DOI:10.3969/j. issn. 1673-4785. 201208025
网络出版地址:http://www. cnki. net/kcms/detail/23.1538. TP. 20130125.1449.006. html

# 几何概型的联系概率(复概率)与概率的补数定理

赵森烽[1],赵克勤[2,3]
(1. 浙江工业大学之江学院 理学系,浙江 杭州 310024; 2. 诸暨市联系数学研究所,浙江 诸暨 311811; 3. 浙江大学非传统安全与和平发展中心,浙江 杭州 310058)

**摘 要**:为研究等可能随机试验结果为无穷多时的联系概率计算和应用,借助简单的“均匀投针”随机试验,导出几何概型的联系概率(复概率). 该联系概率中的主概率和伴随概率依次对应于主事件的大数概率(主概率)和主事件的即或概率(伴随事件的大数概率). 在此基础上给出了随机事件的表现定理和概率的补数定理,利用后者可以在已知一个随机事件概率的基础上方便地得到该事件的联系概率. 通过实例说明了几何概型的联系概率与古典概型的联系概率具有同样的形式和性质.

**关键词**:随机试验;几何概型;联系概率(复概率);概率;表现定理;补数定理
**中图分类号**: TP18 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-4785(2013)01-0011-05

# Contact probability (complex probability) of the geometry probability and the complement number theorem of probability

ZHAO Senfeng[1], ZHAO Keqin[2,3]
(1. Department of Science, Zhijiang College of Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310024, China; 2. Zhuji Institute of Connection Mathematics, Zhuji 311811, China; 3. Center for Non-traditional Security and Peaceful Development Studies, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract**: In order to research the calculation and application of contact probability when the result of equally likely random trial is infinite, the researcher utilized the simple “uniform needle” random test to derive contact probability (complex probability) of geometry probability. The main probability and the concomitant probability of the contact probability respectively correspond to the great number probability (main probability) of the main event and the even if probability (great number probability of concomitant event) of the main event. And on this basis, the representation theorem of the random event and complement number theorem of probability were provided in the study. The complement number theorem was used to conveniently find the contact probability of the event based on the premise of knowing the probability of a random event. The results illustrated that the contact probability of geometry probability had the same form and property with the contact probability of typical probability.

**Keywords**: random test; geometry probability; contact probability (complex probability); probability; representation theorem; inverse theorem

文献[1]基于集对分析的不确定性系统理论和方法[2-6],借助“白球+黑球”随机试验,发现随机性是事物相互联系的一个属性,随机事件成对存在. 并且给出了概率用集对分析联系数 $a+bi$ 表示的原理,在此基础上提出“联系概率”的概念. 联系概率是主事件的主概率(主事件发生的大数概率)和伴随概率(主事件不发生而发生伴随事件的大数概率)之“联系和”. 所谓“主事件”,是指随机试验中被首先关注的事件,也称“第一关注事件”;所谓“伴随

**收稿日期**:2012-08-18. **网络出版日期**:2013-01-25.
**基金项目**:国家社会科学基金重点资助项目(08ASH006);教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目(08JZD0021-D).
**通信作者**:赵克勤. E-mail: zjzhaok@ sohu. com.

事件”,是指随机试验中与“主事件”相伴随存在的事件.当“主事件”和“伴随事件”是互不相容的对立事件时,被首先关注的“主事件”也被称为“正事件”,与此同时的“伴随事件”称为“负事件”.这些新概念为概率理论的创新提供了基础性条件.

但从概率论的角度看,文献[1]中的“白球+黑球”随机试验,是各种试验结果等可能发生、试验结果数为有限的古典概型试验.实际问题中还有各种试验结果等可能发生但试验结果数为无穷多的几何概型试验,人们会问:对于几何概型试验,是否也存在着类似于古典概型试验中反映出来的随机性产生原理以及相应的联系概率?本文对此作出回答,并证明相应的“随机事件表现定理”与“概率补数定理”,以及联系概率的若干性质.

## 1 几何概型

### 1.1 定义

**定义1** 在随机试验中,如果各种试验结果等可能发生、各种试验结果为无穷多,则随机试验称为几何概型试验(简称几何概型).

以下是几何概型的一些例子.

**例1** 取一根长度为30 cm的绳子,拉直后在任意位置剪断,那么剪得2段的长度都不小于10 cm的概率有多大?如图1所示.

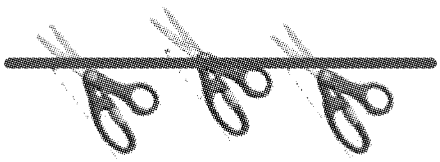


图1 剪绳问题

Fig.1 Shear problems of wire rope

**例2** 射箭比赛的箭靶是涂有5个彩色的圆环,从外向内依次为白色、黑色、蓝色、红色,靶心是金色,也叫“黄心”.奥运会的比赛靶面直径为122 cm,靶心直径为12.2 cm.运动员在70 m外射箭,假设每箭都能中靶,且射中靶面内任一点都是等可能的,那么射中黄心的概率是多少?如图2所示.

**例3** 在10 000 $km^2$ 的海域中有40 $km^2$ 的海底贮藏着石油.假如在该海域中任意一个位置钻探,钻到油层面的概率是多少?

由于在例1中,可以在任意位置把30 cm长的绳子剪为2段,也就是等可能的试验结果可以有无穷多.在例2中,射中靶面内任一点都是等可能的,而靶面内的点有无穷多.例3中,可以在海面的无穷多个位置点钻探石油,每个钻探点都有可能钻到油层面.因此,以上3个例子都是满足定义1的几何概型试验.

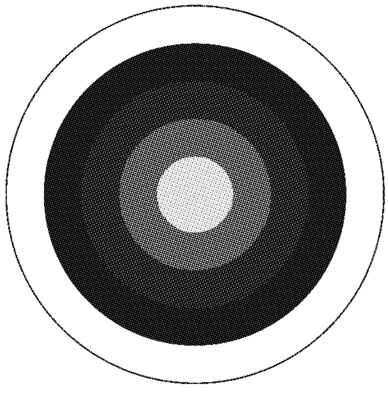


图2 中靶问题

Fig.2 Hit the yellow heart problems

### 1.2 几何概型的概率计算

根据经典概率论,在几何概型中,如用 $P(A)$ 表示事件 $A$ 发生的概率,则 $P(A)$ 的计算公式为

$$P(A) = (\text{构成事件} A \text{的测度}) / (\text{试验的全部结果所构成的测度}). \tag{1}$$

式中:“测度”对于一维事件空间来说,指长度;对于二维事件空间来说,指面积;对于三维事件空间来说,指体积;如此等.

式(1)说明几何概型中事件 $A$ 发生的概率只与构成事件 $A$ 的“测度”的大小有关,与 $A$ 的形状和所在的位置无关.

在例1中,只要剪在长度为30 cm的绳子的“中部”,那么剪得的2段长度都不小于10 cm,为此把30 cm长度的绳子平均分成3段,在其“中间一段”的任意位置上剪,都能得到剪得的2段长度不小于10 cm的结果.显然,这“中间一段”长度占这根绳子总长度的1/3,令 $P(A)$ =“剪得的2段长度都不小于10 cm”,则 $P(A)=(1/3)/1=1/3$.

在例2中,记“射中黄心”为事件 $A$,由于中靶点随机地落在面积为 $(1/4)\times\pi\times122^2 cm^2$ 的大圆内,而当中靶点随机地落在面积为 $(1/4)\times\pi\times12.2^2\ cm^2$ 的小圆内时事件 $A$ 发生,所以事件 $A$ 发生的概率 $P(A)=(1/4)\times\pi\times12.2^2/[(1/4)\times\pi\times122^2]=0.01$.

类似地可知例3中,在该海域中任意一个位置钻到油层面的概率是 $40/10\ 000=0.004$.

## 2 几何概型的联系概率

### 2.1 联系概率

联系概率是文献[1]中给出的一个概念.其定义是:随机试验中首先被关注的事件 $A$(称为主事件)发生的概率 $P(A)$(称为主概率)和 $A$ 不发生的

概率 $P(\bar{A})$(主事件不发生而发生伴随事件 $\bar{A}$ 的大数概率,也称为 $P(A)$ 的伴随概率)之"联系和". 其一般形式为

$$P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i. \qquad (2)$$

式中:$P(A,\bar{A})$ 称为主事件 $A$ 与伴随事件 $\bar{A}$ 的联系概率,简称联系概率(复概率或赵森烽-克勤概率),站在主事件 $A$ 的角度,联系概率(复概率或赵森烽-克勤概率)也记为 $P_c(A)$[1];$i$ 是主事件和伴随事件相互转换的纽带,$i \in [\frac{-1-P(A)}{1-P(A)}, 1]$,本文改称 $i$ 是主事件和伴随事件的随机转换器(赵森烽-克勤随机转换器),简称转换器.

容易看出:联系概率是基于随机试验结果的一种概率,因为在随机试验的结果中,首先被关注的事件 $A$ 要么出现,要么不出现;而当 $A$ 不出现时,必出现 $A$ 的伴随事件 $\bar{A}$,联系概率 $P(A,\bar{A})$ 客观地描述了随机试验中事件 $A$ 与事件 $\bar{A}$ 各自出现的概率以及这 2 个概率的联系与转换.

### 2.2　几何概型联系概率的计算

#### 2.2.1　*原理*

给定一个可测区域 $v$,向 $v$ 内随机地"均匀投针",显然,这时的事件 $A$ = "针投在区域 $v$ 中"是必然事件;再把区域 $v$ 作为可测大区域 $V$ 的一个子区域($v \subset V$),这时事件 $A$ = "针投在区域 $v$ 中"是随机事件. 这一结果表明事件 $A$ 的随机性是可测大区域 $V$ 与其子区域 $v$ 的相互关系,是 $V$ 与 $v$ 相互关系的一种属性,由此说明随机事件 $A$(针投在区域 $v$ 中)与 $\bar{A}$(针不投在区域 $v$ 中)成对存在. 如果取 $A$ 为主事件,则 $\bar{A}$ 为 $A$ 的伴随事件,因此,当要从"$A$ 出现"与"$A$ 不出现"2 个方面表示 $A$ 的概率时,需要同时表示出 $\bar{A}$ 的概率. 若用 $P(A)$ 表示 $A$ 的概率,$P(\bar{A})$ 表示 $\bar{A}$ 的概率,则得 $A$ 为主事件、$\bar{A}$ 为 $A$ 的伴随事件的联系概率 $P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i$,$i$ 是主事件和伴随事件的随机转换器.

#### 2.2.2　*计算举例*

试计算例 1、例 2、例 3 的联系概率.

对于例 1,由于已算得 $P(A)$,所以 $P(\bar{A}) = 2/3$,于是得到关于 $A$ 与 $\bar{A}$ 的联系概率 $P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i = 1/3 + 2/3i$. 这个联系概率表明:把长度为30 cm的绳子拉直后在任意位置剪断,剪得 2 段的长度都不是大于 10 cm 的概率(2/3)要比剪得 2 段的长度都大于 10 cm 的概率(1/3)要大,前者是后者的 2 倍,但这 2 个概率的关系具有不确定性,其不确定性及其程度由 $i$ 承载. 当试验者事先已经明确在"中间一段"的任意位置上剪,都有剪得的 2 段长度不小于 10 cm 结果,则 $i$ 在[0,1]区间取值,从而使 $P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i = 1/3 + 2/3i > 1/3$,也就是使 $A$ 发生的可能性增大. 在有甲、乙 2 人参加的实际试验中,如果甲连续剪 3 次,每次都剪在"中间一段"的任意位置;而乙连续剪 3 次,只有 1 次剪在"中间一段"的任意位置,可以认为甲的"智力"或"经验"要优于乙.

对于例 2,由于已算得中靶点随机地落在面积为 $(1/4) \times \pi \times 12.2^2 \mathrm{cm}^2$ 的小圆内时的事件 $A$("射中黄心")的概率 $P(A) = 0.01$,所以 $P(\bar{A}) = 0.99$,于是得到关于 $A$ 与 $\bar{A}$ 的联系概率 $P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i = 0.01 + 0.99i$. 这个联系概率表明:每射击 1 次,"射中黄心"这个事件 $A$ 比 $\bar{A}$(中靶点随机地落在面积为 $(1/4) \times \pi \times 122^2 \mathrm{cm}^2$ 的大圆内的非黄心区域)更不容易发生. 在实际试验中,如果甲连续射 $n(n>1)$ 次,每次都"射中黄心";而乙连续射 $n(n>1)$ 次,只有 1 次"射中黄心",可以认为甲是优于乙的一个射手.

同理,对于例 3,在该海域中任意一个位置钻到油层面(主事件 $A$)与钻不到油层面(伴随事件 $\bar{A}$)的联系概率 $P(A,\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})i = 0.004 + 0.996i$. 而在实际工作中,钻探工作者总会利用有关资料去消解 $i$,有选择性地钻探海底油层,提高钻探效率.

## 3　表现定理与补数定理

笔者在文献[1]中,通过观察试验结果等可能发生而各种试验结果为有限的古典概型随机试验,发现随机性是事物相互联系的一个属性,随机事件成对存在,据此给出随机事件的成对存在定理. 本文表明了随机事件成对存在定理在各种试验结果等可能发生而各种试验结果为无穷多的几何概型随机试验中也同样成立. 为此,称其为"赵森烽-克勤成对存在定理",简称"存在定理". 基于随机事件的成对存在定理,联系概率的提出就成为理所当然,但为了深入理解联系概率和便于联系概率的计算,还需要补充以下的"随机事件表现定理"(简称"表现定理")和"概率补数定理"(简称"补数定理").

**定理 1(赵森烽-克勤随机事件表现定理,简称随机事件表现定理)**　设随机事件 $A$ 与 $\bar{A}$ 是互不相容的对立事件,则在一次随机试验中必出现其中之一,且只能出现其中之一.

**证明** 根据文献[1]中给出的随机事件存在定理可知,如果$A$是随机事件,则$A$与随机事件$\bar{A}$成对存在;又由于随机事件$A$与随机事件$\bar{A}$是互不相容的对立事件,因此在关于随机事件$A$与$\bar{A}$的随机试验中,随机事件$A$与随机事件$\bar{A}$不可能同时出现,但也不可能同时不出现,所以定理成立.

**定理2(赵森烽-克勤概率补数定理,简称概率补数定理)** 设随机事件$A$与$\bar{A}$是互不相容的对立事件,$P(A)$为随机事件$A$的大数概率,则$P(A)$的补数$P(\bar{A})=1-P(A)$是随机事件$A$的即或概率.

**证明**

1)证法一:根据随机事件成对存在定理和随机事件$A$的即或概率定义,随机事件$A$与随机事件$\bar{A}$成对存在;正是由于$\bar{A}$的存在,才使得$P(A)<1$,而$1-P(A)=P(\bar{A})$;又由于$\bar{A}$是随机试验中$A$不出现时必然出现的事件,所以$P(\bar{A})=1-P(A)$是随机事件$A$的即或概率.

由于事件$A$与$\bar{A}$的联系概率是随机事件$A$的大数概率$P(A)$与$A$的即或概率$P(\bar{A})$的"联系和",所以定理2(赵森烽-克勤概率补数定理)的实际意义是:当已知一个随机事件的大数概率时,只要计算出这个概率的"补数",就能得出这个随机事件(与它的非事件)的联系概率.

2)证法二:由于随机事件$A$与$\bar{A}$是互不相容的对立事件,但同时又是基本事件空间$\Omega$中的互补事件,$A\cup\bar{A}=\Omega$,所以$P(A)+P(\bar{A})=1$,根据文献[1]中关于事件$A$的即或概率定义,$P(\bar{A})=1-P(A)$是随机事件$A$的即或概率.

3)证法三(反证法):设$P(A)$的补数$P(\bar{A})=1-P(A)$不是随机事件$A$的即或概率,则可设$P(B)$是随机事件$A$的即或概率,据此推得随机事件$A$不出现时将出现事件$B$,$B$与$A$因此是互不相容的对立事件,因已知$A$与$\bar{A}$是互不相容的对立事件,所以$B=\bar{A}$,$P(B)=P(\bar{A})$,即$P(\bar{A})$是随机事件$A$的即或概率,而$P(\bar{A})$是$P(A)$的补数,定理得证.

## 4 联系概率的性质

综合文献[1]和前述工作可知:无论是古典概型随机试验还是几何概型随机试验,当选定其中之一的随机事件是主事件$A$之后,该主事件$A$与伴随事件$\bar{A}$的联系概率总可以表示成$P(A,\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})i$的形式,此联系概率有如下性质.

**性质1** $P(A,\bar{A})\in[-1,1]$.

**证明** 根据联系概率的定义可知,当$A$出现时,$P(A,\bar{A})=1$;当$A$不出现而出现$\bar{A}$时,$P(A,\bar{A})=-1$,所以有$P(A,\bar{A})\in[-1,1]$.

**性质2** $i\in[-\infty,1]$.

**证明** 当$A$出现时,$P(A,\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})i=P(A)+P(\bar{A})=1$,当$\bar{A}$出现时,$P(A,\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})i=-1$. 解得$i=\dfrac{-1-P(A)}{1-P(A)}$,当$(1-P(A))\to 0$时,$\dfrac{-1-P(A)}{1-P(A)}\to-\infty$,所以$i\in[-\infty,1]$.

联系概率的这2个性质表明联系概率与经典概率有着密切联系[7-8],但更有区别,需要作进一步研究. 联系概率在人工智能中的具体应用也需要作深入研究[9-10].

## 5 结束语

本文根据集对分析的不确定性系统理论,借助简单的"均匀投针"随机试验,阐述了几何概型联系概率的原理与计算;说明了几何概型的联系概率与古典概型的联系概率具有同样的性质;同时给出了随机事件的表现定理(赵森烽-克勤随机事件表现定理)和联系概率意义下经典概率的补数定理(赵森烽-克勤概率补数定理),使人们能方便地从事件$A$的大数概率直接求得事件$A$的联系概率,为创建一种新的概率理论做了进一步的工作. 后续工作中将进一步研究有关联系概率与经典概率的关系,以及联系概率在人工智能中的具体应用.

## 参考文献:


[1]赵森烽,赵克勤. 概率联系数化的原理与联系概率在概率推理中的应用[J]. 智能系统学报, 2012, 7(3): 200-205.

ZHAO Senfeng, ZHAO Keqin. The principle of the probability of connection number and application in probabilistic reasoning[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2012, 7(3): 200-205.

[2]赵克勤. 集对分析的不确定性理论在AI中的应用[J]. 智能系统学报, 2006, 1(2): 16-25.

ZHAO Keqin. The application of uncertainty systems theory of set pair analysis (SPA) in the artificial intelligence[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2006, 1(2): 16-25.

[3]赵克勤. 二元联系数$A+Bi$的理论基础与基本算法及在人工智能中的应用[J]. 智能系统学报, 2008, 3(6): 476-486.

ZHAO Keqin. The theoretical basis and basic algorithm of binary connection $A + Bi$ and its application in AI[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2008, 3(6): 476-486.

[4]赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州:浙江科技出版社, 2000: 44-64.

[5]赵克勤,宣爱理. 集对论——一种新的不确定性理论方法与应用[J]. 系统工程, 1996, 14(1): 18-23.

ZHAO Keqin, XUAN Aili. Set pair theory—a new theory method of non-define and its applications[J]. Systems Engineering, 1996, 14(1): 18-23.

[6]赵克勤. 试论集对分析与概率论的关系[C]//中南模糊系统与数学论文集. 长沙:湖南科技出版社, 1995: 253.

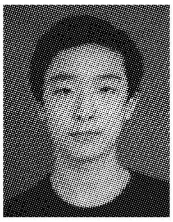
[7]王梓坤. 概率论基础及其应用[M]. 北京:科学出版社, 1979: 1-219.

[8]赵秀恒,米立民. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社, 2008: 1-28.

[9]李德毅. 不确定性人工智能[M]. 北京:科学出版社, 1979: 1-400.

[10]蔡自兴,徐光佑. 人工智能及其应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2010: 114-116.

**作者简介:**



赵森烽,男,1993 年生,主要研究方向为信息与计算、集对分析、联系概率等,发表学术论文 1 篇.

赵克勤,男,1950 年生,研究员,中国人工智能学会理事、人工智能基础专业委员会副主任、集对分析联系数学专业筹备委员会主任. 主要研究方向为联系数学,1989 年提出集对分析(联系数学),发表学术论文 90 余篇,出版专著 1 部.

# 高级数据挖掘与应用国际学术会议
# The 9th International Conference on Advanced Data Mining and Applications

The 9th International Conference on Advanced Data Mining and Applications (ADMA 2013) will be held in Zhejiang University, Hangzhou, December 14—16, 2013. It is our pleasure to invite you to contribute papers, register and participate in this premier annual event on research and applications of data mining.

The conference aims at bringing together the experts on data mining from around the world, and providing a leading international forum for the dissemination of original research findings in data mining, spanning applications, algorithms, software and systems, as well as different applied disciplines with potential in data mining. ADMA 2013 will promote the same close interaction among practitioners and researchers. Published papers will go through a full peer review process.

**Key Dates**

Full paper submission due: July 31, 2013

Acceptance notification: September 30, 2013

Final camera-ready: September 30, 2013

Conference dates: December 14—16, 2013

**Contact Us**

Zengbin, contact@adma2013.org

Website: http://www.adma2013.org/