第7卷第6期 智能系统学报 Vol.7 №.6
2012年12月 CAAI Transactions on Intelligent Systems Dec. 2012

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201205029
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20121116.1703.013.html

# 基于Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的反向三I算法

罗敏霞[1], 桑睨[1], 何华灿[2]
(1. 中国计量学院 理学院,浙江 杭州 310018; 2. 西北工业大学 计算机学院,陕西 西安 710072)

**摘　要**:Schweizer-Sklar三角范数簇具有柔化性, 使得由其构造的逻辑系统在模糊推理中具有良好的属性. 将Schweizer-Sklar三角范数簇与模糊推理反向三I算法结合起来, 给出基于Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的反向三I算法和$\alpha$-反向三I算法, 并给出对应三I解的表达式. 结合Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的特点, 讨论当参数取特殊值时对应的特殊蕴涵算子$\to_D$, $\to_L$, $\to_G$, $\to_P$的反向三I算法及对应三I解的表达式. 提供一种柔化性的模糊推理反向三I算法.

**关键词**:模糊推理; 反向三I算法; Schweizer-Sklar三角范数簇;FMP问题;FMT问题
**中图分类号**:TP18　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-4785(2012)06-0494-07

# The reverse triple I algorithms based on a class of residual implications induced by the family of Schweizer-Sklar t-norms

LUO Minxia[1], SANG Ni[1], HE Huacan[2]
(1. College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China; 2. School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

**Abstract**: Since the family of Schweizer-Sklar t-norms is flexible, they have good characteristics for fuzzy reasoning based on the logic systems which are based on these operators. Combining the fuzzy reasoning reverse triple I algorithm and a class of residual implications induced by the family of Schweizer-Sklar t-norms, the reverse triple I algorithms and $\alpha$-reverse triple I algorithm are proposed, as well as the corresponding expressions of reverse triple I solutions and $\alpha$-reverse triple I solutions. Combined with the characteristics of the class of residual implications induced by the family of Schweizer-Sklar t-norms, this paper discusses the reverse triple I algorithm based on $\to_D$, $\to_L$, $\to_G$, $\to_P$, when the parameter takes some special values, and the corresponding expressions of reverse triple I solutions are proposed. A flexible fuzzy reasoning reverse triple I algorithm is provided.

**Keywords**: fuzzy reasoning; reverse triple I algorithm; Schweizer-Sklar t-norms; fuzzy modus ponens; fuzzy modus tollens

模糊推理作为模糊控制理论的基础, 也是近似推理的一个分支, 近年来受到国内外学者的广泛关注[1]. 模糊推理中的基本推理模型是推理形式模糊假言推理(FMP)问题和模糊反驳推理(FMT)问题[2]:

FMP: 给定规则$A \to B$并输入$A^*$, 输出$B^*$.

FMT: 给定规则$A \to B$并输入$B^*$, 输出$A^*$.

其中$A, A^* \in F(X)$, $B, B^* \in F(Y)$, $F(U)$表示论域$U$的全体模糊子集构成的集合.

王国俊教授首先提出了模糊推理的全蕴涵三I算法[2], 其基本思想如下:

已知$A \in F(X)$和$B \in F(X)$, 并且$A^* \in F(X)$(或者$B^* \in F(Y)$), 寻求最优的$B^* \in F(Y)$(或者$A^* \in F(X)$), 使得$A \to B$最大程度地支持$A^* \to B^*$, 即

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)), x \in X, y \in Y, \tag{1}$$

收稿日期:2012-05-16.　网络出版日期:2012-11-16.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61273018);浙江省自然科学基金资助项目(Y1110651).
通信作者:罗敏霞. E-mail:minxialuo@163.com.

具有最大的可能值.

宋士吉和吴澄在文献[3]中首次提出模糊推理的反向三 I 算法. 反向三 I 算法的基本思想如下:

在式(1)成立的前提下，寻求最优的 $B^* \in F(Y)$(或者 $A^* \in F(X)$)，使得 $A^* \to B^*$ 最大程度支持 $A \to B$,即式(2)有最大可能值:

$$(A^*(x) \to B^*(y)) \to (A(x) \to B(y)), x \in X, y \in Y. \tag{2}$$

$\alpha$-反向三 I 算法的基本思想如下:

在式(1)成立的前提下，对于给定的 $\alpha \in [0,1]$，寻求最优的 $B^* \in F(Y)$(或者 $A^* \in F(X)$)，使得 $A^* \to B^*$ 最大程度支持 $A \to B$，即式(3)成立.

$$(A^*(x) \to B^*(y)) \to (A(x) \to B(y)) \geqslant \alpha, \quad x \in X, y \in Y. \tag{3}$$

以往的三 I 算法及反向三 I 算法大都是选取不含参数的由左连续三角范数诱导的剩余蕴涵算子. 文献[4]中给出了基于 Lukasiewizc 蕴涵的反向三 I 解的正确表达式. 文献[5]讨论了基于某些常见蕴涵算子的反向三 I 算法. 本文将寻求更具一般性的含参数的蕴涵算子，并与模糊推理反向三 I 算法结合起来，为实际应用提供更具一般性的模糊推理算法. Schweizer 与 Sklar 提出了 Schweizer-Sklar 三角范数簇[6-7]，该三角范数簇包含了 4 个最基本的三角范数. 2003 年，Whalen 在文献[8]中研究了由 Schweizer-Sklar 三角范数簇导出的剩余蕴涵簇，并将其中的参数与模糊规则之间交互作用的强度联系起来. 文献[9]研究了基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇的模糊逻辑系统 UL$*$，证明了该系统的可靠性和完备性，并说明了系统 UL$*$ 中参数的含义及其在近似推理中的应用. 文献[10]讨论了基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇的模糊推理模型的连续性. 文献[11]中给出了基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇的三 I 算法.

Schweizer-Sklar 三角范数簇具有柔化性，使得由其构造的逻辑系统在模糊推理中具有良好的属性. 本文将模糊推理反向三 I 算法与由 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇结合起来，并讨论基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的反向三 I 算法和 α-反向三 I 算法，并给出对应三 I 解的表达式. 根据 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的特点，讨论当参数取特殊值时,所对应的特殊蕴涵算子 $\to_D$、$\to_L$、$\to_G$、$\to_P$ 的反向三 I 算法，同时讨论对应的三 I 解的表达式.

## 1　预备知识

**定义 1**[6-7]　Schweizer-Sklar 三角范数簇为[0,1]上含参数 $m$ 的三角范数 $\otimes_m$: $[0,1]^2 \to [0,1]$,且对任意 $x, y \in [0,1], m \in \mathbf{R}$,

$$x \otimes_m y = \begin{cases} 0 \vee (x^m + y^m - 1)^{\frac{1}{m}}, & m \neq 0, \\ xy, & m = 0. \end{cases}$$

特别地，当 $m = +\infty$ 时,

$$x \otimes_m y = x \otimes_D y = \begin{cases} x \wedge y, & x \vee y = 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}\text{(突变积)}$$

当 $m = 1$ 时, $x \otimes_m y = x \otimes_L y = (x + y - 1) \vee 0$ (Lukasiewizc 三角范数); 当 $m = 0$ 时, $x \otimes_m y = x \otimes_P y = xy$(乘积三角范数); 当 $m = -\infty$ 时, $x \otimes_m y = x \otimes_M y = x \wedge y$(极小三角范数).

**定义 2**[6-7]　由 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇 $\to_m$: $[0,1]^2 \to [0,1]$,且对任意 $x, y \in [0,1], m \in \mathbf{R}$,

$$x \to_m y = \begin{cases} 1 \wedge (1 - x^m + y^m)^{\frac{1}{m}}, & m \neq 0; \\ 1 \wedge \dfrac{y}{x}, & m = 0. \end{cases}$$

为避免歧义, 当 $m < 0$ 时作如下规定: $0 \to_m 0 = 1$, 当 $x \neq 0$ 时, $x \to_m 0 = 0$.

特别地，当 $m = +\infty$ 时,

$$x \to_m y = x \to_D y = \begin{cases} y, & x = 1, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}\text{(突变蕴涵)};$$

当 $m = 1$ 时, $x \to_m y = x \to_L y = 1 \wedge (1 - x + y)$ (Lukasiewizc 蕴涵); 当 $m = 0$ 时, $x \to_m y = x \to_P y = 1 \wedge \dfrac{y}{x}$ (Goguen 蕴涵) 当 $m = -\infty$ 时,

$$x \to_m y = x \to_M y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y; \\ y, & x > y. \end{cases}\text{(Gödel 蕴涵)}$$

**命题 1**　Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的蕴涵簇关于第 1 变元和第 2 变元是左连续的，当 $m > 0$ 时，关于第 1 变元是连续的.

**证明**　当 $m > 0$ 时,

$$x \to_m y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y; \\ (1 - x^m + y^m)^{\frac{1}{m}}, & x > y. \end{cases}$$

根据连续性定义很容易得出 $\to_m$ 关于 $x$、$y$ 都是连续的.

当 $m = 0$ 时, $x \to_m y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y; \\ y/x, & x > y \neq 0. \end{cases}$ 取 $y = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \to_m 0) = 0 \neq (0 \to_m 0) = 1$, 因此 $\to_m$ 关于 $x$ 不是

右连续的. 对任意 $y_0 \in [0,1]$, $\lim\limits_{y \to y_0^-}(x \to_m y) = \lim\limits_{y \to y_0^-}(\frac{y}{x}) = (x \to_m y_0)$, 因此 $\to_m$ 关于 $y$ 左连续. 同样可证 $\to_m$ 关于 $x$ 左连续.

$$\text{当 } m<0 \text{ 时}, x \to_m y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y; \\ 0, & x > y = 0; \\ (1 - x^m + y^m)^{\frac{1}{m}}, & x > y > 0. \end{cases}$$

取 $y = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+}(x \to_m 0) = 0 \neq (0 \to_m 0) = 1$, 因此 $\to_m$ 关于 $x$ 不是右连续的. 对任意 $y_0 \in [0,1]$, $\lim\limits_{y \to y_0^-}(x \to_m y) = \lim\limits_{y \to y_0^-}(1 - x^m + y^m)^{\frac{1}{m}} = (x \to_m y_0)$, 因此, $\to_m$ 关于 $y$ 左连续. 同样可证 $\to_m$ 关于 $x$ 左连续.

## 2 基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的 FMP-反向三 I 算法

**定义 3**[3] 假设集合 $X$ 和 $Y$ 是非空集合, $A, A^* \in F(X)$, $B \in F(Y)$. 在 FMP 问题中, 如果 $B^*$ 是 $F(Y)$ 中使式(2)取最大值的最大模糊集, 则称 $B^*$ 为 FMP-反向三 I 解.

**引理 1**[5] 若二元算子 $\to$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 关于第 1 个变元不增, 且关于第 2 变元不减, 则式(2)的最大值是

$$M(x,y) = (A^*(x) \to 0) \to (A(x) \to B(y)),$$

若 $\to$ 关于第 1 个变元和第 2 变元都是左连续的, 则 FMP-反向三 I 解是惟一的.

**定理 1** 假设 FMP 问题中的蕴涵算子是 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇, 那么 FMP-反向三 I 解的表达式为: 对 $x \in X, y \in Y$,

$$B^*(y) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in E_{y1}} \{(A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)\}, \\ \qquad \chi_{E_{y1}}(x) + \chi_{E_{y1}^c}(x), \ m \leqslant 0; \\ \inf\limits_{x \in E_{y2}} \{(A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x) \vee 0\}, \\ \qquad \chi_{E_{y2}}(x) + \chi_{E_{y2}^c}(x), \quad m > 0. \end{cases}$$

式中:

$$E_{y1} = \{x \in X \mid m \leqslant 0, A(x) \to B(y) \neq 1\},$$

$$E_{y2} = \{x \in X \mid m > 0, (1 - (A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} \vee (A(x) \to B(y)) < 1\},$$

$\chi_A$ 表示集合 $A$ 的特征函数, 即

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

**证明** 由引理 1 知式(2)的最大值是:

$$x \in X, y \in Y,$$

$$M(x,y) = \begin{cases} 1, & m \leqslant 0 \text{ 或 } m > 0, (1 - (A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} \leqslant A(x) \to B(y), \\ ((A^*(x))^m + (A(x) \to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}, & m > 0, (1 - (A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} > A(x) \to B(y). \end{cases}$$

对 $x \in X, y \in Y$ 作下面几种情形讨论:

1) 当 $m = 0$ 时. 此时 $M(x,y) = 1$, 那么 $A^*(x) \to B^*(y) \leqslant A(x) \to B(y)$. 若 $A(x) \to B(y) = 1$, 则 $B^*(y) = 1$. 若 $A(x) \to B(y) \neq 1$, $\frac{B^*(y)}{A^*(x)} \leqslant A(x) \to B(y)$, 所以 $B^*(y) \leqslant A^*(x) \times (A(x) \to B(y)) = (A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)$, 则 $B^*(y) = \inf\limits_{\substack{m=0 \\ A(x) \to B(y) \neq 1}} \{(A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)\}$.

2) 当 $m < 0$ 时. 此时 $M(x,y) = 1$, 那么 $A^*(x) \to B^*(y) \leqslant A(x) \to B(y)$. 若 $A(x) \to B(y) = 1$, 则 $B^*(y) = 1$. 若 $A(x) \to B(y) \neq 1$, $(1 - (A^*(x)^m + (B^*(y))^m)^{\frac{1}{m}} \leqslant A(x) \to B(y)$, 所以

$$B^*(y) \leqslant ((A(x) \to B(y))^m + (A^*(x))^m - 1)^{\frac{1}{m}} = (A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x),$$

则 $B^*(y) = \inf\limits_{\substack{m=0 \\ A(x) \to B(y) \neq 1}} \{(A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)\}$.

3) 当 $m > 0$ 且 $(1 - (A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} \leqslant A(x) \to B(y)$ 时. 此时 $M(x,y) = 1$, 那么 $A^*(x) \to B^*(y) \leqslant A(x) \to B(y)$. 若 $A(x) \to B(y) = 1$, 则 $B^*(y) = 1$. 若 $A(x) \to B(y) \neq 1$, $(1 - (A^*(x)^m + (B^*(y))^m))^{\frac{1}{m}} \leqslant A(x) \to B(y)$, 所以

$$B^*(y) \leqslant ((A(x) \to B(y))^m + (A^*(x))^m - 1)^{\frac{1}{m}} = (A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x),$$

则 $B^*(y) = \inf\limits_{\substack{m<0, A(x) \to B(y) \neq 1 \\ (1-(A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} \leqslant A(x) \to B(y)}} \{(A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)\}$.

4) 当 $m > 0$ 且 $(1 - (A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} > A(x) \to B(y)$ 时. 此时 $M(x,y) = ((A^*(x))^m + (A(x) \to B(y)^m)^{\frac{1}{m}} < 1$, 那么 $(1 - (A^*(x) \to B^*(y))^m + (A(x) \to B(y))^m)^{\frac{1}{m}} = ((A^*(x))^m + (A(x) \to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}$, 所以 $(A^*(x) \to B^*(y))^m = 1 - (A^*(x))^m$. 若 $A^*(x) = 0$, 则 $B^*(y) = 1$. 若 $A^*(x) \neq 0$, 那么

$A^*(x)\to B^*(y)=1-(A^*(x))^m=A^*(x)\to 0$，则 $B^*(y)=0$.

综上 4 种情形，定理 1 中的表达式是 FMP-反向三 I 解.

**推论 1**　假设 FMP 问题中的蕴涵算子是突变蕴涵，那么 FMP-反向三 I 解 $B^*$ 的表达式为：对 $x\in X$，$y\in Y$，$B^*(y)=\inf\limits_{x\in E_y}\{A(x)\to_D B(y)\}\chi_{E_y}(x)+\chi_{E_y^c}(x)$，其中，$E_y=\{x\in X|A^*(x)=1$ 且 $A(x)\to_D B(y)\neq 1\}$.

**推论 2**（文献[4]的定理 2.1）　假设 FMP 问题中的蕴涵算子是 Lukasiewizc 蕴涵，那么 FMP-反向三 I 解 $B^*$ 的表达式为：对 $x\in X,y\in Y,B^*(y)=\inf\limits_{x\in E_y}\{((A(x)\to_L B(y))+A^*(x)-1)\vee 0\}\chi_{E_y}(x)+\chi_{E_y^c}(x)$，其中 $E_y=\{x\in X\mid(1-A^*(x))\vee(A(x)\to_L B(y))<1\}$.

**推论 3**　假设 FMP 问题中的蕴涵算子是 Goguen 蕴涵，那么 FMP-反向三 I 解 $B^*$ 的表达式为：对 $x\in X,y\in Y,B^*(y)=\inf\limits_{x\in E_y}\{(A(x)\to_G B(y))\times A^*(x)\}\chi_{E_y}(x)+\chi_{E_y^c}(x)$，其中，$E_y=\{x\in X\mid A(x)\to_G B(y)\neq 1\}$.

**推论 4**　假设 FMP 问题中的蕴涵算子是 Gödel 蕴涵，那么 FMP-反向三 I 解 $B^*$ 的表达式为：对 $x\in X,y\in Y,B^*(y)=\inf\limits_{x\in E_y}\{(A(x)\to_P B(y))\wedge A^*(x)\}\chi_{E_y}(x)+\chi_{E_y^c}(x)$，其中，$E_y=\{x\in X\mid A(x)\to_P B(y)\neq 1\}$.

**注释 1**　推论 1 ~ 4 分别是定理 1 中令 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数 $m$ 取 $+\infty$、1、0、$-\infty$. 本文中的推论 2 是文献[4]中的定理 2.1. 文献[5]的定理 1.1.5 给出了基于 Goguen 蕴涵的 FMP-反向三 I 解的表达式存在一些疏漏：如果对给定的 $y\in Y$，存在 $x\in X$，使得 $A(x)\to_G B(y)=1$且 $A^*(x)>0$，此时反向三 I 解 $B^*(y)=1$，但由文献[5]的定理 1.1.5 得到的 $B^*(y)=\inf\limits_{x\in E_y}\{(A^*(x)\},E_y=\{x\in X|A^*(x)>0\}$，一般情况下，$B^*(y)\neq 1$.

## 3　基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的 FMT－反向三 I 算法

本节讨论的是当 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数 $m>0$ 时的情形.

**定义 4**[3]　假设集合 $X$ 和 $Y$ 是非空集合，$A\in F(X),B,B^*\in F(Y)$. 在 FMT 问题中，如果 $A^*$ 是 $F(X)$ 中使式(2)取最大值的最小模糊集，则称 $A^*$ 为FMT-反向三 I 解.

**引理 2**[5]　若二元算子→：$[0,1]^2\to[0,1]$关于第 1 变元不增，则式(2)的最大值是

$$N(x,y)=(1\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y)),$$

若→关于第 1 变元连续，则 FMT 反向三 I 解是惟一的.

由引理 2 和命题 1，下面仅讨论当 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数 $m>0$ 时，对应的 FMT 问题反向三 I 解的表达式.

**定理 2**　假设 FMT 问题中的蕴涵算子是 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇（$m>0$），FMT-反向三 I 解 $A^*$ 的表达式为：对 $x\in X,y\in Y$，$A^*(x)=\sup\limits_{y\in E_x}\{((A(x)\to B(y))\to B^*(y))\wedge 1\}\chi_{E_x}(y)$，其中，$E_x=\{y\in Y|m>0,B^*(y)\vee(A(x)\to B(y))<1\}$.

**证明**　对 $m>0$，由引理 2 知，式 (2)的最大值是：对任意 $x\in X,y\in Y$，有

$$N(x,y)=\begin{cases}1,\ B^*(y)\leqslant A(x)\to B(y);\\(1-(B^*(y))^m+(A(x)\to B(y))^m)^{\frac{1}{m}},\\\qquad B^*(y)>A(x)\to B(y).\end{cases}$$

对 $x\in X,y\in Y$，作下面几种情形讨论：

1) 当 $m>0,B^*(y)\leqslant A(x)\to B(y)$ 时，此时 $N(x,y)=1$，那么 $A^*(x)\to B^*(y)\leqslant A(x)\to B(y)$. 若 $A(x)\to B(y)=1$，则 $A^*(x)=0$. 若 $A(x)\to B(y)\neq 1$，$(1-(A^*(x))^m+(B^*(y))^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant A(x)\to B(y)$，所以 $A^*(x)\geqslant(1-(A(x)\to B(y))^m+(B^*(y))^m)^{\frac{1}{m}}=(A(x)\to B(y))\to B^*(y)$，则$A^*(x)=\sup\limits_{B^*(y)\leqslant A(x)\to B(y)<1}\{(A(x)\to B(y))\to B^*(y)\}$.

2) 当 $m>0,B^*(y)>A(x)\to B(y)$ 时，此时 $N(x,y)=(1-B^*(y))^m+(A(x)\to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}$，即 $(1-(A^*(x)\to B^*(y))^m+(A(x)\to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}=(1-(B^*(y))^m+(A(x)\to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}$，那么 $A^*(x)\to B^*(y)=B^*(y)$. 若 $B^*(y)=1$，则 $A^*(x)=0$. 若 $B^*(y)\neq 1$，则 $A^*(x)=1$.

综上 2 种情形，定理 2 中的表达式是 FMT-反向三 I 解.

**推论 5**　假设 FMT 问题中的蕴涵算子是突变蕴涵，那么 FMT-反向三 I 解 $A^*$ 的表达式为：对 $x\in X$，$y\in Y,A^*(x)=\chi_{E_x}(y)$. 其中，$E_x=\{y\in Y\mid B^*(y)\neq 1,A(x)\to_D B(y)\neq 1\}$.

**推论 6**（文献[4]的定理 2.2）　假设 FMT 问题中的蕴涵算子是 Lukasiewizc 蕴涵，那么 FMT-反向

三I解$A^*$的表达式为：对$x\in X,y\in Y,A^*(x)=\sup_{y\in E_x}\{(1-(A(x)\to_L B(y))+B^*(y))\wedge 1\}\chi_{E_x}(y)$，其中，$E_x=\{y\in Y|B^*(y)\vee(A(x)\to_L B(y))<1\}$.

**注释2**　推论5、6分别是定理2中令Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数$m$取$+\infty$与1. 推论6是文献[4]中的定理2.2.

## 4　基于Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的α-反向三I算法

本节中讨论的FMT问题是当Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数$m>0$时的情形.

**定义5**[3]　假设集合$X$和$Y$是非空集合，$A,A^*\in F(X),B\in F(Y)$. 在FMP问题中，如果$B^*$是$F(Y)$中满足式(3)的最大模糊集，则称$B^*$为FMP-α-反向三I解.

**定义6**[3]　假设集合$X$和$Y$是非空集合，$A\in F(X),B,B^*\in F(Y)$. 在FMT问题中，如果$A^*$是$F(X)$中满足式(3)的最小模糊集，则称$A^*$为FMP-α-反向三I解.

**引理3**[5]　若二元算子$\to$：$[0,1]^2\to[0,1]$关于第1变元不增，关于第2变元不减，且关于第1和第2变元都是左连续的，则在

$$0<\alpha\leqslant((A^*(x)\to 0)\to(A(x)\to B(y)))$$

条件下，FMP问题的α-反向三I解是惟一的.

**引理4**[5]　若二元算子$\to$：$[0,1]^2\to[0,1]$关于第1变元不增且连续，则在

$$0<\alpha\leqslant((1\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y)))$$

条件下，FMT问题的α-反向三I解是惟一的.

**定理3**　假设FMP问题中的蕴涵算子是Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇，那么FMP-α-反向三I解$B^*_\alpha$的表达式为：对$x\in X,y\in Y,B^*_\alpha(y)=\inf_{x\in E_{\alpha y}}\{\alpha\to((A(x)\to B(y))\otimes A^*(x))\}\chi_{E_{\alpha y}}(x)+\chi_{E^c_{\alpha y}}(x)$，其中，$E_{\alpha y}=\{x\in X|A(x)\to B(y)<\alpha\}$.

**证明**　对$x\in X,y\in Y$，由三角范数性质知，式(3)等价于

$$A^*(x)\to B^*(y)\leqslant\alpha\to(A(x)\to B(y)).\quad(4)$$

当$A(x)\to B(y)\geqslant\alpha$时，$A^*(x)\to B^*(y)\leqslant 1$，则$B^*(y)=1$.

当$A(x)\to B(y)<\alpha$时，$A^*(x)\to B^*(y)<1$，$A^*(x)>B^*(y)$.

若$m<0$，如果$A(x)\to B(y)=0$，那么$A^*(x)\to B^*(y)\leqslant\alpha\to 0=0$，即$A^*(x)\to B^*(y)=0$，则$B^*(y)=0$；如果$A(x)\to B(y)\neq 0$，$(1-(A^*(x))^m+(B^*(y))^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant(1-\alpha^m+(A(x)\to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}$，那么，$B^*(y)\leqslant((A(x)\to B(y))^m+(A^*(x))^m-\alpha^m)^{\frac{1}{m}}=\alpha\to((A(x)\to B(y)\otimes A^*(x))$，则$B^*(y)=\inf_{\substack{m<0,A(x)\to B(y)\neq 0,\\ A(x)\to B(y)<\alpha}}\{\alpha\to((A(x)\to B(y)\otimes A^*(x))\}$.

若$m=0$，$\dfrac{B^*(y)}{A^*(x)}\leqslant\dfrac{A(x)\to B(y)}{\alpha}$，$B^*(y)\leqslant\dfrac{A(x)\to B(y)}{\alpha}\times A^*(\alpha)=\alpha\to((A(x)\to B(y))\otimes A^*(x))$，$B^*(y)=\inf_{\substack{m=0\\ A(x)\to B(y)<\alpha}}\{\alpha\to((A(x)\to B(y)\otimes A^*(x))\}$.

若$m>0$，$(1-(A^*(x))^m+(B^*(y))^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant(1-\alpha^m+(A(x)\to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}$，$B^*(y)\leqslant((A(x)\to B(y))^m+(A^*(x))^m-\alpha^m)^{\frac{1}{m}}=\alpha\to((A(x)\to B(y))\otimes A^*(x))$，则

$B^*(y)=\inf_{\substack{m>0\\ A(x)\to B(y)<\alpha}}\{\alpha\to((A(x)\to B(y)\otimes A^*(x))\}$.

综上，定理3的表达式是FMP-α-反向三I解.

**推论7**　假设FMP问题中的蕴涵算子是突变蕴涵，那么FMP-α反向三I解$B^*_\alpha$的表达式为：对$x\in Y,y\in Y$，

$B^*_\alpha(y)=\inf_{x\in E_{y1}}\{A(x)\to_D B(y))\}\chi_{E_{y1}}(x)+\chi_{E_{y2}}(x)$.

式中：

$E_{y1}=\{x\in X|A^*(x)=1,A(x)\to_D B(y)<1,\alpha=1\}$，

$E_{y2}=\{x\in X|A(x)\to_D B(y)\leqslant\alpha$ 或 $A(x)\to_D B(y)<\alpha<1\}$.

**推论8(文献[4]的定理4.1)**　假设FMP问题中的蕴涵算子是Lukasiewizc蕴涵，那么FMP-α-反向三I解$B^*_\alpha$的表达式为：对$x\in X,y\in Y$，

$B^*_\alpha(y)=\inf_{x\in E_y}\{(A(x)\to_D B(y))+A^*(x)-\alpha\}\chi_{E_y}(x)$，

式中：$E_y=\{x\in X|A(x)\to_L B(y)<\alpha\}$.

**推论9(文献[5]的定理2.1.5)**　假设FMP问题中的蕴涵算子是Goguen蕴涵，那么FMP-α-反向三I解$B^*_\alpha$的表达式为：对$x\in X,y\in Y$，

$$B^*_\alpha(y)=\inf_{x\in E_y}\{\frac{A(x)\to_G B(y)}{\alpha}\times A^*(x)\}\chi_{E_y}(x).$$

式中：$E_y=\{x\in X|A(x)\to_G B(y)<\alpha\}$.

**推论10**　假设FMP问题中的蕴涵算子是Gödel蕴涵，那么FMP-α-反向三I解$B^*_\alpha$的表达式为：对

$x \in X, y \in Y$,

$B_\alpha^*(y) = \inf_{x \in E_y} \{(A(x) \to_P B(y)) \wedge A^*(x)\} \chi_{E_y}(x)$.

式中：$E_y = \{x \in X \mid A(x) \to_P B(y) < \alpha\}$.

**注释** 3　推论 7 ~ 10 分别是定理 3 中令 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数 $m$ 取 $+\infty$、1、0、$-\infty$. 推论 8 是文献[4]中的定理 1，推论 9 是文献[5]中的定理 2.1.5.

由引理 4 和命题 1，仅讨论当 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的参数 $m>0$ 时，对应的 FMT 问题的 α-反向三 I 解的表达式.

**定理** 4　假设 FMT 问题中的蕴涵算子是 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇 ($m>0$)，FMT-α-反向三 I 解 $A_\alpha^*$ 的表达式为：对 $x \in X, y \in Y$,

$A_\alpha^*(x) = \sup_{y \in E_{\alpha x}} \{(A(x) \to B(y)) \to (B^*(y) \otimes \alpha)\} \chi_{E_{\alpha x}}(y)$,

其中，$E_{\alpha x} = \{y \in Y \mid m > 0, A(x) \to B(y) < \alpha, B^*(y) < 1\}$，当 $B^*(y) = 1, A(x) \to B(y) < \alpha$ 时 FMT-α-反向三 I 解不存在.

**证明**：对 $x \in X, y \in Y$，由三角范数性质知，式(3)等价于式(4).

当 $A(x) \to B(y) \geqslant \alpha$ 时，$A^*(x) \to B^*(y) \leqslant 1$，则 $A^*(x) = 0$.

当 $A(x) \to B(y) < \alpha$ 时，即 $A^*(x) \to B^*(y) < 1$，$A^*(x) > B^*(y)$，即 $B^*(y) < 1$.

当 $m>0$，$(1-(A^*(x))^m + (B^*(y))^m)^{\frac{1}{m}} \leqslant (1-\alpha^m + (A(x) \to B(y))^m)^{\frac{1}{m}}$，$A^*(x) \geqslant ((B^*(y))^m + \alpha^m - (A(x) \to B(y))^m)^{\frac{1}{m}} = (A(x) \to B(y)) \to (B^*(y) \otimes \alpha)$，则 $A^*(x) = \sup_{\substack{A(x) \to B(y) < \alpha \\ B^*(y) < 1}} \{(A(x) \to B(y)) \to (B^*(y) \otimes \alpha)\}$.

综上，定理 4 的表达式是 FMT-α-反向三 I 解.

**推论** 11　假设 FMT 问题中的蕴涵算子是突变蕴涵，那么 FMT-α-反向三 I 解 $A_\alpha^*$ 的表达式为：对 $x \in X, y \in Y$,

$$A_\alpha^*(x) = \chi_{E_x}(y),$$

式中：$E_x = \{A(x) \to_D B(y) < \alpha, B^*(y) < 1\}$，当 $B^*(y) = 1, A(x) \to_D B(y) < \alpha$ 时 FMT-α-反向三 I 解不存在.

**推论** 12(文献[4]的定理 3.2)　假设 FMT 问题中的蕴涵算子是 Lukasiewizc 蕴涵，那么 FMT-α-反向三 I 解 $A_\alpha^*$ 的表达式为：对 $x \in X, y \in Y$,

$A_\alpha^*(x) = \sup_{y \in E_x} \{\alpha - (A(x) \to_L B(y)) + B^*(y)\} \chi_{E_x}(y)$,

式中：$E_x = \{y \in Y \mid A(x) \to_L B(y) < \alpha, B^*(y) < 1\}$，当 $B^*(y) = 1, A(x) \to_L B(y) < \alpha$ 时 FMT-α-反向三 I 解不存在.

**注释** 4　推论 11、12 分别是定理 4 中令 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇蕴涵的参数 $m$ 取 $+\infty$ 与 1. 推论 12 是文献[4]中的定理 3.2.

## 5　结束语

本文将 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇与模糊推理反向三 I 算法结合起来，给出反向三 I 算法、α-反向三 I 算法及对应的三 I 解的表达式. 结合 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的特点，讨论当参数取某些特殊值时的反向三 I 算法，并给出对应三 I 解的表达式. 文献[5]定理 1.1.5 中表示式有疏漏，本文给出了基于 Goguen 蕴涵 FMP 问题反向三 I 解的正确表达式. 同时为解决实际应用问题提供了一种柔性化的模糊推理反向三 I 算法.

## 参考文献：


[1] 裴道武. 关于模糊逻辑与模糊推理逻辑基础问题的十年研究综述[J]. 工程数学学报, 2004, 21 (2): 249-258.
PEI Daowu. A survey of ten years' studies on fuzzy logic and fuzzy reasoning[J]. Journal of Engineering Mathmatics, 2004, 21 (2): 249-258.

[2] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学: E 辑, 1999, 29 (1): 43-53.

[3] 宋世吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法[J]. 中国科学: E 辑, 2002, 32 (2): 230-246.

[4] LIU H W. The correct expressions of reverse triple I method for fuzzy reasoning[J]. Fuzzy Information and Engineering, 2009, 62 (2): 1489-1499.

[5] 彭家寅, 侯健, 李洪兴. 基于某些常见蕴涵算子的反向三 I 算法[J]. 自然科学进展, 2005, 15 (4): 404-410.

[6] SCHWEIZER B, SKLAR A. Associative functions and statistical triangle inequalities[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 1961, 8: 169-186.

[7] SCHWEIZER B, SKLAR A. Associative functions and abstract semigroups[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 1963, 10: 69-81.

[8] WHALEN T. Parameterized R-implications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134 (2): 231-281.

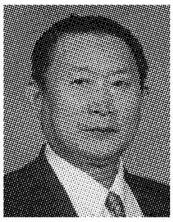
[9] 张小红, 何华灿, 徐扬. 基于 Schweizer-Sklar T-范数的模糊逻辑系统[J]. 中国科学: E 辑, 2005, 35 (12): 1314-1326.

[10]谷敏强，刘智斌. 基于Schweizer-Sklar算子的模糊推理模型的连续性[J]. 应用数学学报，2010，33(3)：532-546.
GU Minqiang, LIU Zhibin. On the continuity of the fuzzy reasoning models based on Schweizer-Sklar operations[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(3): 532-546.
[11]姚宁. 基于一致范数的逻辑系统的研究[D]. 杭州：中国计量学院，2011：15-27.

**作者简介：**

罗敏霞，女，1964年生，教授，博士，中国人工智能学会基础专业委员会常务委员. 主要研究方向为计算机科学中的非经典逻辑、模糊推理算法等. 发表学术论文70余篇，10余篇被SCI\EI检索，出版专著2部.

桑睆，女，1987年生，硕士研究生，主要研究方向为模糊逻辑与模糊推理算法.



何华灿，男，1938年生，教授，博士生导师，原中国人工智能学会副理事长暨人工智能基础专业委员会主任. 主要研究方向为人工智能基础、泛逻辑学和统一无穷理论. 发表学术论文160余篇，其中30余篇被SCI、EI检索，出版专著6部.