第 10 卷第 5 期　　智　能　系　统　学　报　　Vol.10 №.5
2015 年 10 月　　CAAI Transactions on Intelligent Systems　　Oct. 2015

DOI:10.11992/tis.201410005
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20151008.1000.006.html

命题逻辑的子句集中文字的分类

邓鹏[1,2],徐扬[1,2]
(1. 西南交通大学 数学学院,四川 成都 611756; 2. 西南交通大学 智能控制开发中心,四川 成都 610031)

摘　要:检测和消除命题逻辑公式中的冗余文字,是人工智能领域广泛研究的基本问题。针对命题逻辑的子句集中子句的划分,结合冗余子句和冗余文字的概念,将命题逻辑的子句集中的文字分为必需文字、有用文字和无用文字 3 类,并分别给出其定义。讨论 3 种文字与无冗余等价子集的性质,给出其等价子集的等价描述方法。得到题逻辑的子句集中必需文字、有用文字和无用文字的判定方法,借助子句集的可满足性得到 3 种文字与子句集的可满足性的等价条件。上述结果对命题逻辑中文字属性的判断提供了多种可选择方法,同时为命题逻辑公式的化简奠定了理论基础。

关键词:命题逻辑;子句集;冗余子句;冗余文字;可满足性
中图分类号:TH186　　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-4785(2015)05-0736-05

中文引用格式:邓鹏,徐扬. 命题逻辑的子句集中文字的分类[J]. 智能系统学报, 2015,10(5): 736-740.
英文引用格式:DENG Peng, XU Yang. Classification of the characters in the set of clauses of propositional logic[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2015, 10(5): 736-740.

Classification of the characters in the set of clauses of propositional logic

DENG Peng[1,2], XU Yang[1,2]
(1. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China; 2. Intelligent Control Development Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The detection and elimination of redundant clauses from prepositional logic formulas is a fundamental issue that has been widely researched in artificial intelligence (AI). The concept for division in the set of clauses of propositional logic is combined with the concepts of redundant clause and redundant character so as to research the classification of the characters in the set of clauses of propositional logic. The characters are classified into three categories: necessary characters, useful characters, and useless characters, and thereby definitions of them are given, respectively. The property of three kinds of characters and irredundant equivalent subsets is discussed, some equivalent descriptions of these three kinds of characters and non-redundant equivalent subsets are given respectively. The judging method for these three kinds of characters in the set of clauses of propositional logic is obtained, and by virtue of the satisfiability of the set of clauses, the equivalent conditions of satisfiability for these three kinds of characters and the set of clauses are derived. These results provide a variety of alternative methods for judging the attributes of the characters of the set of clauses in propositional logic, laying a theoretical foundation for simplifying propositional logic formulas.

Keywords: propositional logic; set of clauses; redundant clause; redundant character; satisfiability

在人工智能领域,知识表示的方式多种多样,子句形式仍不失为一种重要的知识表达方式。子句表示广泛应用于机器定理证明、专家系统和知识库等领域。在一个知识库中,如果有部分知识可以删除并且不减少整个知识库携带的信息,那么称这个知识库是冗余的。冗余以及与其密切相关的化简已经成为具有重要现实意义的问题。命题逻辑中子句由

收稿日期:2014-10-08.　**网络出版日期**:2015-10-08.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61175055, 61305074); 四川省科技支撑计划资助项目(2011FZ0051).
通信作者:邓鹏. E-mail:dengpengswjtu@163.com.

文字的析取组成,因此能够对其中的文字进行科学合理的分类对研究冗余文字和冗余子句很有必要,这些理论为归结自动推理奠定了基础。

逻辑公式的化简是计算机科学和人工智能领域重要的研究方向。逻辑上的冗余问题已被许多学者广泛研究[1-4],包括不同计算问题的复杂性的刻画。其中,主要包括冗余性在实际可满足性求解中的重要作用的研究[5-11]。P.Liberatore[1]对命题逻辑中的子句集进行了分类,给出了冗余子句的一些等价条件和性质。翟翠红等[12]研究了命题逻辑中的冗余子句和冗余文字,讨论了子句集的无冗余等价子集。唐世辉[13]研究了命题逻辑中子句集的冗余性,将命题逻辑中子句分为绝对冗余、相对冗余和无冗余 3 类。因此,本文主要深入研究命题逻辑的子句集中文字的特征,将命题逻辑的子句集中的文字划分为有用文字、必需文字和无用文字,讨论 3 种文字的关系。最后得到有用文字、必需文字和无用文字的判定方法,为命题逻辑公式的化简提供理论支撑。

1　预备知识

在命题逻辑公式中,称原子公式及其否定叫做文字,有限多个文字的析取叫子句,只含有一个文字的子句称为单子句。

定义 1[14]　设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_m)\in F(S)$,则当 A 具有形式 $(Q_{11}\vee Q_{12}\vee\cdots\vee Q_{1n})\wedge\cdots\wedge(Q_{m1}\vee Q_{m2}\vee\cdots\vee Q_{mn})$ 时,称 A 为合取范式(conjunction normal form, CNF),这里 $Q_{ij}=p_j$ 或 $Q_{ij}=\neg p_j(j=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,m)$。

定义 2[15]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中的子句集。显然,D 是 S 中的冗余子句,当且仅当 $C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_m\wedge D\equiv C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_m$。

一个子句是冗余的,暗示此子句可以从子句集中删除,不会影响子句集所要表示的信息。同理,一个子句集是冗余的,可以定义为它和它的一个真子集等价。

定义 3[1] 子句集 S 是冗余的,当且仅当存在 $S'\subset S$,使 $S'=S$。

在命题逻辑中,此定义和如下说法是等价的:

1)存在 $S'\subset S$,使 $S'\models S$;

2)S 中含有冗余子句。

定义 4[1]　设 S 是子句集,$C\in S$,

1) 称 C 在 S 中是必需的(necessary),如果对于 S 的任一无冗余等价子集 S',有 $C\in S'$;

2)称 C 在 S 中是有用的(useful),如果存在 S 的一个无冗余等价子集 S',使 $C\in S'$;

3)称 C 在 S 中是无用的(useless),如果对于 S 的任一无冗余等价子集 S',有 $C\notin S'$。

定理 1[1]　设 S 是子句集,$C\in S$,C 在 S 中是必需的当且仅当 $S-\{C\}\not\models C$。

定理 2[12]　设 S 是子句集,$C\in S$。C 在 S 中是有用的当且仅当存在 S 的一个无冗余等价子集 S',使 $S'-\{C\}\not\models C$。

定理 3[12]　设 S 是子句集,$C\in S$。C 在 S 中是无用的当且仅当 S 的无冗余等价子集恰为 $S-\{C\}$ 的无冗余等价子集。

定理 4[13]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中子句集,且 D 中不含互补文字。D 是 S 中冗余子句当且仅当子句集 $S'=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}\cup\{\underline{\overline{D}}\}$ 不可满足。

定义 5[12]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中子句集,$D=x\vee D_1$,其中 x 是一文字,D_1 是一子句,如果 $D\wedge C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_m=D_1\wedge C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_m$,则称 x 是 D 中关于 S 的冗余文字。

定理 5[12]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中的子句集,$D=x\vee D_1$,如果 D_1 是 $S'=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D_1\}$ 中的冗余子句,则 x 是 D 中关于 S 的冗余文字。

定理 6[12]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中子句集,$D=x\vee D_1$,x 是 D 中关于 S 的冗余文字当且仅当 D_1 是子句集 $S'=\{D_1,x,C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句。

定理 7[12]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中子句集,且 D 中不含互补文字。D 是 S 中冗余子句当且仅当子句集 $S'=\{C_1-D,C_2-D,\cdots,C_m-D\}$ 不可满足。

对于子句集 S,令 $S|_x=\{C|C\in S$ 且 $\{x,\neg x\}\cap C=\varnothing\}\cup\{C\setminus\{\neg x\}|C\in S$ 且 $\neg x\in C\}$,$S|_{\underline{A}}=(\cdots((S|_{x_1})|_{x_2})\cdots|_{x_n})$,其中 $\underline{A}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

定理 8[13]　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中子句集,子句集 $S'=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}\cup\{\underline{\overline{D}}\}$ 不可满足当且仅当子句集 $(S\setminus\{D\})|_{\underline{D}}$ 不可满足。

2　子句集中文字的分类

定义 6　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果对于 S 中的任一子句 C_i,若有 $C_i=x\vee D_i(i\in\{1,2,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D_i 是一子句,且 x 不是 C_i 中关于 S 的冗余文字,则称 x 是 S 中的必需文字。

定义 7　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中

的子句集，如果存在 S 中的一个子句 C_i，若有 $C_i = x \vee D(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D 是一子句，且 x 不是 C_i 中关于 S 的冗余文字，则称 x 是 S 中的有用文字。

定义 8 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果对于 S 中的任一子句 C_i，若有 $C_i = x \vee D_i(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D_i 是一子句，且 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字，则称 x 是 S 中的无用文字。

从定义 6~8 可以看出，子句集中的必需文字一定是有用文字，有用文字不一定是必需文字，同时有用和无用是 2 个相对的概念，子句集中的必需文字一定是非冗余文字，子句集中的无用文字一定是冗余文字。

定理 9 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果对于 S 中的任一子句 C_i，若有 $C_i = x \vee D_i(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D_i 是一子句，x 是 S 中的必需文字当且仅当 $S'_i - \{D_i\} \not\models D_i$，$S'_i = \{D_i, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}(i \in \{1,2,\cdots,m\})$。

证明 因为 x 是 S 中的必需文字，所以 x 一定不是 C_i 关于 S 的冗余文字，由定理 6 知 x 不是 C_i 中关于 S 的冗余文字当且仅当 D_i 不是子句集 $S_i' = \{D_i, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}(i \in \{1,2,\cdots,m\})$ 中的冗余子句，因此 D_i 在 S_i' 中是必需的，由定理 1 知 D_i 在 S_i' 中是必需的当且仅当 $S_i' - \{D_i\} \not\models D_i$。

推论 1 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果存在 S 中的一个子句 C_i，若有 $C_i = x \vee D(i \in \{1,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D 是一子句，则 x 是 S 中的有用文字当且仅当 $S' - \{D\} \not\models D$，其中 $S' = \{D, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_m\}$。

定理 10 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果存在 S 中的一个子句 C_i，若有 $C_i = x \vee D(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D 是一子句，则 x 是 S 中的有用文字当且仅当存在 S' 的一个无冗余等价子集 S'' 使 $S'' - \{D\} \not\models D$，其中 $S' = \{D, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}$。

证明 因为 x 是 S 中的有用文字，所以 x 一定不是 C_i 关于 S 的冗余文字，由定理 6 知 x 不是 C_i 中关于 S 的冗余文字当且仅当 D 不是子句集 $S' = \{D, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}$ 中的冗余子句，因此 D 在 S' 中是有用的，由定理 2 知 D 在 S' 中是有用的当且仅当存在 S' 的一个无冗余等价子集 S'' 使 $S'' - \{D\} \not\models D$，$S' = \{D, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}$。

定理 11 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果对于 S 中的任一子句 C_i，若有 $C_i = x \vee D_i(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D_i 是一子句，则称 x 是 S 中的无用文字当且仅当 S_i' 的无冗余等价子集恰为 $S_i' - \{D_i\}$ 的无冗余等价子集，其中 $S'_i = \{D_i, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}(i \in \{1,2,\cdots,m\})$。

证明 因为 x 是 S 中的无用文字，所以 x 一定是 C_i 关于 S 的冗余文字，由定理 6 知 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字当且仅当 D_i 是子句集 $S_i' = \{D_i, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}(i \in \{1,\cdots,m\})$ 中的冗余子句，因此 D_i 在 S_i' 中是无用的，由定理 3 知 D_i 在 S_i 中是无用的当且仅当 S_i' 的无冗余等价子集恰为 $S_i' - \{D_i\}$ 的无冗余等价子集。

3 子句集中文字的判定

根据子句集中文字的分类和冗余子句与子句集的可满足性判定的关系可以得到如下定理。

定理 12 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果对于 S 中的任一子句 C_i，有 $C_i = x \vee D_i(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D_i 是一子句，且 D_i 中不含互补文字，则 x 是 S 中的无用文字当且仅当子句集 $\{x, C_1 - D_i, \cdots, C_{i-1} - D_i, C_{i+1} - D_i, \cdots, C_m - D_i\}(i \in \{1,2,\cdots,m\})$ 不可满足。

证明 若 x 是 S 中的无用文字，则一定存在 $C_i \in S$ 且 $C_i = x \vee D_i$，使 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字，则 D_i 是子句集 $S_i' = \{D_i, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}$ 中的冗余子句，于是由定理 7 知 D_i 是子句集 $S_i' = \{D_i, x, C_1 \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}$ 中的冗余子句当且仅当子句集 $\{x, C_1 - D_i, \cdots, C_{i-1} - D_i, C_{i+1} - D_i, \cdots, C_m - D_i\}$ 不可满足。

定理 13 设 $S = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集，如果对于 S 中的任一子句 C_i，有 $C_i = x \vee D_i(i \in \{1,2,\cdots,m\})$，其中 x 是一文字，D_i 是一子句，且 D_i 中不含互补文字，则 x 是 S 中的必需文字当且仅当子句集 $\{x, C_1 - D_i, \cdots, C_{i-1} - D_i, C_{i+1} - D_i, \cdots, C_m - D_i\}(i \in \{1,2,\cdots,m\})$ 可满足。

证明 7 （充分性）若 x 不是 S 中的必需文字，则存在 $C_i \in S$ 且 $C_i = x \vee D_i$，使 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字，则 D_i 是子句集 $S_i' = \{D_i, x, C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_m\}$ 中的冗余子句，即 $D_i \wedge x \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_{i-1} \wedge C_{i+1} \wedge \cdots \wedge C_m = x \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_{i-1} \wedge C_{i+1} \wedge \cdots \wedge C_m$。又因为 $C_i = x \vee D_i$，所以 $x \notin D_i$，即 $x - D_i = x$。于是由定理 7 知子句集 $\{x, C_1 - D_i, \cdots, C_{i-1} - D_i, C_{i+1} - D_i, \cdots, C_m - D_i\}(i \in \{1,2,\cdots,m\})$ 不可满足，矛盾。

（必要性）假设子句集 $\{x, C_1 - D_i, \cdots, C_{i-1} - D_i, C_{i+1} - D_i, \cdots, C_m - D_i\}$ 不可满足，由定理 7 知 D_i 是子

句集 $S_i'=\{D_i,x,C_i,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,则 x 不是 S 中的必需文字,矛盾。

定理 14　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果存在 S 中的一个子句 C_i,若有 $C_i=x\vee D(i\in\{1,2,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D 是一子句,则 x 是 S 中的有用文字当且仅当子句集 $\{x,C_1-D,\cdots,C_{i-1}-D,C_{i+1}-D,\cdots,C_m-D\}$ 可满足。

证明　(充分性)若 x 不是 S 中的有用文字,则存在 $C_i\in S$ 且 $C_i=x\vee D$,使 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字,则 D 是子句集 $S'=\{D,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,即 $D\wedge x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{i-1}\wedge C_{i+1}\wedge\cdots\wedge C_m=x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{i-1}\wedge C_{i+1}\wedge\cdots\wedge C_m$。又因为 $C_i=x\vee D$,所以 $x\notin D$,于是由定理 7 知子句集 $\{x,C_1-D,\cdots,C_{i-1}-D,C_{i+1}-D,\cdots,C_m-D\}$ 不可满足,矛盾。

(必要性)假设子句集 $\{x,C_1-D,\cdots,C_{i-1}-D,C_{i+1}-D,\cdots,C_m-D\}$ 不可满足,由定理 7 知 D 是子句集 $S'=\{D,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,则 x 不是 S 中的有用文字,矛盾。

定理 15　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果对于 S 中的任一子句 C_i,有 $C_i=x\vee D_i(i\in\{1,2,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D_i 是一子句,且 D_i 中不含互补文字,则 x 是 S 中的无用文字当且仅当子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D_i}\}$ 不可满足。

证明　若 x 是 S 中的无用文字,则一定存在 $C_i\in S$ 且 $C_i=x\vee D_i$,使 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字,由定理 1.6 知 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字当且仅当 D_i 是子句集 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,于是再由定理 4 知 D_i 是子句集 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句当且仅当子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D_i}\}$ 不可满足。

定理 16　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果对于 S 中的任一子句 C_i,有 $C_i=x\vee D_i(i\in\{1,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D_i 是一子句,且 D_i 中不含互补文字,则 x 是 S 中的必需文字当且仅当子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D_i}\}$ 可满足。

证明　(充分性)若 x 不是 S 中的必需文字,则存在 $C_i\in S$ 且 $C_i=x\vee D_i$,使 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字,则 D_i 是子句集 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,于是由定理 4 知子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D_i}\}$ 不可满足,这显然与已知矛盾。

(必要性)假设子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D_i}\}$ 不可满足,那么由定理 4 知 D_i 是子句集 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,则 x 不是 S 中的必需文字,矛盾。

定理 17　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果存在 S 中的一个子句 C_i,若有 $C_i=x\vee D(i\in\{1,2,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D 是一子句,则 x 是 S 中的有用文字当且仅当子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D}\}$ 可满足。

证明　(充分性)若 x 不是 S 中的有用文字,则存在 $C_i\in S$ 且 $C_i=x\vee D$,使 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字,则 D 是子句集 $S'=\{D,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,于是由定理 4 知子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D}\}$ 不可满足,这显然与已知矛盾。

(必要性)假设子句集 $\{x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}\cup\{\overline{D}\}$ 不可满足,那么由定理 4 知 D 是子句集 $S'=\{D,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,则 x 不是 S 中的有用文字,矛盾。

定理 18　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果对于 S 中的任一子句 C_i,有 $C_i=x\vee D_i(i\in\{1,2,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D_i 是一子句,且 D_i 中不含互补文字,则 x 是 S 中的无用文字当且仅当子句集 $(S'_i\setminus\{D_i\})|_{\overline{D_i}}$ 不可满足,其中 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$。

证明　由于 $C_i\in S$ 且 $C_i=x\vee D_i$,x 是 S 中的无用文字,由定义知 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字,所以 D_i 是子句集 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,再由定理 4 和定理 8 可以得出充要条件。

定理 19　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果对于 S 中的任一子句 C_i,有 $C_i=x\vee D_i(i\in\{1,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D_i 是一子句,且 D_i 中不含互补文字,则 x 是 S 中的必需文字当且仅当子句集 $(S_i'\setminus\{D_i\})|_{\overline{D_i}}$ 可满足,其中 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$。

证明　(充分性)由于 $C_i\in S$,$C_i=x\vee D_i$,假设 x 不是 S 中的必需文字,由定义可以知 x 是 C_i 中关于 S 的冗余文字,所以 D_i 是子句集 $S_i'=\{D_i,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,再由定理 4 和定理 8 可以得出子句集 $(S_i'\setminus\{D_i\})|_{\overline{D_i}}$ 不可满足,矛盾。

(必要性)假设 $(S'_i\setminus\{D_i\})|_{\overline{D_i}}$ 不可满足由定理

4 和定理 8 可知 x 一定是 C_i 关于 S 的冗余文字,这与 x 是 S 中的必需文字矛盾。

定理 20　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,如果存在 S 中的一个子句 C_i,若有 $C_i=x\vee D(i\in\{1,2,\cdots,m\})$,其中 x 是一文字,D 是一子句,则 x 是 S 中的有用文字当且仅当子句集 $(S'\setminus\{D\})|_{\bar{D}}$ 可满足,其中 $S'=\{D,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$。

证明　(充分性)由于 $C_i\in S,C_i=x\vee D$,假设 x 不是 S 中的有用文字,由定义知 x 一定是 C_i 中关于 S 的冗余文字,所以 D 是子句集 $S'=\{D,x,C_1,\cdots,C_{i-1},C_{i+1},\cdots,C_m\}$ 中的冗余子句,再由定理 4 和定理 8 可以得出子句集 $(S'\setminus\{D\})|_{\bar{D}}$ 不可满足,矛盾。

(必要性)假设 $(S'\setminus D\})|_{\bar{D}}$ 不可满足由定理 4 和定理 8 可知 x 一定是 C_i 中关于 S 的冗余文字,这与 x 是 S 中的有用文字矛盾。

4　结束语

本文主要研究命题逻辑的子句集中必需文字、有用文字和无用文字的特征,讨论它们相应的等价条件。然后运用冗余文字和冗余子句的知识,得到必需文字、有用文字和无用文字与子句集可满足性的判定方法。该方法丰富了命题逻辑的子句集中文字的分类方法,得到子句集中文字特征的判定方法,为命题逻辑公式的化简奠定了理论基础。但是目前的冗余文字判定方法对子句集中文字属性的判断处理过程比较复杂,下一步将继续深入研究子句集的分类,为命题逻辑中子句集的化简和高效的归结自动推理提供理论支撑。

参考文献:

[1] LIBERATORE P. Redundancy in logic I: CNF propositional formulae[J]. Artificial Intelligence, 2005, 163(2): 203-232.

[2] LIBERATORE P. Redundancy in logic II: 2CNF and Horn propositional formulae[J]. Artificial Intelligence, 2008, 172(2/3): 265-299.

[3] BOUFKHAD Y, ROUSSEL O. Redundancy in random SAT formulas[C]// Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence. [S.l.], 2000: 273-278.

[4] FOURDRINOY O, GRÉGOIRE É, MAZURE B, et al. Eliminating redundant clauses in sat instances[M]// Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems. Berlin/Heidelberg: Springer, 2007: 71-83.

[5] KULLMANN O. Constraint satisfaction problems in clausal form II: Minimal unsatisability and conict structure[J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 109(1): 83-119.

[6] MANTHEY N. Coprocessor 2.0—A flexible CNF simplifier[J]. Theory and Applications of Satisfiability Testing-SAT, 2012, 7317: 436-441.

[7] BELOV A, JANOTA M, LYNCE I, et al. On computing minimal equivalent subformulas[J]. Principles and Practice of Constraint Programming, 2012, 7514: 158-174.

[8] 张建. 逻辑公式的可满足性判定——方法、工具及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 22-30.

[9] 许有军. 基于扩展规则的若干 SAT 问题研究[D]. 长春: 吉林大学, 2011: 15-28.
XU Youjun. Research on several SAT issues based on extension rule[D]. Changchun, China: Jilin University, 2011: 15-28.

[10] CHANG C L, LEE R C T. Symbolic logic and mechanical theorem proving[M]. New York: Academic Press, 1973: 19-73, 22-25.

[11] LIU Yi, JIA Hairui, XU Yang. Determination of 3-Ary α-resolution in lattice-valued propositional logic LP(X)[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2013, 6(5): 943-953.

[12] 翟翠红, 秦克云. 命题逻辑公式中的冗余子句及冗余文字[J]. 计算机科学, 2013, 40(5): 48-50.
ZHAI Cuihong, QIN Keyun. Redundancy clause and redundancy literal of propositional logic[J]. Computer Science, 2013, 40(5): 48-50.

[13] 唐世辉. 命题逻辑中子句集的冗余性研究[D].成都: 西南交通大学, 2014: 30-35.
TANG Shihui. Research redundancy of set of clauses in propositional logic[D]. Chengdu, China: Southwest Jiaotong University, 2014: 30-35.

[14] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 16-25.
WANG Guojun. Introduction to mathematical logic and resolution principle[M]. Beijing: Science Press, 2006: 16-25.

[15] MUGGLETON S. Inductive logic programming[J]. New Generation Computing, 1991, 8(4): 295-318.

作者简介:

邓鹏,男,1989 年生,硕士研究生,主要研究方向为逻辑与推理。

徐扬,男,1956 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为逻辑代数、代数逻辑、不确定性推理和自动推理。