{4y}) = (1, -1) \end{aligned}$$

虚拟领导者0的  $v_0 = 4$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{3}$ , 初始状态为  $[x_0(0) \ y_0(0) \ \theta_0(0)]^T = [0 \ -12 \ 0]^T$ 。通过坐标变换式(8),计算得到  $\kappa = |\dot{\mathbf{x}}_{20}| = 0$ 。再根据定理2,选

取控制算法式(15)和式(18)的控制增益为: $k_1 = k_3 = 1.2, k_0 = 1, k_2 = k_4 = 0.1$ 。

在图3中,每个四边形中的4个\*表示4个跟随者,实线和虚线分别表示虚拟机器人0和编队几何中心的运动轨迹,从图中可以看出4个跟随者形成了指定正方形编队,同时编队队形的几何中心收敛到虚拟领导者0的运动轨迹。图4和图5分别给出了3个跟随者的控制输入 $\omega_i, v_i (i=1,2,3,4)$ ,从图中可以看出,在15s之后, $\omega_i, v_i$ 收敛到 $\omega_0, v_0$ 。图6~8分别表示4个跟随者与虚拟机器人0的航角和位置之间的误差。在20s后,4个跟随者与虚拟领导者0之间的航角误差为0, $x$ 轴和 $y$ 轴方向的位置误差分别为 $p_{ix}$ 和 $p_{iy} (i=1,2,3,4)$ 。从上述仿真实验可以看出,所设计的控制器可以使移动机器人形成期望的编队。

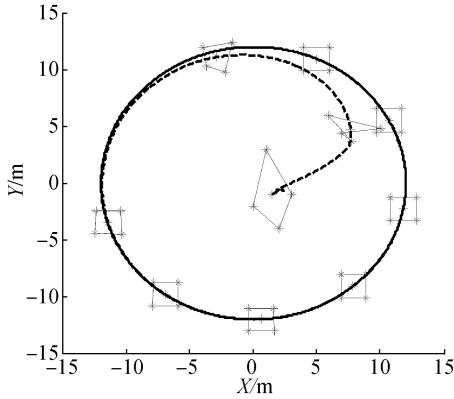


图3 移动机器人编队运动轨迹

Fig.3 Trajectory of tracking of mobile robots formation

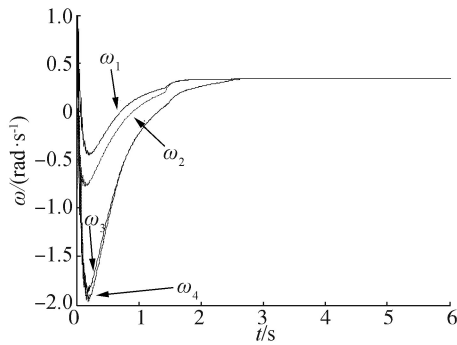


图4 移动机器人控制输入 $\omega$

Fig.4 The control input  $\omega$  of the mobile robots

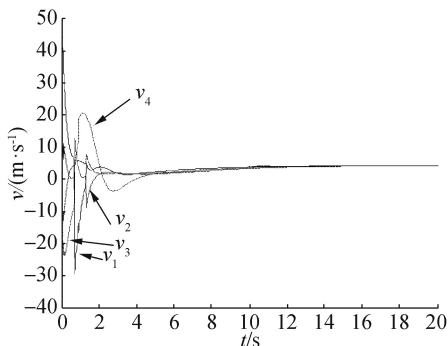


图5 移动机器人控制输入 $v$

Fig.5 The control input  $v$  of the mobile robots

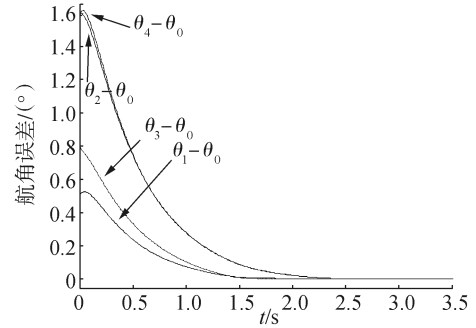


图6 航角误差 $\theta_e$

Fig.6 Heading errors  $\theta_e$

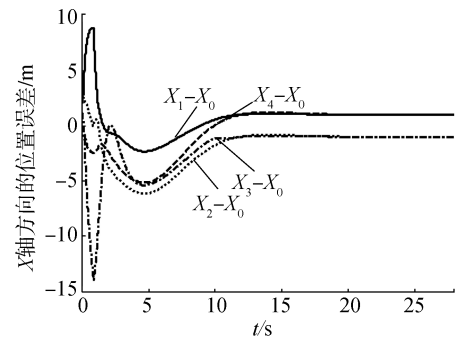


图7 X轴方向的位置误差 $x_e$

Fig.7 Position errors in X coordinates

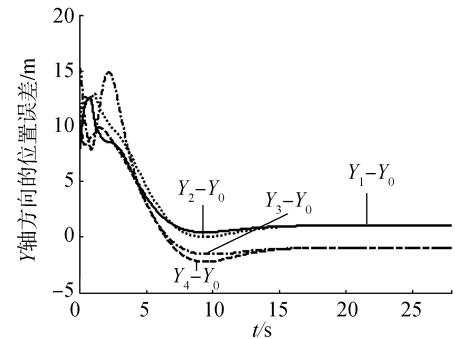


图8 Y轴方向的位置误差 $y_e$

Fig.8 Position errors in Y coordinates

## 4 结束语

本文以多非完整移动机器人为研究对象,通过坐标变换将编队问题转化为移动机器人状态量的一致性问题。在持续激励信号作用下,利用邻居状态信息设计了分布式控制协议,然后用图论和Lyapunov方法,在理论上证明了该控制协议可以很好地解决机器人编队问题。最后,通过MATLAB对该控制算法进行了验证。从仿真实验结果可以看出,本文提出的控制算法可靠性好,能在较短时间内顺利形成编队。本文假设通信拓扑结构是无向连通的,但在实际应用中,系统之间的通信网络往往是有向的或者存在时滞,所以,将来的研究工作将围绕有向通信拓扑开展。

## 参考文献:

- [1] BALCH T, ARKIN R C. Behavior-based formation control for multirobot teams[J]. IEEE transactions on robotics and automation, 1998, 14(6): 926-939.
- [2] SHAO J, XIE G M, WANG L. Leader-following formation control of multiple mobile vehicles[J]. IET control theory & applications, 2007, 1(2): 545-552.
- [3] DESAI J P, OSTROWSKI J P, KUMAR V. Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots[J]. IEEE transactions on robotics and automation, 2001, 17(6): 905-908.
- [4] TAN K H, LEWIS M A. Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control[C]//Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference Intelligent Robots and Systems' 96. Osaka, Japan, 1996: 132-139.
- [5] KHATIB O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots[J]. International journal of robotics research, 1986, 5(1): 90-98.
- [6] ZHAI G, TAKEDA J, IMAE J, et al. Towards consensus in networked non-holonomic systems[J]. IET control theory & applications, 2010, 4(10): 2212-2218.
- [7] YUAN Z P, WANG Z P, CHEN Q J. Trajectory tracking control of a nonholonomic mobile robot[C]//Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Control and Automation. Xiamen, China, 2010: 2207-2211.
- [8] 袁健, 唐功友. 采用一致性算法与虚拟结构的多自主水下航行器编队控制[J]. 智能系统学报, 2011, 6(3): 248-253.  
YUAN Jian, TANG Gongyou. Formation control of autonomous underwater vehicles with consensus algorithms and virtual structure[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2011, 6(3): 248-253.
- [9] CHEN Lei, MA Baoli. A nonlinear formation control of wheeled mobile robots with virtual structure approach[C]//Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China, 2015: 1080-1085.
- [10] 王中林, 刘忠信, 陈增强, 等. 一种多智能体领航跟随编队新型控制器的设计[J]. 智能系统学报, 2014, 9(3): 298-306.  
WANG Zhonglin, LIU Zhongxin, CHEN Zengqiang, et al. A kind of new type controller for multi-agent leader-follower formation[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2014, 9(3): 298-306.
- [11] DONG Wenjie, FARRELL J A. Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic dynamic systems with uncertainty[J]. Automatica, 2009, 45(3): 706-710.
- [12] CAO Kecai, YANG Hao, JIANG Bin. Formation tracking control of nonholonomic chained form systems[C]//Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA). Hangzhou, China, 2013: 846-851.
- [13] CAO Kecai, JIANG Bin, CHEN Yangquan. Cooperative control design for non-holonomic chained-form systems[J]. International journal of systems science, 2015, 46(9): 1525-1539.
- [14] PENG Zhaoxia, WEN Guoguang, Rahmani A, et al. Distributed consensus-based formation control for multiple nonholonomic mobile robots with a specified reference trajectory[J]. International journal of systems science, 2015, 46(8): 1447-1457.
- [15] 方勇纯, 卢桂章. 非线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 1-151.
- [16] HONG Yiguang, HU Jiangping, GAO Linxin. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology[J]. Automatica, 2006, 42(7): 1177-1182.

## 作者简介:



李苗,女,1991年生,硕士研究生,主要研究方向为多智能体系统控制、人工智能系统与控制。



刘忠信,男,1975年生,教授,博士生导师,中国人工智能学会智能空天系统专业委员会委员、中国智能物联系统建模与仿真专业委员会委员,主要研究方向为多智能体系统、复杂动态网络、计算机控制与管理。



陈增强,男,1964年生,教授,博士生导师,主要研究方向为智能预测控制、混沌系统与复杂动态网络、多智能体系统控制。