DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201310076
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3969/j.issn.1673-4785.201310076.html

逻辑及数学演算中的不动项与不可判定命题(Ⅰ)

张金成
(中央党校函授学院,安徽 广德 242200)

摘 要:不动点是一个广泛而深刻的数学现象,它已经渗透到数学的各个领域。把不动点推广到逻辑思维领域,将证明 Russel 悖论是集合论中的不动项,Gödel 不可判定命题是自然数系统 N 中的不动项,Cantor 对角线方法构造的项是不动项,不可判定的 Turing 机也是不动项。进一步可以证明,当一个已知集合 U 可以分割成正、反集合时,不动项不在正集或反集之中,不动项一定是 U 外不动项,U 外不动项的逻辑性质相对于 U 已经发生变异,是未定义项,U 外不动项命题是不可判定的,这是系统的固有现象。自然数系统 N 中同样存在不动项,不动项的存在与不可判定,并不影响正、反集合的递归性与系统的完全性,因此,Gödel 不完全定理的证明不成立,Cantor 对角线方法证明是错误的,Turing 停机问题证明也是错误的。“系统 N 能否完全”? 实数是否可数? Turing 停机问题是否可判定? 都必须重新思考。

关键词:正项;反项;不动项;悖论; U 外不动项;不可判定命题;不完全定理;对角线方法;不可数;停机问题
中图分类号: TP18;O141 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-4785(2014)04-499-12

中文引用格式:张金成. 逻辑及数学演算中的不动项与不可判定命题(Ⅰ)[J]. 智能系统学报, 2014, 9(4): 499-510.
英文引用格式:ZHANG Jincheng. Fixed terms and undecidable propositions in logical and mathematical calculus(Ⅰ)[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(4): 499-510.

Fixed terms and undecidable propositions in logical and mathematical calculus(Ⅰ)

ZHANG Jincheng
(Correspondence School of the C.P.C. Central Party School, Guangde 242200, China)

Abstract: As a kind of broad and deep mathematical phenomenon, the fixed point has penetrated into all fields of mathematics. In this paper, the fixed point is extended to the logic thinking area and is about to prove that Russell's paradox is the fixed term that is in accordance with the set theory and that Gödel's undecidable proposition is the fixed term within the natural number system N, a term formed by Cantor's diagonal method is the fixed term and undecidable Turning is also a fixed term. Furthermore it can be shown that when a known set U can be divided into a positive set and an inverse set and if the fixed term is neither in the positive set nor in the inverse set, then this fixed term must be that outside U. Thus it is an inherent phenomenon of the system that the logic property of the fixed term excluded from U has changed relative to U and the theorem of the fixed term outside U is undecidable. In addition, there are also fixed terms in the natural number system N, where the existence and undecidability does not have an effect on the recursive nature of the positive and inverse sets as well as the completeness of the system. Therefore, the mathematical proof for Gödel's theorem cannot be true and Cantor's diagonal method is proved to be false and Turning's halting problem is also proved to be false. Whether or not the system N can be complete, the real number is countable or not, or whether or not Turning's halt problem can be decided should be reconsidered.

Keywords: positive term; inverse term; fixed term; paradox; fixed term outside U; undecidable proposition; incomplete theorem; diagonal method; uncountable set; halting problem

自从罗素悖论在数学中出现,围绕着悖论问题,一个多世纪以来,出现了众多的解决方案。然而,这

收稿日期:2013-11-26. **网络出版日期**:2014-06-21.
通信作者:张金成.E-mail:656790205@qq.com.

些解决方案,并不能令人完全满意,悖论的数学本质并没有解释清楚,矛盾仍然没有解决。

1931 年 Gödel 证明:如果系统 N 是一致的,那么,系统 N 中存在不可判定命题,“系统 N”是不能完全的。这就是具有广泛影响的不完全定理。

以下在分析实数集不动点的基础上,可以证明:悖论、不可判定命题可以统一转化成逻辑思维领域中的不动点。不动点广泛存在,Gödel 不可判定命题是系统 N 中的不动点,它与系统 N 能否完全没有直接关系,一般递归集合中也存在类似 Gödel 的不可判定命题,因此,Gödel 不完全定理的证明是不成立的。

1 正集、反集、不动项

1.1 自指代与不动点

定义 1 一般地,函数 $y=f(x), x \in R$,如果用 x 取代 y,得函数方程 $x=f(x)$,则把 $x=f(x)$ 叫做 $y=f(x)$ 的自指代方程。

定义 2 如果 U 是一个集合,$f:U \to U$ 是一个连续映射,且存在 $x \in U$,使得 $f(x)=x$,就称 x 是不动点。

例 1 函数 $f(x)=1-x/3$,它的自指代方程是:$x=1-x/3$,函数 $f(x)=1-x/3$ 的不动点是方程 $x=1-x/3$ 的解,即 3/4,从图像上看是直线 $y=1-x/3$ 与 $y=x$ 的交点。

关于函数不动点有以下 Brouwer 不动点定理。

Brouwer 不动点定理 设 $f:[0,1] \to [0,1]$ 是连续映射,则必存在 $x_0 \in [0,1]$,使 $f(x_0)=x_0$。

以上是 R^1 中,即 1 维的 Brouwer 不动点定理,不动点定理可以推广到 2 维以及 n 维欧氏空间中(即:平面上的单位闭圆盘 B^2 具有不动点性质,即任一连续映射 $f:B^2 \to B^2$ 具有不动点。)

不动点的性质已经不仅仅局限于代数、函数领域,它已经延伸到集合论、离散数学、计算机、经济等其他各个领域。[1]

从函数自指代方程 $f(x)= 1-x/3$ 的不动点分析开始,不动点 3/4 把实数分成 2 类性质的实数集合:

大于 3/4 的实数集合:

$$R^+=\{x \mid x>3/4, x \in R\}$$

小于 3/4 的实数集合:

$$R^-=\{x \mid x<3/4, x \in R\}$$

设 $A(x)$ 为命题:$x>3/4$,若把不动点 3/4 扣除,$\neg A(x)$ 为命题:$x<3/4$,即有:

$$R^+=\{x \mid A(x), x \in R\}$$
$$R^-=\{x \mid \neg A(x), x \in R\}$$

不动点 3/4 把实数分成 2 个性质相反的集 R^+、R^-。

1.2 二项划分与双射关系

从以上分析可以看出,实数可以分成 2 个性质相反的集,满足性质 P 与不满足性质 P 的集合。

定义 3 设 P 是 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 上的一个性质,如果性质 P 把集合 U 划分成 2 个集合,满足

$$+\alpha=\{x \mid P(x) \wedge x \in U\}$$
$$-\alpha=\{x \mid \neg P(x) \wedge x \in U\}$$
$$U=+\alpha \cup -\alpha$$

则 $+\alpha$, $-\alpha$ 叫做集合 U 二项划分。

例 2 设 $U=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$,即全体整数集合 J,设 $P(x)$:x 是偶数,则 $P(x)$ 对 U 是一个二项划分,即:

$$+\alpha=\{x \mid x=2n, n \in J\}$$
$$-\alpha=\{x \mid x=1-2n, n \in J\};U=+\alpha \cup -\alpha$$

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,若 $y=f(x)$,$x \in A \to y \in B$,即 B 中任一元素 y,都是 A 中某元素 x 的像,则称 f 为 A 到 B 上的满射;若对 A 中任意 2 个不同元素 $x_1 \neq x_2$,他们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射;

定义 4 若映射 f 既是单射,又是满射,则称映射 f 为 A 到 B 的“双射”(或“一一映射”)关系。

函数 $f:A \to B$ 为双射,当且仅当对任意 $y \in B$ 存在惟一 $x \in A$,满足 $y=f(x)$;映射 f 为 A 到 B 的“双射关系”,记为 $f:A \sim B$[2]。

例 3 在上例中 $U=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$,即全体整数集合的一个二项划分,即:

$+\alpha=\{x \mid x=2n, n \in J\}$ 是偶数集合;

$-\alpha=\{x \mid x=1-2n, n \in J\}$ 是奇数集合;

$$f(x)=1-x, x \in +\alpha \leftrightarrow f(x) \in -\alpha$$

$f(x)=1-x$ 是二分集合 $+\alpha$, $-\alpha$ 上的双射关系,即 $f: +\alpha \sim -\alpha$。

1.3 正集、反集、不动项

定义 5 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 为一个集合,如果 U 被性质 P 二项划分为 $+\alpha$, $-\alpha$,那么:

1)满足性质 P 的元素 x 组成的集合,叫做正集,即命题 $P(x)$ 成立,记为 $+\alpha=\{x \mid P(x) \wedge x \in U\}$,正集中的元素叫正项;

2)不满足性质 P 的元素 x 组成的集合,叫做反集,即命题 $\neg P(x)$ 成立,记为 $-\alpha=\{x \mid \neg P(x) \wedge x \in U\}$,反集中的元素叫反项;

3)如果正、反集合 $+\alpha$, $-\alpha$ 上存在双射关系,即 $f: +\alpha \sim -\alpha$,则叫 $+\alpha$, $-\alpha$ 为正、反对称集合。

例 4 设 $U=Q^+$ 为全体正有理数集合,给定一个划分 $P(x)$:$x^2>2$。

正集：平方大于 2 的有理数集合，即：$+\alpha = \{x \mid x^2 > 2, x \in Q\}$；

反集：平方小于 2 的有理数集合，即：$-\alpha = \{x \mid x^2 < 2, x \in Q\}$。

存在双射 f：$+\alpha \sim -\alpha$ 对应关系 $f(x) = 2/x$，$+\alpha$，$-\alpha$ 是正反对称集合。

例 5　设 $U = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，不为 0 的全体实数集合，给定一个划分 $P(x)$：$x > 0$。

正集：大于 0 的实数集合，即：

$+\alpha = \{x \mid x > 0, x \in U\} = (0, +\infty)$

反集：小于 0 的实数集合，即：

$-\alpha = \{x \mid x < 0, x \in U\} = (-\infty, 0)$

存在双射 f：$+\alpha \sim -\alpha$ 对应关系 $f(x) = -1/x$，$+\alpha$，$-\alpha$ 是正反对称集合。

在一个集合 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 上，并不是任意一个划分，都可以构成正反对称集合，有些划分不构成正反对称集合。

构成正反对称集合 $+\alpha$ 与 $-\alpha$ 必须满足的 2 个条件，也可以通俗地表达为：

1）正、反对称集合是不相容的 $+\alpha \cap -\alpha = \varnothing$；

2）正、反对称集合可以建立一一对应的函数关系，$x_i \in +\alpha \leftrightarrow f(x_i) \in -\alpha$。

下文专门讨论正、反对称集合，不再特别指出。

自指代方程上的不动点的定义可以推广如下：

定义 6　1）函数 f:$A \to B$，即 f 为集合 A 到 B 的映射，对任意 $x \in A, y \in B, y = f(x)$，把满足自指代方程 $x_0 = f(x_0)$ 的解 x_0 称为不动项。

2）设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 为一个集合，如果 U 被性质 P 二项划分为正、反对称集合 $+\alpha$，$-\alpha$，即 f：$+\alpha \sim -\alpha$，x 满足性质 P，$f(x)$ 满足性质 $\neg P$，即 $x_i \in +\alpha \leftrightarrow f(x_i) \in -\alpha$，那么：

如果存在一个 x_0，满足自指代方程 $x_0 = f(x_0)$ 元素 x_0 叫正反对称集合上的不动项；由元素 x_0 构成的集合，叫做不动集，记为：$e = \{x \mid x = f(x)\} = \{x_0\}$。

如果自指代方程 $x_0 = f(x_0)$ 无解，记为：$e = \{x \mid x = f(x)\} = \varnothing$。

例 6　设 $U = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，即全体整数集合，给定一个划分 $P(x)$：x 是偶数，对应关系 $f(x) = 1 - x$。

正集：$+\alpha = \{x \mid x = 2n, n \in J\}$；

反集：$-\alpha = \{x \mid x = 1 - 2n, n \in J\}$；

$U = +\alpha \cup -\alpha$。

不动集：$x = 1 - x, x_0 = 1/2$ 是不动项。

这可以看成从整数到分数的发现。

例 7　设 $U = Q^+$ 为全体正有理数集合，给定一个划分 $P(x)$：$x^2 > 2$，对应关系 $f(x) = 2/x$。

不动集：$x = 2/x, x_0 = \sqrt{2}$ 是不动项。

这就是从有理数构造无理数的“戴德金分割”。

例 8　设 $U = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，不为 0 的全体实数集合，给定一个划分 $P(x)$：$x > 0$，对应关系 $f(x) = -1/x$。

不动集：$x = -1/x, x_0 = \sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 是不动项，$\mathrm{i} \notin U, x_0 = \mathrm{i}$ 是在 U 外。

这可以看成从实数到虚数的发现。

“不动项”是通常数学中“不动点”概念的推广，它不再单指是一个点、一个数，它可能是一个点、一个数、一个集合、一个命题等。

对应关系 f 也不再是单指数之间的运算，而可能是点、集合、或者命题之间的对应关系；

“不动项”和“不动点”都有相同的形式结构 $x = f(x)$，“不动项”比“不动点”具有更广泛的意义。

对不动点，一定有 $x_0 \in U$，对“不动项”没有 U 的内外限制，满足 $x = f(x)$ 的 x_0 存在或者不存在问题，在 U 外可以找到满足 $x = f(x)$ 的 x_0，也是不动项。

定义 7　设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 为一个集合，映射 f:$U \to U, x_0$ 满足自指代方程 $x_0 = f(x_0)$。若 $x_0 \in U$，则元素 x_0 叫 U 内不动项；若 $x_0 \notin U$，则元素 x_0 叫 U 外不动项。

不动项元素 x_0 存在，方程 $x = f(x)$ 有解，且 $x_0 \in U$，即：存在 U 内不动项；

U 外不动项有 2 种形式：

1）方程 $x = f(x)$ 有解，不动项元素 x_0 存在，但 $x_0 \notin U$，即：不动项 x_0 已经构造；

2）方程 $x = f(x)$ 无解，不动项元素 x_0 不存在，或者说不动项 x_0 没有构造；这种情况，不动集 e 为空集，$e = \varnothing$ 也可以看成 U 外不动项的特例。

在例 1 中，设 $U = R, f$:$U \to U$，函数 $f(x) = 1 - x/3$ 中，$x_0 = 3/4$ 是 U 内不动项；

设 $U = Q^+, f$:$U \to U$，函数 $f(x) = 2/x$ 中，$x_0 = \sqrt{2}, \sqrt{2} \in U, \sqrt{2}$ 是 U 外不动项，即以上第 1）种情形，在无理数没有发现之前，可以看成第 2）种情形；

设 $U = \{x$:$x \neq 0, x \in R\}, f$:$U \to U$，函数 $f(x) = -1/x$ 中，$x_0 = \sqrt{-1}, \sqrt{-1} \notin U$，$\sqrt{-1}$ 是 U 外不动项，即以上第 1 种情形，在虚数没有发现之前，可以看成第 2 种情形；

设 $U = J, f$:$U \to U$，函数 $f(x) = x + 1$ 中，$x = x + 1$ 无解，不动项 x_0 不存在，即第 2 种情形 $e = \varnothing$。

以后将证明：一个集合 U 如果能够严格地二项

划分成正反对称集合,那么不动项它一定在正反集合之外,即:都是 U 外不动项,正反对称集合上的不动项有(1)、(2) 2 种情形。

f 是 $+\alpha$ 到 $-\alpha$ 上的一个一一对应关系,满足函数关系 $y=f(x)$, 正集 $+\alpha$、反集 $-\alpha$, 也可以表示为:

$$+\alpha=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

$$-\alpha=\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),\cdots\}$$

1)若 $x\in+\alpha$, 则 $y\in-\alpha$, 满足 $x\neq f(x)$, $f(x)$ 也记为 $\tilde{x}$, 所以, 反集也记为 $-\alpha=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n,\cdots\}$。

2)若满足 $x=f(x)$, 元素 x 一个特殊的集合,设 $x=x_0$, 不动集 $e=\{x_0\}$。

即 $\tilde{x}=f(x)$, $x\in+\alpha\Leftrightarrow\tilde{x}\in-\alpha, P(x)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x})$。

对于 $P(x)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x})$, 当 x_0 满足 $P(x_0)\leftrightarrow\neg P(x_0)$ 时, x_0 即为不动项。

正、反集是关于某个映射 f 的对称变换, $+\alpha$ 中的项 x 对应 $-\alpha$ 中的项 $\tilde{x}$, 不动集中的项对应它自己。

1.4　正、反集对偶变换公理

在以上概念基础上,把矛盾命题重新进行形式描述:

用 $A^{+\alpha}$ 表示正集 $+\alpha$ 中的命题 A, $A^{-\alpha}$ 表示反集 $-\alpha$ 中的命题 A, 如:

设 $+\alpha$ 为欧氏平面上的点集,则 $-\alpha$ 为非欧平面上的点集,

$A^{+\alpha}$:在欧氏平面上,过已知直线外一点,只能作惟一一条直线与已知直线平行。

$A^{-\alpha}$:在非欧平面上,过已知直线外一点,只能作惟一一条直线与已知直线平行。

$\neg A^{+\alpha}$、$\neg A^{-\alpha}$ 就是以上命题的否定命题,这样以来,矛盾命题都有 2 种表示方式。

定义 8　在相同集上的否定命题 A^{α} 与 $\neg A^{\alpha}$ (即 $A^{+\alpha}$ 与 $\neg A^{+\alpha}$ 或 $A^{-\alpha}$ 与 $\neg A^{-\alpha}$),叫做经典矛盾命题;在不同集上的否定命题($A^{+\alpha}$ 与 $\neg A^{-\alpha}$ 或 $A^{-\alpha}$ 与 $\neg A^{+\alpha}$),叫做非经典矛盾命题(它与辩证矛盾类似)。

实际上,矛盾命题在不同集上成立,矛盾也就化解了。辩证矛盾就是已经化解或者解释清晰后的矛盾[2]。

由于公式的变化,公理在不同的集中有那些变化,经典逻辑公理在正集中变为:

$$A_1: A^{+\alpha}\rightarrow(B^{+\alpha}\rightarrow A^{+\alpha})$$

$$A_2: (A^{+\alpha}\rightarrow(B^{+\alpha}\rightarrow C^{+\alpha}))$$

$$\rightarrow((A^{+\alpha}\rightarrow B^{+\alpha})\rightarrow(A^{+\alpha}\rightarrow C^{+\alpha}))$$

$$A_3: (\neg A^{+\alpha}\rightarrow\neg B^{+\alpha})\rightarrow(B^{+\alpha}\rightarrow A^{+\alpha})$$

经典逻辑公理在反集中变为:

$$A_1: A^{-\alpha}\rightarrow(B^{-\alpha}\rightarrow A^{-\alpha})$$

$$A_2: (A^{-\alpha}\rightarrow(B^{-\alpha}\rightarrow C^{-\alpha}))$$

$$\rightarrow((A^{-\alpha}\rightarrow B^{-\alpha})\rightarrow(A^{-\alpha}\rightarrow C^{-\alpha}))$$

$$A_3: (\neg A^{-\alpha}\rightarrow\neg B^{-\alpha})\rightarrow(B^{-\alpha}\rightarrow A^{-\alpha})$$ [3]

由于经典逻辑的公理在正集、反集上都是成立的,今后对 2 个集上都成立的命题,上标不再区分 2 个集“$+\alpha$, $-\alpha$”,和经典逻辑公式一样不标“$+\alpha$, $-\alpha$”。如: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$, 认为在 2 个集上都成立。

定义 9　正集 $+\alpha$、反集 $-\alpha$ 的并集 U, 即: $U=+\alpha\cup-\alpha$, 叫做全集。

对于全集 U 按某性质 P 划分为正集项、反集项,即 x_i、$\tilde{x}_i$;

$U=\{\cdots,x_i,\cdots,\tilde{x}_i,\cdots\}$ 对应有正集命题、反集命题,即 $P(x_i)$、$P(\tilde{x}_i)$;

任何一个性质,如果可以对全集形成一个正反对称集划分,如果 x_0 恰恰是性质 P 划分的不动项,这是一个特殊的命题。

定义 10　不动项 x_0, 关于其划分 P 的性质断定的命题,叫做不动项命题,即命题 $P(x_0)$ 或 $\neg P(x_0)$ 是不动项命题。

如果关于性质 M、N、P 的不动项记为 x_M、x_N、x_P, 则 $M(x_M)$、$N(x_N)$、$P(x_P)$ 是不动项命题,并且有 $P(x_P)\leftrightarrow\neg P(x_P)$。

设命题 P 是关于正集 $+\alpha$、反集 $-\alpha$ 的一个划分,即:

若 $+\alpha=\{x\mid P(x)\}$, 则 $-\alpha=\{x\mid\neg P(x)\}$, f 是 $+\alpha$, $-\alpha$ 上的一个一一映射, $f: U\rightarrow U$, $x_i\in+\alpha$, $\tilde{x}_i\in-\alpha$, $\tilde{x}_i=f(x_i)$, 有 $P(x_i)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x}_i)$。

通过一些分析发现 $P^{+\alpha}$ 与 $\neg P^{-\alpha}$ 是等价的,例如:欧氏几何与罗氏几何是同构的,它说明一个命题等价于它反集中的否定命题,即应有公理“$P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$”成立。

根据以上分析,引进一条新公理“$P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$”或“$P(x)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x})$”。

定义 11　称公理“$P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$”或“$P(x)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x})$”为“正反集对偶变换公理”。

定理 1(不动项定理)　在“正反集对偶变换公理”中,若存在 x_P, $x_i=\tilde{x}_i=x_P$, 则有“$P(x_P)\leftrightarrow\neg P(x_P)$”。

证明:在“正反集对偶变换公理” $P(x_i)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x}_i)$ 中, $x_i=\tilde{x}_i=x_P$, 用 x_P 替换 x_i、$\tilde{x}_i$, 得: $P(x_P)\leftrightarrow\neg P(x_P)$。由于正项、反项、不动项定义可以是任何一个集合的

元素。如果 X_i 是一个命题，“正反集对偶变换公理”同样成立，即有：

$P(X_i)\leftrightarrow\neg P(\tilde{X}_i)$，当 $X_i=X_P$ 是不动项时，有：$P(X_P)\leftrightarrow\neg P(X_P)$[3]。

1.5　悖论是正、反集上的不动项

在“正反集对偶变换公理” $P(x_i)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x}_i)$ 中，$x_i\in+\alpha,\tilde{x}_i\in-\alpha$，这并不矛盾，但是，当 $x=\tilde{x}=x_0$ 时，即：x_0 为不动点时，有 $P(x_0)\leftrightarrow\neg P(x_0)$ 就表现为悖论。

在例 1 中，对于一个确定的实数 a：

如果 $a>3/4\Rightarrow -a/3<-1/4\Rightarrow 1-a/3<3/4\Rightarrow$ 则 $f(a)<3/4$，即：$A(a)\rightarrow\neg A(f(a))$；

如果 $a<3/4\Rightarrow -a/3>-1/4\Rightarrow 1-a/3>3/4\Rightarrow$ 则 $f(a)>3/4$，即：$\neg A(a)\rightarrow A(f(a))$。

由于 $a=f(a)$，这就形成了类似悖论命题 $A(a)\leftrightarrow\neg A(a)$，这个悖论的解就是：$a=3/4$。

一般地，设 f 是 R 上的一个一一映射，$f:R\rightarrow R$，如果性质 P 是 R 上的一个二项划分，对任意一个 x，x 满足性质 P，$f(x)$ 满足性质 $\neg P$，即 $R^+=\{x\mid P(x),x\in R\}$，$R^-=\{x\mid\neg P(x),x\in R\}$，$x\in R^+\leftrightarrow f(x)\in R^-$，$P(x)\leftrightarrow\neg P(f(x))$。

不动点 x_0 把实数集合分成正、反集合，其中一个集合中的元素满足性质 P，另一个集合中的元素满足性质 $\neg P$，而不动点 x_0 可以看成具有 2 个矛盾性质 P 与 $\neg P$ 的点，即 $P(x_0)\leftrightarrow\neg P(f(x_0))$，这就是悖论形成的内在机理。

在例 4 中，设 $P(x)$ 表示命题 $x^2>2$，对于一个确定的数 a：

$$P(a):a^2>2\Rightarrow a^2=4/a^2$$
$$4/a^2>2\Rightarrow a^2<2\Rightarrow\neg P(a)$$
$$\neg P(a):a^2<2\Rightarrow a^2=4/a^2$$
$$4/a^2<2\Rightarrow a^2>2\Rightarrow P(a)$$

由于 $a=f(a)$，这就形成了类似悖论命题 $P(a)\leftrightarrow\neg P(a)$，这个悖论的解就是：$a=\sqrt{2}$。

在例 5 中，设 $P(x)$ 表示命题“$x>0$”，对于一个确定的数 a：

$P(a)$：$a>0\Rightarrow a=-1/a$，

$-1/a>0\Rightarrow a<0\Rightarrow\neg P(a)$；

$\neg P(a)$：$a<0\Rightarrow a=-1/a$，

$-\dfrac{1}{a}<0\Rightarrow a>0\Rightarrow P(a)$；

所以，得到悖论：$P(a)\leftrightarrow\neg P(a)$；

由于 $a=-1/a$，$a^2=-1$，$a=\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，不动集是从正集到反集映射过程中保持原地不变的所有个体形成的集合，不动集是一个既具备正集性质又具备反集性质的集合。在不动集中 $P(a)$ 与 $P[f(a)]$ 相互否定，即自身与自身相互否定。从以上例子，还可以轻松观察到，如果 U 是一个已知集合，形成悖论的不动项 x_P，一定是 U 外不动项，即 $x_P\notin U$（这个性质以后还要详细讨论）。

例 9　罗素悖论中的集合分为 2 类：

一类集合是自身的元素，即 $x\in x$，$+\alpha=\{x\mid x\in x\}$；

二类集合不是自身的元素，即 $\neg(x\in x)$，$-\alpha=\{x\mid\neg(x\in x)\}$；

现在构造第 2 类集合全体组成的集合（即 $-\alpha$），用 $R=\{x\mid\neg(x\in x)\}$ 表示，即 $x\in R\leftrightarrow\neg(x\in x)$，问集合 R 是那类集合？即用 R 去自指代。

无论集合 R 是那类集合，即得到罗素悖论：$R\in R\leftrightarrow\neg(R\in R)$。

设 $P(x)$ 表示命题 $x\in x$，$+\alpha=\{x\mid P(x)\}$，则 $\neg P(x)$ 表示命题 $\neg(x\in x)$，$-\alpha=\{x\mid\neg P(x)\}$。

第 2 类集合全体组成的集合 $R=\{x\mid\neg P(x)\}$；

即 $x\in R\leftrightarrow\neg P(x)\Rightarrow R\in R\leftrightarrow\neg P(R)$；

即 $P(R)\leftrightarrow\neg P(R)$。

所以，$R=\{x:x\notin x\}$ 是关于谓词 $P(x)$ 的不动项，即罗素悖论是不动项命题[3]。

1.6　逻辑演算中的不动项

在“正反集对偶变换公理” $P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$ 中，当存在不动项时，就存在悖论。如果把“正反集对偶变换公理” $P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$ 引进逻辑演算系统中，逻辑演算系统中就会同样存在悖论。

在命题演算系统 L 中，如果承认“正反集对偶变换公理” $P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$，则不动项存在，存在悖论。即若 $+\alpha=-\alpha=e$，则 $\vdash P^e\leftrightarrow\neg P^e$；

在谓词演算系统 L 中，如果承认“正反集对偶变换公理” $P(x_i)\leftrightarrow\neg P(\tilde{x}_i)$，则有不动项存在，存在悖论；即若 $x_i=\tilde{x}_i=x_P$，则 $\vdash P(x_P)\leftrightarrow\neg P(x_P)$。

由于在经典系统中，定理 $P^e,\neg P^e\vdash B$ 成立，所以，如果承认悖论存在，无论是系统 L 还是系统 K，会导致整个系统崩溃。

在以前的命题逻辑系统 L，谓词逻辑系统 K 中，为什么没有发现不动项的存在，是因为在其中没有建立起来正反演算，一个公理系统中是否存在不动项（悖论），跟演算方式有关。

由于不动项、悖论的存在，是不是“命题逻辑系

统 L ”、“谓词逻辑系统 K ”都是不足道的,是一个崩溃的逻辑系统? 以后的证明表明:“命题逻辑系统 L ”、“谓词逻辑系统 K ”都是在已知集合 U 上的封闭演算,其中的不动项都是 U 外不动项。U 外不动项的存在是正常的,它不会导致“命题逻辑系统 L ”、“谓词逻辑系统 K ”崩溃。[4]

1.7 自然数系统中的一般不动项

已经证明,命题逻辑系统 L 演算中存在不动项;谓词逻辑系统 K 演算中存在不动项;同理,自然数系统 N 演算中也存在不动项。

定理 2 自然数系统 N 的演算中,有不动项存在,即若 $n_i = \tilde{n}_i = n_P$, 则 $\vdash P(n_P) \leftrightarrow \neg P(n_P)$ 。

证明 设 $N = \{0,1,2,3,\cdots\}$, 构造 N 的子集合 U, $U \subseteq N$, 命题 P 是关于正集 $+\alpha$ 、反集 $-\alpha$ 的一个划分, $U = +\alpha \cup -\alpha$,即:若 $+\alpha = \{n \mid P(n)\}$, 则 $-\alpha = \{n \mid \neg P(n)\}$,f 是 $+\alpha$, $-\alpha$ 上的一个一一映射, $f: U \to U, n_i \in +\alpha, \tilde{n}_i \in -\alpha$, $\tilde{n}_i = f(n_i)$, 有 $P(n) \leftrightarrow \neg P(\tilde{n})$ 。

如果有不动项 n_P 存在,则悖论存在。即若 $n_i = \tilde{n}_i = n_P$, 则 $P(n_i) \leftrightarrow \neg P(\tilde{n}_i)$,

或 $P(n_P) \leftrightarrow \neg P(n_P)$;以后也将证明:自然数系统 N 演算中的不动项,也是 U 外不动项。

由于自然数系统 N 是一个具体的数学系统,已经不需要正反集对偶变换公理 $P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg P^{-\alpha}$, 只要进行类似正反集对偶变换的运算(即自指代运算),就会产生不动项。

在自然数系统 N 中, 设 $U = \{n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots\}$ 。 $\vdash_N P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ 具有一般性,性质 P 可以是任何一个性质。

如果 $P(x)$ 表示: x 是偶数;

那么 $P(n_P) \leftrightarrow \neg P(n_P)$ 表示: n_P 是偶数 $\leftrightarrow n_P$ 是奇数。

如果设 U 表示自然数系统 N 中的所有命题, $P(x)$ 表示: x 可以证明;即 x 是系统 N 可证命题, $\vdash_N x$ 。

那么 $P(n_P) \leftrightarrow \neg P(n_P)$ 表示: n_P 可以证明 $\leftrightarrow n_P$ 不可以证明。

或者 $\vdash_N n_P \leftrightarrow \nvdash_N n_P$, n_P 就是 Gödel 不可判定命题。

例 10 取自然数集合 N 的一个子集合 $U = [0,11]$;把这个集合,分成偶数集合与奇数集合,偶数集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in N \wedge x \in [0,11]\}$;则 $\bar{A} = \{x \mid x = 2n+1, n \in N \wedge x \in [0,11]\}$ 是 $[0,11]$ 上的奇数集合。

构造函数 $f(x) = 11 - x$, 若 $x \in [0,11] \subset N$, 则 $f(x) \in [0,11] \subset N$;

利用函数 $f(x) = 11 - x$, 可以在 A 与 $\bar{A}$ 上建立一一对应关系

即 $x \in A \leftrightarrow f(x) \in \bar{A}$;

设 $P(n)$ 表示: n 是偶数;则 $\neg P(n)$ 表示: n 是奇数;

$P[n] \leftrightarrow \neg P[f(n)]$;

让 $f(n) = 11 - n$ 自指代,即: $n = f(n)$,$n = n_P$ 是它的不动项;

则得到: $P(n_P) \leftrightarrow \neg P(n_P)$ 。

承认正反集对偶变换公理 $P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg P^{-\alpha}$, 命题逻辑系统 L 演算中存在不动项;谓词逻辑系统 K 演算中存在不动项;自然数系统 N 演算中也存在不动项,不动项及不动项命题的存在是不可否认的。

正、反集对偶变换公理 $P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg P^{-\alpha}$ 产生不动项的本质是自指代,也就是说,只要允许自指代,就可能产生不动项,悖论就不可能避免。

2 U 外不动项的逻辑性质

2.1 正反对称集上的不动项一定是 U 外不动项

对于一个全集 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$,P 是一个划分标准,如果性质 P 可以把 U 划分成正、反 2 个对称集。

当 $x = \tilde{x} = x_P$ 时, 即: x_P 为不动项时, 有 $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$,或 $P^e \leftrightarrow \neg P^e$ 就表现为悖论。

定理 3(U 外不动项定理) 设全集 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 是一个已经定义的集合, U 可以二分成正反对称集合 $U = +\alpha \cup -\alpha$, 如果正集、反集上的演算是一致的,那么,不动项 x_P 不属于正集 $+\alpha$, 也不属于反集 $-\alpha$, 即 $x_P \notin U$;即:正、反集合上的不动项,是 U 外不动项。

证明

1) $\vdash x_P \in +\alpha$ ········假设;

2) $\vdash P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ ········不动项定理;

3) $\vdash P(x_P) \wedge \neg P(x_P)$ ········经典定理,正集 $+\alpha$ 中存在矛盾命题,这与正集是一致的相矛盾;

4) $\vdash x_P \notin +\alpha$ ········(1),反证法;

同理可证: $x_P \notin -\alpha$ 。

即如果不动项属于正集 $+\alpha$, 那么,将导致正集矛盾;同样,如果不动项属于反集 $-\alpha$, 那么,将导致反集矛盾;所以,不动项不属于正集 $+\alpha$, 也不属于反集 $-\alpha$, 即 $x_P \notin U$ 。

例 11　从整数到分数的发现：U 为全体整数集合 J，把这个集合，分成偶数集合与奇数集合。

$+\alpha = \{x \mid x = 2n, n \in U\}$ 偶数集合；

$-\alpha = \{x \mid x = 1 - 2n, n \in U\}$ 是奇数集合。

正反集对应函数 $f(x) = 1 - x$；$x = f(x)$，$x = 1 - x$，$x = 1/2$，所以，$1/2$ 为不动项，但是，$1/2 \notin +\alpha$，$1/2 \notin -\alpha$，$1/2 \notin U$，即：$1/2$ 为 U 外不动项，$1/2$ 不再是整数。

例 12　从有理数到无理数的发现：U 为全体正有理数集合 Q^+。

$$+\alpha = \{x \mid x^2 > 2, x \in U\}$$

$$-\alpha = \{x \mid x^2 < 2, x \in U\}$$

正反集对应函数 $f(x) = 2/x$；$x = f(x)$，$x = 2/x$，$x = \sqrt{2}$，

所以，$\sqrt{2}$ 为不动项，但是，$\sqrt{2} \notin +\alpha$，$\sqrt{2} \notin -\alpha$，$\sqrt{2} \notin U$，即：$\sqrt{2}$ 为 U 外不动项，$\sqrt{2}$ 不再是有理数。

例 13　从实数到虚数的发现：U 为不为 0 的全体实数集合 R。

$$+\alpha = \{x \mid x > 0, x \in U\}$$

$$-\alpha = \{x \mid x < 0, x \in U\}$$

正反集对应函数 $f(x) = -1/x$；$x = f(x)$，$x = -1/x$，$x = \sqrt{-1} = \mathrm{i}$，

所以，i 为不动项，但是，$\mathrm{i} \notin +\alpha$，$\mathrm{i} \notin -\alpha$，$\mathrm{i} \notin U$，即：不动项 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，为 U 外不动项，不再是实数。

进一步可以探明：凡是通过自指代方程 $x = f(x)$ 形成的正、反集合上的不动项，都存在类似的性质，是 U 外不动项，既不在正集中，也不在反集中。

U 外不动项 x_P，不具有原集合 U 的性质，是变异项。

根据 U 外不动项定理 3，设 $U = +\alpha \cup -\alpha$，如果存在正、反集合上的不动项，那么，它们都是 U 外不动项，由这个定理，很容易得到以下推论：

推论 1　$U = +\alpha \cup -\alpha$，P 是 U 的一个分割，任何悖论 $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ 其中项 x_P 是 U 外不动项。

推论 2　$U = +\alpha \cup -\alpha$，$+\alpha = \{x \mid x \in x\}$，$-\alpha = \{x \mid \neg(x \in x)\}$，罗素悖论 $P(R) \leftrightarrow \neg P(R)$，$R = \{x : x \notin x\}$ 是 U 外不动项。

推论 3　$U = +\alpha \cup -\alpha$，$+\alpha = \{P \mid V(P) = 1\}$，$+\alpha = \{P \mid V(P) = 0\}$，$P^e \leftrightarrow \neg P^e$ 命题演算系统 L 上的不动项 P^e，是 U 外不动项。

推论 4　$U = +\alpha \cup -\alpha$，P 是 U 的一个分割，$P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ 谓词演算系统 K 上的不动项 x_P，是 U 外不动项。

推论 5　$N = \{0,1,2,3,\cdots\}$，$U \subseteq N$，$+\alpha = \{n \mid P(n)\}$，$-\alpha = \{n \mid \neg P(n)\}$，$P(n_P) \leftrightarrow \neg P(n_P)$ 自然数系统 N 上的不动项 n_P，是 U 外不动项。

定理 4　设全集 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 是一个已经定义的集合，不动项 x_P 具有正集 $+\alpha$ 性质 $P(x)$，也具有反集 $-\alpha$ 性质 $\neg P(x)$，不动项 x_P 具有双重性质，同时与正集 $+\alpha$ 性质 $P(x)$ 相矛盾，也与反集 $-\alpha$ 性质 $\neg P(x)$ 相矛盾。

证明：

1) $\vdash P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$　--------不动项定理

2) $\vdash \neg P(x_P) \to P(x_P)$　--------(1)，经典定理

3) $\vdash P(x_P) \vee P(x_P)$　--------(2)，经典定理

4) $\vdash P(x_P)$　--------(3)

不动项 x_P 具有正集 $+\alpha$ 性质 $P(x)$；

5) $\vdash P(x_P) \to \neg P(x_P)$　--------(1)，经典定理

6) $\vdash \neg P(x_P) \vee \neg P(x_P)$　--------(5)，经典定理

7) $\vdash \neg P(x_P)$　--------(6)，

不动项 x_P 也具有反集 $-\alpha$ 性质 $\neg P(x)$；

8) $\vdash (P(x_P) \to \neg P(x_P)) \wedge (\neg P(x_P) \to P(x_P))$　--------(1)，经典定义

9) $\vdash (\neg P(x_P) \vee \neg P(x_P)) \wedge (P(x_P) \vee P(x_P))$　--------(8)经典定理

10) $\vdash \neg P(x_P) \wedge P(x_P)$ --------不动项 x_P 具有双重性质；同时与正集 $+\alpha$ 性质 $P(x)$ 相矛盾，也与反集 $-\alpha$ 性质 $\neg P(x)$ 相矛盾。

定义 12　设全集 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 是一个已经定义的集合，不动项不属于正集 $+\alpha$，也不属于反集 $-\alpha$，即不动项不属于已定义的集合，$x_P \notin U$，单独给不动项命名一个集，叫做相对于 U 的未定义集，即：不动集 $e = \{x_P\}$；不动项 x_P 叫做相对于 U 的未定义项；如果 x_P 是未定义项，P 是 U 上的一个谓词，那么 $P(x_P)$ 叫做未定义命题。

正、反对称集合 $+\alpha$，$-\alpha$ 是相互矛盾的集合，通常矛盾集合中的项是不能进行自指代的，当进行自指代时，满足 $x = f(x)$ 的项 x_P，在 U 中不存在；

如果存在 x_P 满足 $x = f(x)$，就会发生变异，x_P 在 U 中无定义，只能把 U 拓展到 U 外定义 x_P，所以，U 外不动项 x_P，也称为变异项。

例 14　在前面的例 11~13 中，$1/2 \notin J$，$1/2$ 相对于整数集合 J 的是未定义项；$\sqrt{2} \notin Q$，$\sqrt{2}$ 相对于有理数集合 Q 是未定义项；$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，$\sqrt{-1} \notin R$，$\sqrt{-1}$ 相对于实数集合 R 是未定义项。$1/2$，$\sqrt{2}$，

$\sqrt{-1}$ 相对于原来的集合 U 都是变异项。

按照以上定义，U 外不动项 x_P 相对于已经定义集合 U，都是未定义项；所以，悖论（包括罗素悖论），命题演算系统 L 上的不动项 P^e，谓词演算系统 K 上的不动项 x_P，自然数系统 N 上的不动项 n_P，相对于它们原始的已定义集合 U，都是未定义项。

2.2 U 外不动项命题的不可判定性

定理 5 U 外不动项命题 $P(x_P)$ 或 $\neg P(x_P)$，相对于任何一致系统都是不可判定命题。

证明 假设存在某个一致系统 H，若 $H \vdash P(x_P), P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$，则 $H \vdash \neg P(x_P)$，与系统 H 是一致的相矛盾，所以，$H \vdash P(x_P)$；

假设 $H \vdash \neg P(x_P), P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$，则 $H \vdash P(x_P)$，与系统 H 是一致的相矛盾，所以，$H \vdash \neg P(x_P)$；

所以：$P(x_P), \neg P(x_P)$ 在系统 H 均不可证，$P(x_P)$ 是系统 H 的不可判定命题；

当用一个性质 P 去划分一个系统时，在正集与反集的边缘都会产生不动项，这个不动项命题，无论在任何系统中，都是不可判定的。

对于任意关于谓词 N 的不动项 X_N，关于性质 M 命题 $M(X_N)$，若 $M \neq N$，则 $M(X_N)$ 不是不动项命题。若 $M = N$，则 $M(X_N)$ 是不动项命题，因此是不可判定的。

定义 13 U 外不动项命题 $P(x_P)$ 的不可判定性，叫做 U 外不可判定命题。

例 15 从整数到分数的发现：U 为全体整数集合，把这个集合，分成偶数集合与奇数集合，

$+\alpha = \{x \mid x = 2n, n \in U\}$ 偶数集合；

$-\alpha = \{x \mid x = 1 - 2n, n \in U\}$ 是奇数集合。

正反集对应函数 $f(x) = 1 - x$；, $x = 1 - x$, $1/2$ 为不动项。

如果设 $P(x)$ 表示命题：“x 是偶数”；则有不动项命题 $P(1/2), \neg P(1/2)$ 都是 U 外不可判定命题。

从有理数到无理数的发现：U 为全体有理数集合。

$$+\alpha = \{x \mid x^2 > 2, x \in U\}$$

$$-\alpha = \{x \mid x^2 < 2, x \in U\}$$

正反集对应函数 $f(x) = 2/x, x = 2/x, \sqrt{2}$ 为不动项。

如果设 $P(x)$ 表示命题：“$x^2 > 2$”；则有不动项命题 $P(\sqrt{2}), \neg P(\sqrt{2})$ 都是 U 外不可判定命题。

从实数到虚数的发现：U 为不为 0 的全体实数集合。

$$+\alpha = \{x \mid x > 0, x \in U\}$$

$$-\alpha = \{x \mid x < 0, x \in U\}$$

正反集对应函数 $f(x) = -1/x, x = -1/x, x = \sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 为不动项，

如果设 $P(x)$ 表示命题：“$x > 0$”；则有不动项命题 $P(\mathrm{i}), \neg P(\mathrm{i})$ 都是 U 外不可判定命题。

按照定理 5，所有正、反集合上的不动项命题，都是 U 外不可判定命题。由这个定理，很容易得到以下推论：

推论 6 任何悖论都是 U 外不可判定命题。

推论 7 罗素悖论是 U 外不可判定命题。

推论 8 命题演算系统 L 上的不动项命题 P^e，是 U 外不可判定命题。

推论 9 谓词演算系统 K 上的不动项命题 $P(x_P)$，是 U 外不可判定命题。

推论 10 自然数系统 N 上的不动项命题 $P(n_P)$，是 U 外不可判定命题。

2.3 U 外不可判定性与系统的完全性无关

定理 6 对于 U 外不动项 x_P，U 外的不可判定命题 $P(x_P)$，与正集项（x_i）命题 $P(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$，$x_i \neq x_P$，反项（$\tilde{x}_i$）命题 $P(\tilde{x}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 的判定无关，即与 U 内项命题的判定无关。

证明 假设存在一个一致的公理系统 $\sum$，使得 $\sum \vdash P(x_i), (i = 1, 2, \cdots)$，即命题 $P(x_i)$ 在公理系统 $\sum$ 中都可证；

由于命题 $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$，若 $\sum \vdash P(x_P)$ 则 $\sum \vdash \neg P(x_P)$，与公理系统 $\sum$ 一致性相矛盾；

所以，$P(x_P), \neg P(x_P)$ 在公理系统 $\sum$ 中是不可判定命题。

再假设公理系统 $\sum$，$\sum \nvdash P(x_i), (i = 1, 2, \cdots)$，即命题 $P(x_i)$ 在公理系统 $\sum$ 中不可证；

由于命题 $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$，若 $\sum \vdash P(x_P)$ 则 $\sum \vdash \neg P(x_P)$，与公理系统 $\sum$ 一致性相矛盾；

所以，同样有 $P(x_P), \neg P(x_P)$ 在公理系统 $\sum$ 中是不可判定命题。

这个 U 外不动项命题 $P(x_P)$，是恒成立不可判定命题，与 U 内项命题 $P(x_i)$ 在公理系统 $\sum$ 中是否可证没有关系。

如例 15，从整数到分数的发现：U 为全体整数集合，把这个集合，分成偶数集合与奇数集合。

$+\alpha=\{x \mid x=2n, n \in U\}$　偶数集合

$-\alpha=\{x \mid x=1-2n, n \in U\}$　奇数集合

正反集对应函数 $f(x)=1-x$；，$x=1-x$，1/2 为不动项，“1/2 是偶数”；“1/2 是奇数”；均不可证，都是不可判定命题。这个 U 外不动项命题，它与其他整数 x_i 是偶数还是奇数是否可证没有关系，是 U 外不可判定命题。

由于一般的可判定集合外也存在不动项，所以，不动项命题的不可判定，是 U 外不可判定命题，并不影响集合 U 内命题的可判定性。

由于不动项命题的不可判定，不影响集合的递归性，所以，它也不影响系统的完全性。

传统系统完全性的定义是：设全集 $U_\Sigma=\{X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots\}$ 是系统 Σ 上的全部命题。

1）若 $\forall X_i \in U_\Sigma,(\Sigma \vdash X_i) \vee (\Sigma \vdash \neg X_i)$，即：若 $\forall X_i \in U_\Sigma$，X_i 或 $\neg X_i$ 在 Σ 中可证明，就称 U_Σ 相对 Σ 是完全的，简称系统 Σ 是完全的；

2）若 $\exists X_i \in U_\Sigma,(\Sigma \nvdash X_i) \wedge (\Sigma \nvdash \neg X_i)$，即：若 $\exists X_i \in U_\Sigma$，X_i 并且 $\neg X_i$ 在 Σ 中都不可证明，就称 U_Σ 相对 Σ 是存在不可判定的命题，系统 Σ 是不完全的。

注：系统 Σ 完全性的另一个等价定义是：若 $\forall X_i \in U_\Sigma$，则 $M_\Sigma \models X_i \Leftrightarrow \Sigma \vdash X_i$，称系统 Σ 是完全的（M_Σ 是系统 Σ 的模型）。

定理 7　U 外不动项命题 $P(x_P)$ 的不可判定性，不能作为系统 Σ 是否完全的标准，即 U 外不动项命题的不可判定性与系统 Σ 完全性无关。

证明　设全集 $U_\Sigma=\{X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots\}$ 是系统 Σ 上的全部命题，在系统 Σ 一致的假设下，用 $P(X)$ 表示 $\Sigma \vdash X$；$\neg P(X)$ 表示 $\Sigma \nvdash X$。可证关系 P 把 U_Σ 划分成正、反 2 个集合：$+\alpha=\{X \mid P(X)\}$；$-\alpha=\{X \mid \neg P(X)\}$。建立双射关系 F：$+\alpha \sim -\alpha$，$F(X)=\neg X$，如果有不动项 X_P 存在，$P(X_P) \leftrightarrow \neg P(X_P)$，即：$(\Sigma \vdash X_P) \leftrightarrow (\Sigma \nvdash X_P)$，那么 $P(X_P)$，$\neg P(X_P)$ 在系统 Σ 中是不可判定命题，但是，它们是 U 外不可判定命题，$X_P \notin U_\Sigma$。

根据“系统 Σ 完全性”的定义，“系统 Σ 完全性”只跟 U_Σ 内的命题 X 是否可证有关系，因为 $X_P \notin U_\Sigma$，所以，“系统 Σ 完全性”根 X_P 是否可证，没有关系。

不动项 X_P 不在 $+\alpha$ 中，也不在 $-\alpha$ 中，是 U 外不动项，系统的完全性只与 U 内的项判定有关。即：$P(X_P)$，$\neg P(X_P)$ 不可判定，$+\alpha=\{X \mid P(X)\}$，$-\alpha=\{X \mid \neg P(X)\}$ 中的命题仍然是可判定的。

另外，U 外不动项命题 $P(x_P)$ 的不可判定性，能作为系统 Σ 是否完全的标准，那么不动项命题 $P(x_P)$ 的不可判定，$\sum$ 相对 U 是不能完全的。我们可以找到这样一个实例，一个完全的系统中，同样存在不动项。

事实上，由于不动项存在是普遍的，很容易在整数、自然数的任意一个有限子集上找到不动项。如果 U 外不动项命题 $P(x_P)$ 的不可判定，可以作为系统 $\sum$ 完全性、正反集合递归性的标准；那么将建立不起来真正完全的系统，也找不到真正的递归集合，这显然是错误的。

由于以前的逻辑研究中没有发现不动项，关于系统完全性的定义是有缺陷的，容易把 U_Σ 外不动项 X_P 与 U_Σ 中的命题相混淆，把 U_Σ 外不动项 X_P 与 U_Σ 中的命题区别开，系统完全性定义修改如下：

定义 14　设全集 $U_\Sigma=\{X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots\}$ 是系统 Σ 上的全部命题。

1）若 $\forall X_i \in U_\Sigma,(\Sigma \vdash X_i) \vee (\Sigma \vdash \neg X_i)$，即若 $\forall X_i \in U_\Sigma$，X_i 或 $\neg X_i$ 在 Σ 中可证明，就称 U_Σ 相对 Σ 是完全的，简称系统 Σ 是完全的；

2）若 $\exists X_i \in U_\Sigma,(\Sigma \nvdash X_i) \wedge (\Sigma \nvdash \neg X_i)$，即若 $\exists X_i \in U_\Sigma$，X_i 并且 $\neg X_i$ 在 Σ 中都不可证明，就称 U_Σ 相对 Σ 是存在不可判定的命题，系统 Σ 是不完全的；

3）若 $\exists X_P$，且 X_P 是 U_Σ 关于性质 P 二项划分的不动项，$(\Sigma \nvdash X_P) \wedge (\Sigma \nvdash \neg X_P)$，则 X_P 是 U_Σ 外不动项（$X_P \notin U_\Sigma$），X_P 是恒不可判定的命题，与系统 Σ 是否完全无关。

2.4　U 外部矛盾的永恒性及其来源

“不动项定理”说明只要有不动项存在，就会有悖论存在，就会有矛盾存在。

推论 11　设全集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 是一个已经定义的集合，如果 U 可以二分为正反集合，并且存在不动项，那么必然会形成不动项矛盾（即悖论）。

例 16　设 U_1 为不包含 0 的整数集合，$+\alpha_1=\{x \mid x>0, x \in J\}$，$-\alpha_1=\{x \mid x<0, x \in J\}$，$U_1=+\alpha_1 \cup -\alpha_1$。

设 $P_1(x)$：$x>0$，正反集对应函数 $f(x)=-x$；$x=f(x)$，$x=-x$，$x=0$，$e_1=\{0\}$

由于 0 是不动项，所以，$\vdash P_1(0) \leftrightarrow \neg P_1(0)$；$\vdash P_1(0) \wedge \neg P_1(0)$，这里发现 0 是正负数外的一个矛盾数。

如果再把 $e_1=\{0\}$ 加进原来集合 U_1，扩展到全

部的整数集合 $U_2 = J$，再构造奇数、偶数正反集合。

设 $+\alpha_2 = \{x \mid x = 2n, n \in J\}$，$-\alpha_2 = \{x \mid x = 1 - 2n, n \in J\}$，$U_2 = +\alpha_2 \cup -\alpha_2 = J$。设 $P_2(x): x = 2n, n \in J$ 即：是偶数，正反集对应函数 $f(x) = 1 - x$；$x = f(x)$，$x = 1 - x$，$x = 1/2$，由于 1/2 是不动项，所以，$\vdash P_2(1/2) \leftrightarrow \neg P_2(1/2)$；$\vdash P_2(1/2) \wedge \neg P_2(1/2)$。这里发现 1/2 是奇数、偶数外的一个矛盾数。

同理，如果再把整数集合 U_2 扩展的有理数集合 $U_3 = Q$，这里发现 $\sqrt{2}$ 是有理数正反集合外的一个矛盾数，如例 12。

如果再把有理数集合 U_3 扩展到实数集合 $U_4 = R$，这里发现 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 是实数正反集合外的一个矛盾数，如：例 13。

矛盾数的出现相对于原来的已知集合 U_1 是一个未定义项，当把这个矛盾数重新定义，并且扩展的原来的已知集合 U_1 中去时得到 U_2，当以 U_2 为整体已知集合时，原来的矛盾就退化、消融了，但是，以 U_2 为已知集合构造正反集合，在 U_2 之外又有新的矛盾数出现，再把这个矛盾数重新定义，并且扩展的原来的已知集合 U_2 中去时得到 U_3，当以 U_3 为整体已知集合时，矛盾又退化、消融了，…，如此，数系在矛盾的出现与消融中扩展，外部矛盾总是存在的，是永恒的。

根据"U 外不动项定理"：如果全集 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 是一个已经定义的集合，如果正集、反集上的演算是一致的，那么，不动项 x_P 不属于正集 $+\alpha$，也不属于反集 $-\alpha$；即正、反集合上的不动项，是 U 外不动项。即 $x_P \notin +\alpha, x_P \notin -\alpha, x_P \notin U$。

"U 外不动项定理"说明不动项一定存在 U 外，即不动项矛盾（悖论）来源于正反集合之外。

推论 12 设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$，如果 U 上的演算是一致的，那么，不动项矛盾"$\vdash P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$"，$\vdash P(x_P) \wedge \neg P(x_P)$ 在 U 外，即 $x_P \notin U$（矛盾来源于已定义集合 U 的外部）。

U_1 分成对立集合 $U_1 = +\alpha_1 \cup -\alpha_1$，产生矛盾集合 e_1，重新命名不动项，扩展 $U_2 = +\alpha_1 \cup e_1 \cup -\alpha_1$；

U_2 分成对立集合 $U_2 = +\alpha_2 \cup -\alpha_2$，产生矛盾集合 e_2，重新命名不动项，扩展 $U_3 = +\alpha_2 \cup e_2 \cup -\alpha_2$；

U_3 分成对立集合 $U_3 = +\alpha_3 \cup -\alpha_3$，产生矛盾集合 e_3，重新命名不动项，扩展 $U_4 = +\alpha_3 \cup e_3 \cup -\alpha_3$；

…

U_n 分成对立集合 $U_n = +\alpha_n \cup -\alpha_n$，产生矛盾集合 e_n，重新命名不动项，扩展 $U_{n+1} = +\alpha_n \cup e_n \cup -\alpha_n$；

…

以上分析发现经典逻辑是一个在相对已知集合上二分的封闭思维系统，在这个已知集合的外部可以产生矛盾，产生悖论，而且这种矛盾是无法避免的。如果 U_n 上的演算是一致的，矛盾只会产生在 U_n 的外部，经典逻辑在 U_n 上的演算仍然成立，外部矛盾不会导致系统崩溃。这说明，U_n 的外部矛盾是一种恒存在的矛盾，是正常的。

3 Gödel 不完全定理证明不能成立

3.1 Gödel 不可判定命题

简单回顾一下 Gödel 不完全定理的证明过程：

定义 15 一个自然数集上的 k 元关系 R，称为在 N 中可表达的，如果存在一个有 k 个自由变元的公式 $\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对任何自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，

1）如果 $R(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 在 N 中成立，则 $\vdash_N \xi(0^{(n_1)}, 0^{(n_2)}, \cdots, 0^{(n_k)})$；

2）如果 $R(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 在 N 中不成立，则 $\vdash_N \neg \xi(0^{(n_1)}, 0^{(n_2)}, \cdots, 0^{(n_k)})$[3]。

引进一个二元关系 W：$W = \{(m, n)\}$，m 是公式 $U(x)$ 的 Gödel 数，n 是公式 $U(m)$ 从 N 证明的 Gödel 数。

可以证明：递归关系在 N 中都是可以表达的。

可以证明：二元关系 W 是递归的，所以，$W = \{(m, n)\}$ 在 N 中是可表达的：

$$(m, n) \in W \Rightarrow \vdash_N w(0^{(m)}, 0^{(n)})$$

$$(m, n) \notin W \Rightarrow \vdash_N \neg w(0^{(m)}, 0^{(n)})$$

$U(x) = \forall y \neg w(x, y)$ ---构造公式 $U(x)$；

$m = g(U(x))$；m 是公式 $U(x)$ 的 Gödel 数；

用 m 去替换 $U(x)$ 中所有自由出现的 x 得：

$U(m) = \forall y \neg w(0^{(m)}, y)$ ----- y 是 $U(m)$ 证明的 Gödel 数；

$\forall y \neg w(0^{(m)}, y)$ 的解释是"对任意 y，y 是 $U(m)$ 证明的 Gödel 数不成立"或者；

"对任意 y，y 是 Gödel 数为 m 的公式（即：$U(m)$）证明的 Gödel 数不成立"；

或者 $\forall y \neg w(0^{(m)}, y) \leftrightarrow \neg \exists y \vdash w(0^{(m)}, y)$"不存在 y，y 是 $U(m)$ 证明的 Gödel 数"，即"$U(m)$ 是不可证明的"[4]；

定理 8 $U(m)$ 在 N 中是一个不可判定命题。

证明

1）$(m, n) \in W \Rightarrow \vdash_N w(0^{(m)}, 0^{(n)})$，

$(m,n) \notin W \Rightarrow \vdash_N \neg\, w(0^{(m)},0^{(n)})$；

2）$\vdash_N U(m)$ -----假设，

3）$\vdash_N \forall y \neg\, w(0^{(m)},y)$ -----把 $U(m)$ 从 N 证明的 Gödel 数记为 n，则 $(m,n) \in W$，

4）$\vdash_N w(0^{(m)},0^{(n)})$ -----（3），（1），

5）$\vdash_N \neg\, w(0^{(m)},0^{(n)})$ -----（3），K4，MP，

6）$\nvdash_N U(m)$ -----（4），（5）矛盾；

7）$\vdash_N \neg\, U(m)$ -----假设，

8）$\vdash_N \neg\, \forall y \neg\, w(0^{(m)},y) \leftrightarrow \exists y w(0^{(m)},y)$

-----（7），

9）$U(m)$ 在 N 中不成立，任意 n，$(m,n) \notin W$，

10）$\vdash_N \neg\, w(0^{(m)},0^{(n)})$ -----（1），（9），

11）$\vdash_N w(0^{(m)},0^{(n)})$ -----（8）

设 n 是 $U(m)$ 从 N 证明的 Gödel 数，

12）$\nvdash_N \neg\, U(m)$ -----（10），（11）矛盾，

13）$U(m)$，$\neg\, U(m)$ 都是不可证命题，即，$U(m)$ 在系统中是不可判定的 -----（6）（12）。

以上不可判定命题 $U(m)$ 的构造与证明是由 Gödel 在 1931 年给出的，在一般的数理逻辑文献及［4，10］中都可以找到。

3.2　Gödel 不可判定命题是 U 外不动项

定理 9　设 $G(X)$ 表示谓词 $\vdash_N X$，Gödel 不可判定命题 $U(m)$ 是关于 $G(X)$ 的不动项。

证明　设 $U=$｛自然数系统 N 上的全部命题｝，用系统 N 上的可证性质 G，把 U 二分成正反对称集合。

1）设

$$+\alpha = \{U(x) \mid \exists n w(m,n), m = g(U(x))\}$$

用谓词 $G(X)$ 表示 $\vdash_N X$，$+\alpha = \{U(x) \mid G(U(x))\}$ 正集中 $U(x)$ 都是系统 N 上可证明公式，即：$\vdash_N U(x)$；

2）设

$$-\alpha = \{U(x) \mid \forall n \neg\, w(m,n), m = g(U(x))\}$$

$$-\alpha = \{U(x) \mid \neg\, G(U(x))\}$$

反集中 $U(x)$ 都是系统 N 上不可证明公式，即：$NU(x)$，正反集合的元素都是命题。

3）在系统 N 一致的前提下，X 是可证命题，则 $\neg\, X$ 一定是不可证命题。构造正反集合双射关系，$Y \leftrightarrow F(X) = \neg\, X$，

正集，反集有对应关系 $X \in +\alpha \leftrightarrow Y \in -\alpha$，$G(X) \leftrightarrow \neg\, G(Y)$ 或者 $G(X) \leftrightarrow \neg\, G(\tilde{X})$；

4）构造自指代方程 $X \leftrightarrow F(X)$，$X \leftrightarrow \neg\, X$，$G(X_i) \leftrightarrow \neg\, G(\tilde{X}_i)$，这个命题方程是否存在不动项？$X = \tilde{X} = X_G$，Gödel 不可判定命题 $U(m)$，恰恰是满足它的解；

5）构造公式 $U(x)$，$U(x) = \forall y \neg\, w(x,y)$；

6）设 $m = g(U(x))$；m 是公式 $U(x)$ 的 Gödel 数；

7）用 m 去替换 $U(x)$ 中所有自由出现的 x 得：

$U(m) = \forall y \neg\, w(0^{(m)},y)$ ----- y 是 $U(m)$ 证明的 Gödel 数，$U(m) \leftrightarrow \neg\, G(U(m))$；

8）若 $\vdash_N U(m)$，即 $G(U(m))$ 成立，

则 $\vdash_N \neg\, G(U(m))$；

9）若 $\nvdash_N U(m)$，即 $\neg\, G(U(m))$ 成立，则 $\vdash_N U(m)$，即 $G(U(m))$ 成立；

10）$G(U(m)) \leftrightarrow \neg\, G(U(m))$，

$X_i = \tilde{X}_i = U(m)$ 是满足方程

$G(X_i) \leftrightarrow \neg\, G(\tilde{X}_i)$ 的解；

11）$U(m)$ 是关于命题

$G[U(m)] \leftrightarrow \neg\, G[U(m)]$ 的不动项（这个不动项是命题）；

由于正反对称集合上的不动项都是 U 外不动项，所以，很容易得到以下推论。

推论 13　设 $+\alpha = \{U(x) \mid G(U(x))\}$，$-\alpha = \{U(x) \mid \neg\, G(U(x))\}$，$U = +\alpha \cup -\alpha$，Gödel 不可判定命题 $U(m)$，是 U 外不动项。

Gödel 不可判定命题是不动项（逻辑上的项具有一般意义，可以是任何一个集合的元素，如：点，数，命题等），也可以把 $G[U(m)]$，$\neg\, G[U(m)]$ 看成一个二阶命题，对偶变换公理是一般的逻辑规律，对二阶命题同样成立；或者利用 Gödel 数，$U(m)$ 也可以转化成一个数，即转化成一阶语言中的普通项。[5]

3.3　Gödel 不完全定理的证明不成立

以上讨论并证明了“U 外不动项”的一般逻辑性质，概括如下：

1）正、反集上的不动项一定在 U 外（定理 3）；

2）U 外不动项相对于 U 是未定义项（定理 4）；

3）U 外不动项命题是不可判定命题（定理 5）；

4）U 外不动项命题的不可判定与 U 内项在系统中是否可以判定无关，与系统的完全性无关（定理 6、7）；

5）U 外不动项矛盾是永恒的矛盾，矛盾来源于 U 外（推论 11、12）；

以上证明 Gödel 构造的不可判定命题，也是系统 N 中的一个不动项，它也满足以上一般逻辑性质，因

此,Gödel 关于不完全性定理的证明是错误的。

将修正后的系统完全性定义 14,推广到自然数系统 N 上:

定义 16 设全集 $U_N = \{X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots\}$ 是自然数系统 N 上的全部命题,。

1)若 $\forall X_i \in U_N, (\vdash_N X_i) \vee (\vdash_N \neg X_i)$,即若 $\forall X_i \in U_N, X_i$ 或 $\neg X_i$ 在 N 中可证明,就称自然数系统 N 是完全的;

2)若 $\exists X_i \in U_N, (\nvdash_N X_i) \wedge (\nvdash_N \neg X_i)$,即若 $\exists X_i \in U_N, X_i$ 并且 $\neg X_i$ 在 N 中都不可证明,就称自然数系统 N 是不完全的;

3)若 $\exists X_G$,且 X_G 是 U_N 关于性质 G 二项划分的不动项,$(\nvdash_N X_G) \wedge (\nvdash_N \neg X_G)$,则 X_G 是 U_N 外不动项 $(X_G \notin U_N)$,X_G 是恒不可判定的命题,与系统 N 是否完全无关。

注:X_G 是 U_N 外的不动项,以上定义中特别列出(3),是为了防止把 X_G 与 U_N 中命题混淆,系统的完全性与 U_N 外的项无关,与 U_N 内的项有关。

定理 10 Gödel 不可判定命题 $U(m)$,$U(m)$ 在系统 N 中不可判定,是 U 外不可判定命题,与系统 N 的完全性无关。

证明

1)$X_G = U(m)$ 是满足方程

$G(X_G) \leftrightarrow \neg G(X_G)$ 的解,

即:$G(U(m)) \leftrightarrow \neg G(U(m))$,

$U(m)$ 是关于命题公式 $G[U(m)] \leftrightarrow \neg G[U(m)]$ 的不动项;

2)不动项命题 $G(X_G)$ 的不可判定,是 U 外不可判定命题,不能作为 N 是否完全的标准;

3)不动项 $U(m)$ 的不可判定性与系统 N 相对于 U_N 完全性无关;Gödel 不可判定命题 $U(m)$,是 U 外变异项。

所以,Gödel 关于自然数系统 N 的不完全定理的证明是错误的。

这个 $U(m)$ 是恒成立不可判定命题,是 U 外不可判定命题,与 U 内项命题 X_i 在公理系统 N 中是否可证没有关系;

不动项 $U(m)$ 的不可判定,

$+\alpha = \{U(x) \mid G(U(x))\}$,

$-\alpha = \{U(x) \mid \neg G(U(x))\}$ 的 Gödel 数集合仍然可能是递归集合。

很容易得到以下推论:

推论 14 $U(m)$ 在系统 N 中不可判定,是 U 外不可判定命题,与系统 N 的定理集合的可判定性无关。无论在系统 N 中怎么添加公理,这个不可判定命题 $U(m)$ 是消除不了的,因为 $U(m)$ 是一个不动项,已经不是系统 N 的一个命题。如果我们仔细观察不完全定理的证明过程,不可判定命题 $U(m)$ 的构造,只与系统 N 的可表达有关,与系统 N 的公理无关,也就是说:即使系统 N 一条公理也没有,不可判定命题 $U(m)$ 照样存在。这个 $U(m)$ 是恒成立不可判定命题,与公理系统 N 是否可以完全没有直接关系。

以后将证明:不光 Gödel 不可判定命题是 U 外不动项,“Cantor 对角线证明方法”所产生的项,也都是 U 外不动项,“Cantor 对角线证明方法”是错误的证明方法。

参考文献:

[1]陈汝栋. 不动点理论及应用[M].北京:国防工业出版社, 2012: 1-4.

[2]戴牧民,陈海燕.公理集合论导引[M].北京:科学出版社, 2011: 15-17.

[3]张金成. 容纳矛盾的逻辑系统与悖论[J]. 系统智能学报, 2012(3): 208-209.

ZHANG Jincheng. A logic system which accommodates contradictions and paradoxes[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2012(3): 208-209.

[4]HAMILTON A G. Logic for Mathematicians[M]. Cambridge of University, 1978: 29-40, 82-92.

[5]李未.数理逻辑[M].北京:科学出版社, 2008: 105-110.

[6]张立昂.可计算性与计算的复杂性[M].北京大学出版社, 2011: 80-85.

[7]S.C 克林 著 莫绍揆 译. 元数学导论[M]. 北京:科学出版社 1984: 4-12

[8]何华灿. 泛逻辑学原理[M].北京:科学出版社,2001: 1-15.

[9]Boolos. 可计算性与数理逻辑[M]. 北京: 电子工业出版社; 2002: 152-160.

[10]汪芳庭.数理逻辑[M]. 北京:科学出版社, 2001: 159-163.

作者简介:

张金成,男,1966 年生,主要研究方向为悖论、数理逻辑、数学基础、可计算理论,发表学术论文 13 篇。