DOI:10.11992/tis.201412013
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20151111.1633.008.html

二型直觉模糊粗糙集

王金英,韩晓冰,王艳平
(辽宁工业大学 理学院,辽宁 锦州 121001)

摘　要:将二型直觉模糊集和粗糙集理论融合,建立二型直觉模糊粗糙集模型。首先,在二型直觉模糊近似空间中,定义了一对二型直觉模糊上、下近似算子,并讨论了二型直觉模糊关系退化为普通二型模糊关系和一般等价关系时,上、下近似算子的具体变化形式。然后,将普通二型模糊集之间包含关系的定义推广到了二型直觉模糊集,在此基础上研究了二型直觉模糊上、下近似算子的一些性质。最后,定义了自反的、对称的和传递的二型直觉模糊关系,并讨论了这 3 种特殊的二型直觉模糊关系与近似算子的特征之间的联系。该结论进一步丰富了二型模糊集理论和粗糙集理论,为二型直觉模糊信息系统的应用奠定了良好的理论基础。

关键词:直觉模糊集;粗糙集;二型模糊集;二型直觉模糊集;二型直觉模糊粗糙集;近似算子
中图分类号: TP301;O236　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-4785(2015)06-0943-06

中文引用格式:王金英,韩晓冰,王艳平. 二型直觉模糊粗糙集[J]. 智能系统学报, 2015, 10(6): 943-948.
英文引用格式:WANG Jinying, HAN Xiaobing, WANG Yanping. Type-2 intuitionistic fuzzy rough sets[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2015, 10(6): 943-948.

Type-2 intuitionistic fuzzy rough sets

WANG Jinying, HAN Xiaobing, WANG Yanping
(School of science, Liaoning university of technology, Jinzhou Liaoning 121001, China)

Abstract: In this study, we integrate the theories of type-2 intuitionistic fuzzy sets and rough sets to construct a type-2-intuitionistic-fuzzy-and-rough-sets model. First, in type-2 intuitionistic fuzzy approximation space, we define a pair of type-2 intuitionistic fuzzy upper and lower approximation operators. We then discuss specific changes in these upper and lower approximation operators for a situation in which the type-2 intuitionistic fuzzy relations degenerate into common type-2-fuzzy and general-equivalence relations. Next, we generalize the definition of the inclusion relation between general type-2 fuzzy sets as type-2 intuitionistic fuzzy sets. On this basis, we then explored the properties of type-2-intuitionistic-fuzzy upper and lower approximation operators. We then defined reflexive, symmetric, and transitive type-2 intuitionistic fuzzy relations. Finally, we discuss the relations between these three special type-2 intuitionistic fuzzy relations and the characteristics of their approximation operators. Conclusions drawn in this study further enrich the theories of type-2 intuitionistic fuzzy and rough sets and establish a good theoretical basis for the application of the type-2 intuitionistic fuzzy information system.

Keywords: intuitionistic fuzzy sets; rough sets; type-2 fuzzy sets; type-2 intuitionistic fuzzy sets; type-2 intuitionistic fuzzy rough sets; approximation operators

收稿日期:2014-12-15.　**网络出版日期**:2015-11-11.
基金项目:辽宁省教育厅基金资助项目(L2012226).
通信作者:王金英.E-mail: ying2000_2004@163.com.

自 1965 年 Zadeh 首次提出模糊集[1]的概念以来,Zadeh 本人以及其他一些学者相继给出了模糊集的一些推广形式。其中 Atanassov 将模糊集推广

到了直觉模糊集[2]以及区间直觉模糊集[3]，Zadeh 等将普通模糊集推广到二型模糊集[4-5]。随着信息技术的发展，Pawlak 于 1982 年提出了粗糙集[6]的概念，由于模糊集和粗糙集理论在处理不确定性和不精确性问题方面都推广了经典集合论，因此将 2 个理论相融合，建立模糊粗糙集成为信息领域研究的主要方向之一。许多学者致力于这方面的研究，分别给出了模糊粗糙集[7]、直觉模糊粗糙集[8-9]等概念。目前，一型广义模糊粗糙集理论的发展已达到了一个相对完善的状态。近年来，人们开始着手将模糊粗糙集理论进一步推广到二型模糊粗糙集[10]，与此同时，二型模糊集的概念也被扩展到了二型直觉模糊集[11]。然而，关于二型直觉模糊集和粗糙集理论相融合的研究目前尚未见到，基于此，本文在二型模糊粗糙集理论的基础上，利用二型直觉模糊集和二型直觉模糊关系，将文献[10]中给出的二型模糊粗糙集模型进一步推广到二型直觉模糊粗糙集模型，同时还讨论了一些相关的性质。

1 二型直觉模糊集的基本理论

定义 1[11] 二型直觉模糊集。设 U 为论域，称 $A=\{\langle x,\mu_A(x),v_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 为 U 上的一个二型直觉模糊集。其中

$$\mu_A(x)=\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u,J_x^u\subseteq[0,1]$$

$$v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} g_x(v)/v,J_x^v\subseteq[0,1]$$

且对 $\forall x\in U$ 满足

$$\max_{u\in J_x^u}(f_x(u)\times u)+\max_{v\in J_x^v}(g_x(v)\times v)\leqslant 1$$

$\mu_A(x)$ 表示 x 对 A 的隶属程度，$v_A(x)$ 表示 x 对 A 的非隶属程度。

为叙述方便，将 $\mu_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别称为二型直觉模糊集的主隶属度和主非隶属度。

定义 2[11] 二型直觉模糊集的基本运算。设 A、B 是论域 U 上的 2 个二型直觉模糊集，令

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),v_A(x)\rangle \mid x\in U\}$$

$$B=\{\langle x,\mu_B(x),v_B(x)\rangle \mid x\in U\}$$

其中

$$\mu_A(x)=\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u,J_x^u\subseteq[0,1]$$

$$v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} g_x(v)/v,J_x^v\subseteq[0,1]$$

$$\mu_B(x)=\int_{w\in J_x^w} h_x(w)/w,J_x^w\subseteq[0,1]$$

$$v_B(x)=\int_{p\in J_x^p} k_x(p)/p,J_x^p\subseteq[0,1]$$

定义运算如下：

1) $A\cap B=\{\langle x,\mu_{A\cap B}(x),v_{A\cap B}(x)\rangle \mid x\in U\}$，其中

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\Delta\mu_B(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\wedge w$$

$$v_{A\cap B}(x)=v_A(x)\nabla v_B(x)=\int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\vee p$$

2) $A\cup B=\{\langle x,\mu_{A\cup B}(x),v_{A\cup B}(x)\rangle \mid x\in U\}$，其中

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\nabla\mu_B(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\vee w$$

$$v_{A\cup B}(x)=v_A(x)\Delta v_B(x)=\int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\wedge p$$

3) $A^c=\{\langle x,v_A(x),\mu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$。

定理 1 [11]设 A,B,C 是论域 U 上的 3 个二型直觉模糊集，则下列各式成立：

1)交换律，$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

2)结合律，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

3)幂等律，$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

4)对合律，$(A^c)^c=A$；

5)德摩根律，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

一般地，分配律和吸收律不成立。如果限定所有二型直觉模糊集的主隶属度和主非隶属度均为标准的凸一型模糊集，那么，分配律和吸收律便成立[10]。

定义 3[11] 二型直觉模糊关系。设 U 和 W 是有限非空论域，定义在直积空间 $U\times W$ 上的二型直觉模糊子集称为从 U 到 W 的二型直觉模糊关系。记为

$$R=\{\langle(x,y),\mu_R(x,y),v_R(x,y)\rangle \mid x\in U,y\in W\}$$

其中

$$\mu_R(x,y)=\int_{u\in J_{(x,y)}^u} f_{(x,y)}(u)/u,J_{(x,y)}^u\subseteq[0,1]$$

$$v_R(x,y)=\int_{v\in J_{(x,y)}^v} g_{(x,y)}(v)/v,J_{(x,y)}^v\subseteq[0,1]$$

且对 $\forall(x,y)\in U\times W$，满足

$$\max_{u\in J_{(x,y)}^u}(f_{(x,y)}(u)\times u)+\max_{v\in J_{(x,y)}^v}(g_{(x,y)}(v)\times v)\leqslant 1$$

特别地，当 $U=W$ 时，二型直觉模糊关系 R 称为 $U\times U$ 上的二型直觉模糊关系。

2 二型直觉模糊粗糙集及其性质

定义 4 设 R 是 $U\times U$ 上的二型直觉模糊关

系,称 (U,R) 是二型直觉模糊近似空间, A 是论域 U 上的一个二型直觉模糊集, A 关于近似空间 (U,R) 的上近似和下近似分别是定义在 U 上的二型直觉模糊集,具体形式如下

$$\bar{R}(A) = \{\langle x,\mu_{\bar{R}(A)}(x),v_{\bar{R}(A)}(x)\rangle \mid x \in U\}$$
$$\underline{R}(A) = \{\langle x,\mu_{\underline{R}(A)}(x),v_{\underline{R}(A)}(x)\rangle \mid x \in U\}$$

其中

$$\mu_{\bar{R}(A)}(x) = \nabla_{y\in U}[\mu_A(y)\Delta\mu_R(x,y)]$$
$$v_{\bar{R}(A)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[v_A(y)\ \nabla v_R(x,y)]$$
$$\mu_{\underline{R}(A)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[\mu_A(y)\ \nabla v_R(x,y)]$$
$$v_{\underline{R}(A)}(x) = \nabla_{y\in U}[v_A(y)\Delta\mu_R(x,y)]$$

称 $(\underline{R}(A)、\bar{R}(A))$ 为 A 关于 (U,R) 的二型直觉模糊粗糙集。

下面讨论特殊情况下的模型形式。

1) 当 R 退化为 $U\times U$ 上的普通二型模糊关系, A 退化为 U 上的普通二型模糊集时,定义 4 中的二型直觉模糊粗糙集退化为文献[10]中的二型模糊粗糙集。

这是因为,对 $\forall x,y \in U$,此时有

$$\mu_A(x) = \int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u$$
$$v_A(x) = \int_{u\in J_x^u} f_x(u)/(1-u) = \neg\ \mu_A(x),J_x^u \subseteq [0,1]$$
$$\mu_R(x,y) = \int_{u\in J_{(x,y)}^u} f_{(x,y)}(u)/u$$
$$v_R(x,y) = \int_{u\in J_{(x,y)}^u} f_{(x,y)}(u)/(1-u) = \neg\ \mu_R(x,y)$$
$$J_{(x,y)}^u \subseteq [0,1]$$

且由文献[12]可知下式成立:

$$\neg\ (\mu_A(x)\Delta\mu_B(x)) = \neg\ \mu_A(x)\ \nabla\neg\ \mu_B(x)$$
$$\neg\ (\mu_A(x)\ \nabla\mu_B(x)) = \neg\ \mu_A(x)\Delta\neg\ \mu_B(x)$$

从而有

$$v_{\bar{R}(A)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[v_A(y)\ \nabla v_R(x,y)] =$$
$$\underset{y\in U}{\Delta}[\neg\ \mu_A(y)\ \nabla\neg\ \mu_R(x,y)] =$$
$$\underset{y\in U}{\Delta}\neg\ [\mu_A(y)\Delta\mu_R(x,y)] =$$
$$\neg\ \nabla_{y\in U}[\mu_A(y)\Delta\mu_R(x,y)] =$$
$$\neg\ \mu_{\bar{R}(A)}(x)$$

即

$$\bar{R}(A) = \{\langle x,\mu_{\bar{R}(A)}(x),\neg\ \mu_{\bar{R}(A)}(x)\rangle \mid x \in U\}$$

为普通二型模糊集。

同理可得

$$\underline{R}(A) = \{\langle x,\mu_{\underline{R}(A)}(x),\neg\ \mu_{\underline{R}(A)}(x)\rangle \mid x \in U\}$$

为普通二型模糊集。

于是 $(\underline{R}(A),\bar{R}(A))$ 为 A 关于 (U,R) 的普通二型模糊粗糙集。由此可见,本文给出的二型直觉模糊粗糙集是文献[10]中的二型模糊粗糙集的推广。

2) 当 R 退化为 $U\times U$ 上的等价关系, A 为 U 上的二型直觉模糊集时,定义 4 中的二型直觉模糊粗糙集退化为如下形式:

$$\bar{R}(A) = \{\langle x,\mu_{\bar{R}(A)}(x),v_{\bar{R}(A)}(x)\rangle \mid x \in U\}$$
$$\underline{R}(A) = \{\langle x,\mu_{\underline{R}(A)}(x),v_{\underline{R}(A)}(x)\rangle \mid x \in U\}$$

其中

$$\mu_{\bar{R}(A)}(x) = \nabla_{y\in[x]_R}\mu_A(y)$$
$$v_{\bar{R}(A)}(x) = \underset{y\in[x]_R}{\Delta} v_A(y)$$
$$\mu_{\underline{R}(A)}(x) = \underset{y\in[x]_R}{\Delta}\mu_A(y)$$
$$v_{\underline{R}(A)}(x) = \nabla_{y\in[x]_R}v_A(y)$$

称 $(\underline{R}(A)、\bar{R}(A))$ 为 A 关于 (U,R) 的粗糙二型直觉模糊集。

下面讨论定义 4 中的二型直觉模糊粗糙近似算子的性质。为此先将文献[12-13]中有关普通二型模糊集之间包含关系的定义推广到二型直觉模糊集。

定义 5 设 A、B 是论域 U 上的 2 个二型直觉模糊集,规定

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U,\mu_A(x) \prec \mu_B(x)$$

且 $v_A(x) \succ v_B(x)$,其中序关系 $\prec$, $\succ$ 定义为

$$\mu_A(x) \prec \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x)\Delta\mu_B(x) = \mu_A(x)$$
$$\Leftrightarrow \mu_A(x)\ \nabla\mu_B(x) = \mu_B(x)$$
$$v_A(x) \succ v_B(x) \Leftrightarrow v_A(x)\ \nabla v_B(x) = v_A(x)$$
$$\Leftrightarrow v_A(x)\Delta v_B(x) = v_B(x)$$

定义 5 中的的序关系具有如下性质。

定理 2 设 A,B,C 是论域 U 上的 3 个二型直觉模糊集,若 $A \subseteq B$,即 $\forall x \in U$, $\mu_A(x) \prec \mu_B(x)$ 且 $v_A(x) \succ v_B(x)$ 。则有下式成立:

$$\mu_A(x)\ \nabla\mu_C(x) \prec \mu_B(x)\ \nabla\mu_C(x)$$
$$v_A(x)\Delta v_C(x) \succ v_B(x)\Delta v_C(x)$$
$$\mu_A(x)\Delta\mu_C(x) \prec \mu_B(x)\Delta\mu_C(x)$$
$$v_A(x)\ \nabla v_C(x) \succ v_B(x)\ \nabla v_C(x)$$

证明 由定义 5 可直接验证。

定理 3 设 $\bar{R}$ 和 $\underline{R}$ 是定义 4 中的上、下近似算子, A、B 是论域 U 上的 2 个二型直觉模糊集,则有下列性质:

1) $\bar{R}(A^c) = \underline{R}^c(A)$, $\underline{R}(A^c) = \bar{R}^c(A)$;

2) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{R}(A) \subseteq \bar{R}(B)$, $\underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$;

3) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \overline{R_1}(A) \subseteq \overline{R_2}(A)$, $\underline{R_2}(A) \subseteq \underline{R_1}(A)$ 。

证明 1) 因为

$$\mu_{\overline{R}(A^c)}(x) = \nabla_{y\in U}[\mu_{A^c}(y)\Delta\mu_R(x,y)] = \nabla_{y\in U}[v_A(y)\Delta\mu_R(x,y)] = v_{\underline{R}(A)}(x),\ v_{\overline{R}(A^c)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[v_{A^c}(y)\ \nabla v_R(x,y)] = \underset{y\in U}{\Delta}[\mu_A(y)\ \nabla v_R(x,y)] = \mu_{\underline{R}(A)}(x)$$

所以

$$\overline{R}(A^c) = \{\langle x,\mu_{\overline{R}(A^c)}(x),v_{\overline{R}(A^c)}(x)\rangle \mid x\in U\} = \{\langle x,v_{\underline{R}(A)}(x),\mu_{\underline{R}(A)}(x)\rangle \mid x\in U\} = \underline{R}^c(A)$$

同理可得：$\underline{R}(A^c) = \overline{R}^c(A)$。

2）若 $A \subseteq B$，即 $\forall x \in U$，$\mu_A(x) \prec \mu_B(x)$ 且 $v_A(x) \succ v_B(x)$，则有

$$\mu_{\overline{R}(A)}(x) = \nabla_{y\in U}[\mu_A(y)\Delta\mu_R(x,y)] \prec \nabla_{y\in U}[\mu_B(y)\Delta\mu_R(x,y)] = \mu_{\overline{R}(B)}(x)$$

$$v_{\overline{R}(A)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[v_A(y)\ \nabla v_R(x,y)] \succ \underset{y\in U}{\Delta}[v_B(y)\ \nabla v_R(x,y)] = v_{\overline{R}(B)}(x)$$

所以，$\overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B)$。同理可得：$\underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$。

3）若 $R_1 \subseteq R_2$，即 $\forall x \in U$，$\mu_{R_1}(x,y) \prec \mu_{R_2}(x,y)$ 且 $v_{R_1}(x,y) \succ v_{R_2}(x,y)$，那么有

$$\mu_{R_1(A)}(x) = \nabla_{y\in U}[\mu_A(y)\Delta\mu_{R_1}(x,y)] \prec \nabla_{y\in U}[\mu_A(y)\Delta\mu_{R_2}(x,y)] = \mu_{R_2(A)}(x)$$

$$v_{R_1(A)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[v_A(y)\ \nabla v_{R_1}(x,y)] \succ \underset{y\in U}{\Delta}[v_A(y)\ \nabla v_{R_2}(x,y)] = v_{R_2(A)}(x)$$

所以，$\overline{R_1}(A) \subseteq \overline{R_2}(A)$。

同理可得：$\underline{R_2}(A) \subseteq \underline{R_1}(A)$。

需要指出的是，由于上文中研究的二型直觉模糊集的运算不满足分配律和吸收律，导致二型直觉模糊近似算子的一些性质不成立。例如

$$\overline{R}(A\cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$$
$$\underline{R}(A\cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$$
$$\overline{R}(A\cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$$
$$\underline{R}(A\cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$$

都不成立。如果限定所有二型直觉模糊集的主隶属度和主非隶属度均为标准的凸一型模糊集，那么上述性质便成立，其原因是：上述性质的证明过程需要使用分配律和吸收律。

为了便于研究和计算，假设下文中讨论的所有二型直觉模糊集都满足如下条件：主隶属度和主非隶属度都是标准的凸一型模糊集。

定理 4　设 $\overline{R}$ 和 $\underline{R}$ 是定义 4 中的上、下近似算子，A、B 是论域 U 上的 2 个二型直觉模糊集，则有下列性质：

1）$\overline{R}(A\cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$，$\underline{R}(A\cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$；

2）$\overline{R}(A\cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$，$\underline{R}(A\cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$。

证明　1）对于 $\forall x \in U$，有

$$\mu_{\overline{R}(A\cup B)}(x) = \nabla_{y\in U}[\mu_{A\cup B}(y)\Delta\mu_R(x,y)] = \nabla_{y\in U}[(\mu_A(y)\ \nabla\mu_B(y))\Delta\mu_R(x,y)] = \nabla_{y\in U}\{[\mu_A(y)\Delta\mu_R(x,y)]\ \nabla[\mu_B(y)\Delta\mu_R(x,y)]\} = \{\nabla_{y\in U}[\mu_A(y)\Delta\mu_R(x,y)]\}\ \nabla\{\nabla_{y\in U}[\mu_B(y)\Delta\mu_R(x,y)]\} = \mu_{\overline{R}(A)}(x)\ \nabla\mu_{\overline{R}(B)}(x) = \mu_{\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)}(x)$$

类似地，有

$$v_{\overline{R}(A\cup B)}(x) = \underset{y\in U}{\Delta}[v_{A\cup B}(y)\ \nabla v_R(x,y)] = \underset{y\in U}{\Delta}[(v_A(y)\Delta v_B(y))\ \nabla v_R(x,y)] = v_{\overline{R}(A)}(x)\Delta v_{\overline{R}(B)}(x) = v_{\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)}(x)$$

所以，$\overline{R}(A\cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$。

同理可得：$\underline{R}(A\cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$。

4）因为 $A\cap B \subseteq A,B$，由定理 3 的性质(2)有

$$\overline{R}(A\cap B) \subseteq \overline{R}(A),\overline{R}(B)$$

所以，$\overline{R}(A\cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$。

同理可得：$\underline{R}(A\cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$。

3　二型直觉模糊关系与近似算子的特征联系

定义 6　设 R 是论域 $U\times U$ 上的二型直觉模糊关系，规定

1）R 是自反的 $\Leftrightarrow \forall x \in U$，$\mu_R(x,x) = \frac{1}{1}$ 且 $v_R(x,x) = \frac{1}{0}$。

2）R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall x,y \in U$，$\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$ 且 $v_R(x,y) = v_R(y,x)$。

3）R 是传递的 $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in U$，$\nabla_{y\in U}[\mu_R(x,y)\Delta\mu_R(y,z)] \prec \mu_R(x,z)$ 且 $\underset{y\in U}{\Delta}[v_R(x,y)\nabla v_R(y,z)] \succ v_R(x,z)$。

定义 7　对于 $\forall y \in U$，二型单值直觉模糊集 1_y 和其补集 $1_{U-\{y\}}$ 分别定义如下：

$$\mu_{1_y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1}, x = y, \\ \frac{1}{0}, x \neq y; \end{cases}\quad v_{1_y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{0}, x = y, \\ \frac{1}{1}, x \neq y; \end{cases}$$

$$\mu_{1_{U-\{y\}}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{0}, x = y, \\ \frac{1}{1}, x \neq y; \end{cases}\quad v_{1_{U-\{y\}}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1}, x = y, \\ \frac{1}{0}, x \neq y \end{cases}$$

定理 5　设 (U,R) 是一个二型直觉模糊近似空间,A 是论域 U 上的一个二型直觉模糊集,则下列性质成立:

1)若 R 是自反的,则 $\underline{R}(A)\subseteq A\subseteq\overline{R}(A)$ 。

2)若 R 是对称的,则 $\forall x,y\in U$,$\mu_{\overline{R}(1_x)}(y)=\mu_{\overline{R}(1_y)}(x)$,$v_{\overline{R}(1_x)}(y)=v_{\overline{R}(1_y)}(x)$,$\mu_{\underline{R}(1_{U-\{y\}})}(x)=\mu_{\underline{R}(1_{U-\{x\}})}(y)$,$v_{\underline{R}(1_{U-\{y\}})}(x)=v_{\underline{R}(1_{X-\{x\}})}(y)$。

3)若 R 是传递的,则 $\overline{R}(\overline{R}(A))\subseteq\overline{R}(A)$,$\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(\underline{R}(A))$ 。

证明　1)若 R 是自反的,则 $\forall x\in U$,$\mu_R(x,x)=\frac{1}{1}$ 且 $v_R(x,x)=\frac{1}{0}$ 。

那么有

$$\mu_{\underline{R}(A)}(x)=\Delta_{y\in U}[\mu_A(y)\nabla v_R(x,y)]\prec \mu_A(x)\nabla v_R(x,x)=\mu_A(x)\nabla\frac{1}{0}=\mu_A(x)$$

并且

$$v_{\underline{R}(A)}(x)=\nabla_{y\in U}[v_A(y)\Delta\mu_R(x,y)]\succ v_A(x)\Delta\mu_R(x,x)=v_A(x)\Delta\frac{1}{1}=v_A(x)$$

所以,$\underline{R}(A)\subseteq A$ 。同理可得:$A\subseteq\overline{R}(A)$ 。

即 $\underline{R}(A)\subseteq A\subseteq\overline{R}(A)$ 。

2)若 R 是对称的,则 $\forall x,y\in U$,$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$ 且 $v_R(x,y)=v_R(y,x)$ 。

那么有

$$\mu_{\overline{R}(1_x)}(y)=\nabla_{t\in U}[\mu_{1_x}(t)\Delta\mu_R(y,t)]=[\mu_{1_x}(x)\Delta\mu_R(y,x)]\nabla\{\nabla_{t\neq x}[\mu_{1_x}(t)\Delta\mu_R(y,t)]\}=[\frac{1}{1}\Delta\mu_R(y,x)]\nabla\{\nabla_{t\neq x}[\frac{1}{0}\Delta\mu_R(y,t)]\}=\mu_R(y,x)\nabla\{\frac{1}{0}\Delta[\nabla_{t\neq x}\mu_R(y,t)]\}=[\mu_R(y,x)\nabla\frac{1}{0}]\Delta\{\mu_R(y,x)\nabla[\nabla_{t\neq x}\mu_R(y,t)]\}=\mu_R(y,x)\Delta\{\mu_R(y,x)\nabla[\nabla_{t\neq x}\mu_R(y,t)]\}=\mu_R(y,x)$$

类似地,有 $\mu_{\overline{R}(1_y)}(x)=\nabla_{t\in U}[\mu_{1_y}(t)\Delta\mu_R(x,t)]=\mu_R(x,y)$,所以,$\mu_{\overline{R}(1_x)}(y)=\mu_{\overline{R}(1_y)}(x)$ 。

同理可得

$$v_{\overline{R}(1_x)}(y)=v_{\overline{R}(1_y)}(x)$$
$$\mu_{\underline{R}(1_{U-\{y\}})}(x)=\mu_{\underline{R}(1_{U-\{x\}})}(y)$$
$$v_{\underline{R}(1_{U-\{y\}})}(x)=v_{\underline{R}(1_{X-\{x\}})}(y)$$

3)若 R 是传递的,则 $\forall x,y,z\in U$,$\nabla_{y\in U}[\mu_R(x,y)\Delta\mu_R(y,z)]\prec\mu_R(x,z)$

且 $\Delta_{y\in U}[v_R(x,y)\nabla v_R(y,z)]\succ v_R(x,z)$ 。

那么有

$$\mu_{\overline{R}(\overline{R}(A))}(x)=\nabla_{y\in U}[\mu_{\overline{R}(A)}(y)\Delta\mu_R(x,y)]=\nabla_{y\in U}\{[\nabla_{t\in U}(\mu_A(t)\Delta\mu_R(y,t))]\Delta\mu_R(x,y)\}=\nabla_{y\in U}\{\nabla_{t\in U}[(\mu_A(t)\Delta\mu_R(y,t))\Delta\mu_R(x,y)]\}=\nabla_{t\in U}\nabla_{y\in U}[\mu_A(t)\Delta(\mu_R(y,t)\Delta\mu_R(x,y))]=\nabla_{t\in U}\{\mu_A(t)\Delta[\nabla_{y\in U}(\mu_R(y,t)\Delta\mu_R(x,y))]\}\prec\nabla_{t\in U}[\mu_A(t)\Delta\mu_R(x,t)]=\mu_{\overline{R}(A)}(x)$$

类似地,有

$$v_{\overline{R}(\overline{R}(A))}(x)=\Delta_{y\in U}[v_{\overline{R}(A)}(y)\nabla v_R(x,y)]\succ v_{\overline{R}(A)}(x)$$

所以,$\overline{R}(\overline{R}(A))\subseteq\overline{R}(A)$ 。

同理可得:$\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(\underline{R}(A))$

4　结束语

由于二型模糊系统具有较强的鲁棒性,在鲁棒控制、信号处理和系统辨识领域具有广泛的应用前景,因此将二型模糊集与粗糙集融合建模无疑具有理论意义和实际价值。直觉模糊集因其在对问题的描述上比模糊集更细腻,成为模糊集的自然推广,因此二型直觉模糊集与粗糙集的融合在实际应用中将会有更好地效果。本文将二型直觉模糊集和粗糙集相融合,建立二型直觉模糊粗糙集模型,同时给出了上、下近似算子的一些性质,为二型直觉模糊信息系统的约简奠定了基础,也为二型直觉模糊信息系统的应用提供了理论保障。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ATANASSOV K T. Intuitionstic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] ATANASSOV K T, GARGOV G. Interval valued intuitionstic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[4] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. Information Science, 1975, 8(3): 199-249.

[5] MENDEL J M, JOHN R I B. Type-2 fuzzy sets made simple [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(2): 117-127.

[6] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[7] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17 (2-3): 191-209.

[8] CORNELIS C, DE COCK M, KERRE E E. Intuitionistic fuzzy rough sets: at the crossroads of imperfect knowledge [J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 260-270.

[9] ZHOU Lei, WU Weizhi. On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators [J]. Information Sciences, 2008, 178(11): 2448-2465.

[10] 赵涛, 肖建. 二型模糊粗糙集[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 385-390.
ZHAO Tao, XIAO Jian. Type-2 fuzzy rough sets[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 385-390.

[11] 赵涛, 肖建. 二型直觉模糊集[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1215-1222.
ZHAO Tao, XIAO Jian. Type-2 intuitionistic fuzzy sets [J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(9): 1215-1222.

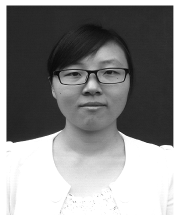
[12] KARNIK N N, MENDEL J M. Operations on type-2 fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 327-348.

[13] MIZUMOTO M, TANAKA K. Some properties of fuzzy sets of type2[J]. Information and Control, 1976, 31(4): 312-340.

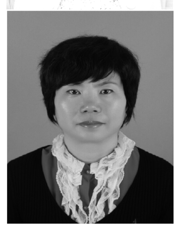
[14] 邓廷权, 王占江, 汪培培, 等. 二型模糊集的模糊熵研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(3): 408-412.
DENG Tingquan, WANG Zhanjiang, WANG Peipei, et al. Study on fuzzy entropy of type-2 fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2012, 27(3): 408-412.

作者简介:

王金英,女,1981 年生,讲师,主要研究方向为粗糙集理论、模糊集理论。



韩晓冰,女,1988 年生,研究生,主要研究方向为粗糙集理论与应用。



王艳平,女,1965 年生,教授,主要研究方向为粗糙集理论、模糊集理论。发表学术论文 30 余篇。

2016 第 8 届 SPIE 图像处理国际会议
2016 The 8th International Conference on Digital Image Processing (ICDIP 2016)

数字图像处理国际会议自 2009 年起,已先后在泰国曼谷,新加坡,中国成都,马来西亚吉隆坡,中国北京,希腊雅典以及美国洛杉矶成功举行,大会已经成为相关专业人员的一个重要交流平台。第八届数字图像处理国际会议将于 2016 年 5 月 20 日~22 日再次在成都举行。

本次大会由新加坡计算机科学与信息技术学会和四川省计算机学会联合举办,四川省计算机学会理事长张景中院士担任大会的名誉主席,由美国新罕布什尔大学的 Yuri Rzhanov 教授和北京大学的林宙辰教授联合担任顾问委员会委员;由美国亚利桑那州立大学的 Charles M. Falco 教授,中国科学院成都计算机应用研究所所长王晓宇研究员,成都信息工程大学校长周激流教授联合担任本次大会的大会主席;由新加坡南洋理工大学的 Xudong Jiang 教授,四川大学计算机学院/软件学院院长章毅教授,电子科技大学信息与软件工程学院院长秦志光教授,西南交通大学信息科学与技术学院院长潘炜教授担任大会的程序委员会主席。

关于 ICDIP 前 7 届的会议详情,请查看:http://www.icdip.org/pub.html

会议网站:http://www.icdip.org/index.html