

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201111007

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20120712.1022.003.html>

离散时间混合多智能体的拟平均一致性控制

李波¹, 吴淑琴¹, 谷明琴²

(1. 郑州威科姆科技股份有限公司 卫星定位应用工程技术研究中心, 河南 郑州 450000; 2. 中南大学 信息工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 为了研究混合一阶和二阶异质无向多智能体网络离散时间一致性问题, 提出了固定和可变拓扑结构的多智能体网络的拟平均一致性协议. 根据 Lyapunov 函数和代数图论, 分析了多智能体网络的稳定性, 表明在固定和可变拓扑结构的情况下, 混合阶多智能体系统可以达到拟平均一致. 对 6 个节点组成的 4 种不同的无向网络拓扑结构进行了仿真, 结果显示了变拓扑离散时间异质多智能体网络的位置和速度均能达到拟平均一致. 仿真结果表明, 该算法对混合阶多智能体网络的拟平均一致性控制有效.

关键词: 一致性问题; 异质多智能体; 拟平均一致性; 离散时间

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2012)04-0352-06

Quasi-average-consensus control of hybrid swarm agents with discrete time

LI Bo¹, WU Shuqin¹, GU Mingqin²

(1. Satellite Positioning Application Engineering Research Center, Zhengzhou VCOM Science and Technology Co., Ltd., Zhengzhou 450000, China; 2. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The consensus problem of time discrete for undirected multi-agent networks with heterogeneous nodes of mixed first and second order integrators was covered in this paper. Corresponding quasi-average-consensus protocol was proposed for both fixed and switching topology cases. The stability of a multi-agent network was analyzed according to the Lyapunov function and algebra graph theory, and it was suggested that the mixed order multi-agent system can reach a quasi-average-consensus in a fixed and variable topology structure. Four different topologies of the network structure with 6 nodes were simulated, and the results show that the position and velocity of the discrete time variable topology of a heterogeneous multi-agent network can reach a quasi-average-consensus. The simulation results show that the algorithm is effective for quasi-average-consensus control of mixed order multi-agent networks.

Keywords: consensus problem; heterogeneous multi-agent; quasi-average consensus; discrete time

近年来,多智能体的分布式协调控制如编队控制^[1-2]、群集问题^[3]、分布式传感器网络^[4]、通信网络的拥塞控制^[5]等领域受到了极大的关注. Vicsek 等提出了一个简单的自驱动的粒子群相变和数值型复杂动力学的模型^[6], Jadbabaie 等用图论对 Vicsek 模型在理论上进行了解释^[7]; Olfati-Saber^[2] 和 Murray^[8] 介绍了网络动力学一致性的理论框架; 文献^[9]提出了分析多智能体系统的理论框架; Lin 等分析了具有变拓扑和耦合时间延迟的多智能体网络平均一致性问题^[10], 及二阶多智能体网络的一致性控制问题^[11]. 与上述方法不同, 本文研究了具有混

合阶多智能体离散动力学网络的拟平均一致性问题, 并提出一致性协议解决该问题. 用 Lyapunov 函数和代数图论分析系统的稳定性, 实验结果表明, 该方法能够有效解决混合阶多智能体离散动力学网络的拟平均一致性问题.

1 图论和一致性协议

1.1 图论

令 $G = (V, \mathcal{E}, A)$ 为加权无向图, 其 n 阶顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集 $\mathcal{E} = V \times V$, 加权邻接矩阵 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$. 节点的下标属于有限下标集 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, G 的边集记为 $e_{ij} = (v_i, v_j)$. 与边相关联的 $n \times n$ 阶邻接矩阵 A 的元素均为非负, 如式(1)所示.

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, e_{ij} \notin \mathcal{E}, \\ a_{ii} = 0, \forall i \in I, \\ a_{ij} > 0, e_{ij} \in \mathcal{E}. \end{cases} \quad (1)$$

因而,如果图 $G = (V, \mathcal{E}, A)$ 是无向图或平衡图,那么 A 就是对称矩阵.

集合 $N_i = \{v_j \in V: (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$ 表示为 v_i 的邻集,节点集 V 的任一子集 J 称为簇.簇 J 的邻集定义为

$$N_J = \bigcup_{v_i \in J} N_i = \{v_j \in V: v_i \in J, (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}.$$

节点 v_i 的入度、出度定义为

$$\deg_{\text{in}}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}, \deg_{\text{out}}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

对于邻接元素为 0-1 的图, $\deg_{\text{out}}(v_i) = |N_i|$. 图 G 的度矩阵等于对角阵 $\Delta = [\Delta_{ii}]$.

式中:

$$\begin{cases} \Delta_{ij} = 0, i \neq j, \\ \Delta_{ii} = \deg_{\text{out}}(v_i), \end{cases} \quad i, j \in I.$$

图 G 的 Laplacian 矩阵定义为

$$L(G) = \Delta - A.$$

由定义知,如果图 G 是平衡图或无向图,那么 Laplacian 矩阵的每行元素之和为零.因此, Laplacian 矩阵有一个特征值为零,与零特征值所对应的右特征向量为

$$\mathbf{w}_r = 1/\sqrt{n} \mathbf{1}_n = 1/\sqrt{n} [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T_{1 \times n}.$$

用 $G_{\text{sw}}(t)$ 表示变拓扑无向或有向网络,其中切换信号为 $\text{sw}(t): [0, +\infty) \rightarrow \{1, 2, \cdots, M\}$, $M \in \mathbb{Z}^+$. L_{sw} 表示变拓扑网络的 Laplacian 矩阵.

引理 1^[8] 令 $G = (V, \mathcal{E}, A)$ 为加权无向图或有向图,其 Laplacian 矩阵为 L . 无向图 G 节点的最大出度,记为 $d_{\max}(G) = \max_i \deg_{\text{out}}(v_i)$. 那么, $L(G)$ 的所有特征值都位于所定义的圆盘内部:

$$D(G) = \{z \in \mathbb{R}: |z - d_{\max}(G)| \leq d_{\max}(G)\}.$$

1.2 一致性问题

定义 1 令 $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 n 变量的函数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi(0)$ 记为系统的初始状态. 动力学网络中的 χ -一致问题是输入 u_i 计算 $x(\xi(0))$ 的分布式方式,且仅依赖于节点 v_i 自己和它邻近的状态. 称状态反馈

$$u_i = k_i(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \cdots, \xi_{j_m}) \quad (2)$$

是图 G 的协议,如果索引集为 $j_1, j_2, \cdots, j_m \in I$ 的节点簇 $J_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_m}\}$ 满足特性 $J_i \subseteq \{v_i\} \cup N_i$. 当且仅当存在一个渐近稳定平衡点 ξ^* 满足 $\xi^* = \chi(\xi(0))$, 就称协议渐近解决了 ξ -一致性问题.

假设多智能体系统是混合一、二阶的异质多智能体系统. 智能体的总个数为 n , 其中一阶和二阶智能体个数分别为 n_1, n_2 , 每个二阶智能体的动力学方程可以表示为差分方程形式:

$$\xi_i(k+1) = A\xi_i(k) + Bu_i(k). \quad (3)$$

式中: $\xi_i(k) = [x_i(k) \ v_i(k)]^T$ 是二阶智能体的状态, $u_i(k)$ 是控制输入. 矩阵 A, B 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

每个一阶智能体的动力学方程可以表示为差分方程形式:

$$\xi_i(k+1) = \xi_i(k) + u_i(k).$$

式中: $\xi_i(k) = x_i(k)$.

定义 2 离散时间的拟平均一致性问题: 假设 $G = (V, \mathcal{E}, A)$ 是强连通有向网络或连通无向网络. 如果存在一个渐近的稳定平衡点 ξ^* , 满足:

$$\xi^* = \begin{cases} [\hat{\xi} \ 0]^T, i \in \{1, 2, \cdots, n_2\}; \\ \hat{\xi}, i \in \{1, 2, \cdots, n_1\}. \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\hat{\xi} = \frac{1}{n} (\sum_{j=1}^{n_1} x_j(0) + \sum_{l=1}^{n_2} (x_l(0) + \alpha v_l(0)))$,

$\alpha \in \mathbb{R}$. 那么就称式(4)为拟平均一致性问题.

提出下面的一致性协议解决混合阶异质积分智能体网络中的一致性问题.

1.3 一致性协议

定义 3 对于定拓扑和变拓扑网络,可以用一致性协议来解决拟平均一致性问题:

$$\begin{aligned} u_i(k+1) = & \\ & \begin{cases} -v_i(k) + \zeta \sum_{v_j \in J_i} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)), i \in \{1, 2, \cdots, n_2\}, \\ \zeta \sum_{v_k \in J_i} a_{ik}(x_k(k) - x_i(k)), i \in \{1, 2, \cdots, n_1\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

式中: a_{ij} 是图的邻接矩阵的元素, 步长 $\zeta > 0$.

那么式(2)、(3)可以写为统一的形式:

$$\xi(k+1) = P\xi(k).$$

式中: $P = M + I - \zeta \tilde{L}$, $M = \text{diag}(M_1, M_2, \cdots, M_n) =$

$\begin{cases} 0, i=1, 2, \cdots, n_1; \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, i=n_1+1, 2, \cdots, n. \end{cases}$ I 是 $(n+n_2) \times (n+n_2)$ 的单位阵. 对于一阶智能体, \tilde{L} 在分块意义下, 保持不变. 而对于二阶智能体, 在位置上保持不变, 但在速度上增加零行和零列.

图 1 是具有 4 个异质积分智能体的无向网络拓扑结构(其中节点 1、3 是二阶智能体, 而节点 2、4 是一阶智能体). 那么对应于图 1 的矩阵 $\bar{M}, \bar{L}, \bar{P}$ 可以写为:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

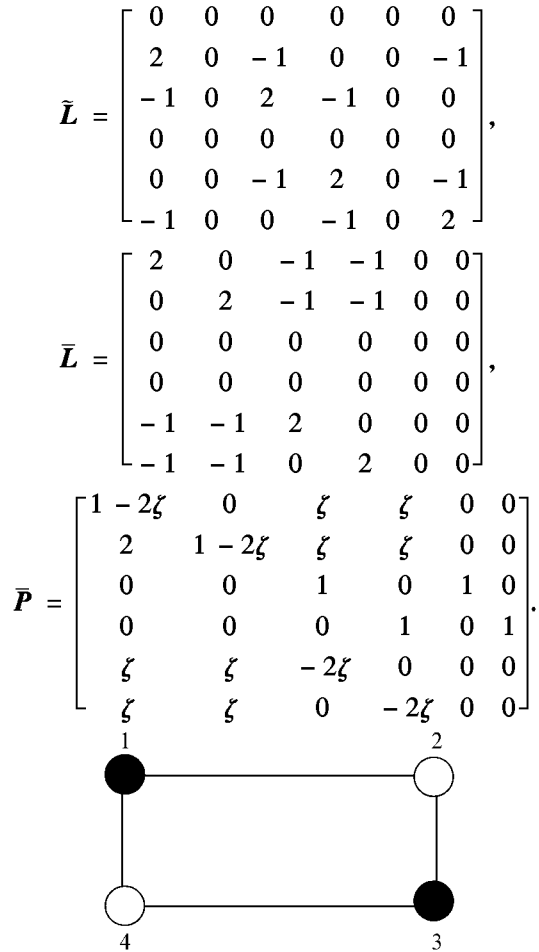


图1 混合阶智能体的无向网络拓扑结构

Fig.1 The topology of network with mixed order integrator agents

相应的系统动力学方程也变为

$$\xi(k+1) = \bar{P}\xi(k). \quad (6)$$

把 L 和 \bar{P} 做分块展开,

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} I_{n_1} - \zeta L_1 & -\zeta L_2 & 0_{n_1} \\ 0_{n_2} & I_{n_2} & I_{n_2} \\ -\zeta L_3 & -\zeta L_4 & 0_{n_2} \end{bmatrix}.$$

式中: I_{n_1} 、 I_{n_2} 、 0_{n_1} 、 0_{n_2} 分别是 $n_1 \times n_1$ 、 $n_2 \times n_2$ 、 $n_1 \times n_1$ 、 $n_2 \times n_2$ 矩阵, $L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix}$, 是多智能体网络拓扑结构对应的 Laplacian 矩阵. L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 是 $n_1 \times n_1$ 、 $n_1 \times n_2$ 、 $n_2 \times n_1$ 、 $n_2 \times n_2$ 矩阵.

对于离散时间的变拓扑网络结构, 系统的动力学方程可以重新写为

$$\xi(k+1) = \bar{P}_{sw}\xi(k).$$

式中: \bar{P}_{sw} 表示随着切换信号变化而变化的 \bar{P} 矩阵.

2 网络动力学的稳定性分析

定理1 如果 $0 < \zeta < 1/(\Delta_{\max}(G))$, 则由一阶和二阶多智能体组成的多智能体系统网络是无向连通的或有向平衡连通的, 那么 \bar{P} 的特征值只有一个为 1, 而其他特征值的模均小于 1. 且

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{P}^n = \tilde{w}_r \tilde{w}_l^T.$$

式中: $\tilde{w}_r = [\tilde{w}_{r_1} \tilde{w}_{r_2} \tilde{w}_{r_3}]$, $\tilde{w}_l^T = \frac{1}{\sqrt{n}}[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ 为 $n_1 \times 1$

矩阵, $\tilde{w}_{r_2}^T = 1/\sqrt{n}[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ 为 $n_2 \times 1$ 为矩阵, $\tilde{w}_{r_3}^T = 1/\sqrt{n}[0 \ 0 \ \dots \ 0]$ 为 $n_2 \times 1$ 矩阵, 且 $\tilde{w}_l^T = 1/\sqrt{n}\mathbf{1}_{n+n_2}$, $\bar{P}\tilde{w}_r = \tilde{w}_r$, $\tilde{w}_l^T\bar{P} = \tilde{w}_l^T$.

证明:

1) 证明如果 $0 < \zeta < 1/(\Delta_{\max}(G))$, 则矩阵 \bar{P} 的特征值的模都小于 1. 设 λ_i 是 \bar{P} 的某个特征值, 其相应的特征向量是 $x_i = [x_{i_1}^T \ x_{i_2}^T \ x_{i_3}^T]^T$, 则有

$$\bar{P} \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} - \zeta L_1 & -\zeta L_2 & 0_{n_1} \\ 0_{n_2} & I_{n_2} & I_{n_2} \\ -\zeta L_3 & -\zeta L_4 & 0_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ x_{i_3} \end{bmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ x_{i_3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (I_{n_1} - \zeta L_1)x_{i_1} - \zeta L_2 x_{i_2} = \lambda_i x_{i_1}, \\ x_{i_2} + x_{i_3} = \lambda_i x_{i_2}, \\ -\zeta L_3 x_{i_1} - \zeta L_4 x_{i_2} = \lambda_i x_{i_3}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\zeta(L_1 x_{i_1} + L_2 x_{i_2}) = (\lambda_i - 1)x_{i_1} \\ x_{i_3} = (\lambda_i - 1)x_{i_2}, \\ -\zeta(L_3 x_{i_1} + L_4 x_{i_2}) = \lambda_i x_{i_3}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_1 x_{i_1} + L_2 x_{i_2} = (1 - \lambda_i)/\zeta x_{i_1}, \\ L_3 x_{i_1} + L_4 x_{i_2} = \lambda_i(1 - \lambda_i)/\zeta x_{i_2}. \end{cases}$$

从以上推导可以得到下面的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \lambda_i)/\zeta & 0 \\ 0 & \lambda_i(1 - \lambda_i)/\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{bmatrix}.$$

即得

$$L \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \lambda_i)/\zeta & 0 \\ 0 & \lambda_i(1 - \lambda_i)/\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{bmatrix}.$$

由这个矩阵方程可知, $(1 - \lambda_i)/\zeta$ 是 L 的特征值, 而 $[x_{i_1}^T \ x_{i_2}^T]^T$ 是这个特征值所对应的特征向量. 如果是连通无向图或是连通有向平衡图, 那么除了一个特征值为零外, 其余特征根都具有正实部. 由圆盘定理可知

$$\begin{aligned} |(1 - \lambda_i)/\zeta - d_{\max}(G)| &\leq d_{\max}(G) \Rightarrow \\ |1 - \lambda_i - \zeta d_{\max}(G)| &\leq \zeta d_{\max}(G) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-\zeta d_{\max}(\mathbf{G}) \leq 1 - \lambda_i - \zeta d_{\max}(\mathbf{G}) \leq \zeta d_{\max}(\mathbf{G}) \Rightarrow \\ 1 - \zeta d_{\max}(\mathbf{G}) \leq \lambda_i \leq 1.$$

如果要得到 $|\lambda_i| \leq 1$, 只需要

$$0 \leq (1 - \zeta d_{\max}(\mathbf{G})) \leq 1 \Rightarrow \\ 0 \leq \zeta \leq 1/d_{\max}(\mathbf{G}).$$

2) 证明 1 是 $\bar{\mathbf{P}}$ 的特征值, 且其对应的左右特征向量分别为 $\tilde{\mathbf{w}}_l$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}_r$.

$$\tilde{\mathbf{w}}_l^T \bar{\mathbf{P}} = (1/\sqrt{n}) \mathbf{1}_{n+n_2}^T \bar{\mathbf{P}} = (1/\sqrt{n}) \mathbf{1}_{n+n_2}^T = \tilde{\mathbf{w}}_l^T,$$

$$\bar{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{w}}_r = \bar{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{r_1} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_3} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_1 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_2 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{n_2 \times 1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{r_1} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_3} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{w}}_r$$

从而可知, 1 是 $\bar{\mathbf{P}}$ 的特征值.

3) 证明 $\mathbf{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{P}}^n = \tilde{\mathbf{w}}_r \tilde{\mathbf{w}}_l^T$ 成立. 则存在一个可逆矩阵 \mathbf{S} , 使得

$$\mathbf{J}_\varphi = \mathbf{S} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \mathbf{J}_{\varphi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_{\varphi_r} \end{bmatrix}.$$

由 1) 的证明可知, 若 $0 < \zeta < 1/(\Delta_{\max}(\mathbf{G}))$, 则 $\bar{\mathbf{P}}$ 的特征值除一个为 1 以外, 其余特征值的模均小于 1. 因此,

$$\mathbf{R} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{P}}^n = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{S} \mathbf{J}_\varphi \mathbf{S}^{-1})^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{S} \mathbf{J}_\varphi^n \mathbf{S}^{-1} = \\ \mathbf{S} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1}.$$

因为 $\mathbf{J}_\varphi \mathbf{S} = \mathbf{S} \bar{\mathbf{P}}$, 可知 \mathbf{S} 的第一列是 $\tilde{\mathbf{w}}_r$, 因为 $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{J}_\varphi = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{S}^{-1}$, 可知 \mathbf{S}^{-1} 的第一行是 $\tilde{\mathbf{w}}_l^T$. 由于 $\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$, 且满足 $\tilde{\mathbf{w}}_l^T \tilde{\mathbf{w}}_r = 1$. 从而可以得到 $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{w}}_r \tilde{\mathbf{w}}_l^T$. 证毕.

定理 2 令 $\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{V}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A})$ 为定拓扑连通无向图, 当 $0 < \zeta < 1/(\Delta_{\max}(\mathbf{G}))$ 时, 应用协议(5)多智能体网络可以实现拟平均一致.

证明

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{P}}^n = \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \tilde{\mathbf{w}}_r \tilde{\mathbf{w}}_l^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{r_1} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_l^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_1 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_2 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{n_2 \times 1}^T \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{n+n_2}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_1 \times 1}^T \\ [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_2 \times 1}^T \\ [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{n_2 \times 1}^T \end{bmatrix}.$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_j(0) + \sum_{l=1}^{n_2} (x_l(0) + \tilde{v}_l(0)) = \\ \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_1} x_j(0) + \sum_{l=1}^{n_2} (x_l(0) + \tilde{v}_l(0)) \right) \otimes \mathbf{1}_n \right].$$

所以,

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^* = \begin{cases} [\tilde{\boldsymbol{\xi}} \ 0]^T, i \in \{1, 2, \dots, n_2\}; \\ \tilde{\boldsymbol{\xi}}, i \in \{1, 2, \dots, n_1\}. \end{cases}$$

式中: $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\sum_{j=1}^{n_1} x_j(0) + \sum_{l=1}^{n_2} (x_l(0) + \tilde{v}_l(0)))$, 这表明, 拟平均一致可以达到. 证毕.

定理 3 令 $\mathbf{G}_{\text{sw}} = (\mathbf{V}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A})$ 为变拓扑连通加权无向图或强连通平衡有向图, 当 $0 < \zeta < 1/d_{\max}(\mathbf{G}_{\text{sw}})$ (其中 $d_{\max}(\mathbf{G}_{\text{sw}})$ 表示变拓扑结构中网络节点的最大度), 利用协议(5)可以实现拟平均一致.

证明

由于 $0 < \zeta < 1/d_{\max}(\mathbf{G}_{\text{sw}})$, 则由定理 1 可知, 系统在 k 时刻的矩阵 $\bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}}$ 除了有一个特征值为 1 外, 其余特征值的模严格小于 1.

$$\tilde{\mathbf{w}}_l^T \bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{n+n_2}^T \bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{n+n_2}^T = \tilde{\mathbf{w}}_l^T,$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} \tilde{\mathbf{w}}_r = \bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} [\tilde{\mathbf{w}}_{r_1}^T \tilde{\mathbf{w}}_{r_2}^T \tilde{\mathbf{w}}_{r_3}^T]^T =$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_1 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_2 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{n_2 \times 1}^T \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{w}}_{r_1}^T \tilde{\mathbf{w}}_{r_2}^T \tilde{\mathbf{w}}_{r_3}^T]^T = \tilde{\mathbf{w}}_r.$$

那么

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}}^n = \mathbf{R}_{\text{sw}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \tilde{\mathbf{w}}_r \tilde{\mathbf{w}}_l^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{r_1} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{r_3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_l^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_1 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_2 \times 1}^T \\ \frac{1}{\sqrt{n}} [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{n_2 \times 1}^T \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{n+n_2}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \\ \frac{1}{n} \begin{bmatrix} [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_1 \times 1}^T \\ [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n_2 \times 1}^T \\ [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{n_2 \times 1}^T \end{bmatrix}.$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_j(0) + \sum_{l=1}^{n_2} (x_l(0) + \tilde{v}_l(0)) = \\ \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_1} x_j(0) + \sum_{l=1}^{n_2} (x_l(0) + \tilde{v}_l(0)) \right) \otimes \mathbf{1}_n \right].$$

也成立, 因此协议(5)可是实现拟平均一致. 证毕.

可以得到 $\bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} \mathbf{I}_{n+n_2} = \mathbf{1}_{1 \times (n+n_2)}$, $\mathbf{1}_{n+n_2}^T \bar{\mathbf{P}}_{\text{sw}} = \mathbf{1}_{1 \times (n+n_2)}$, 即 $\sum_i (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i(k+1) - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_i(k)) = 0$, 因而 $\sum_i \tilde{\boldsymbol{\xi}}_i$ 是一个不变量. 那么 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_k$ 可分解为 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{1_{n+n_2}} + \boldsymbol{\delta}(k)$,

$\delta(k)$ 为不一致性向量. 位置 $x(k)$ 可分解为 $\bar{\xi} \mathbf{1}_{n+n_2} + \delta_x(k)$.

定义位置的不一致函数:

$$V = \|\delta_x(k)\|^2 = \delta_x^T(k) L(G_{sw}) \delta(k).$$

3 仿真结果

图2显示了由6个节点组成的4种不同的无向网络拓扑结构, 其中节点1、5为二阶智能体, 节点2、3、4、6为一阶智能体, 且都具有0~1的权值. 这4种网络结构 $\{G_a, G_b, G_c, G_d\}$ 都是连通的. 图3为一个有限状态自动机, 状态集为 $\{G_a, G_b, G_c, G_d\}$. 混杂系统从状态 G_a 开始, 每经过一个时间间隔, 按照图3所示的状态自动机变化到下一个状态.

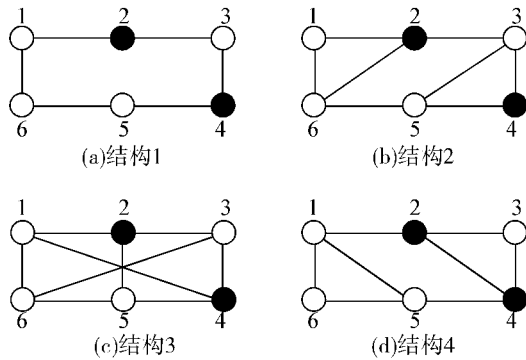


图2 4种拓扑结构

Fig. 2 4 kinds of topology configurations

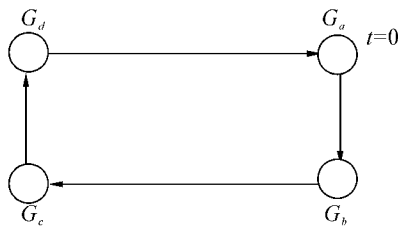
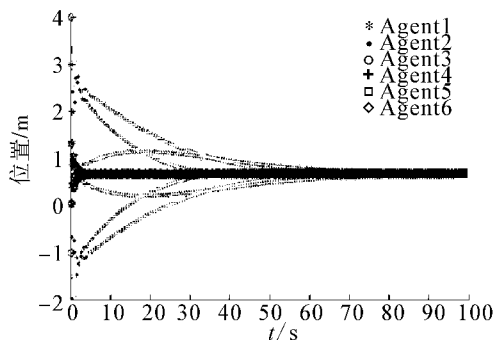


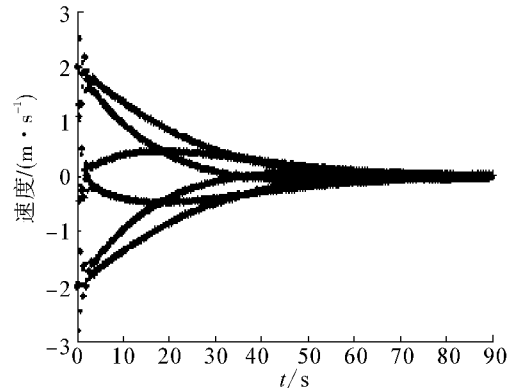
图3 4个状态的有限状态自动机

Fig. 3 A finite automaton with four states

图4~5显示了变拓扑离散时间异质多智能体网络一致性控制的仿真结果.



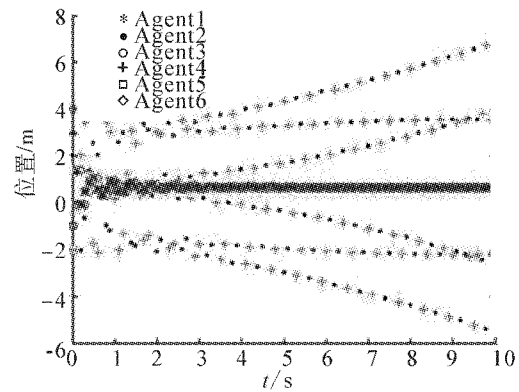
(a) 位置转移



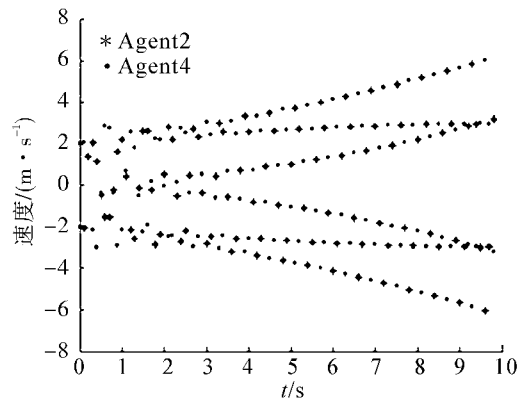
(b) 速度转移

图4 步长为0.33时变拓扑无向网络下的仿真结果

Fig. 4 Simulation results in switching topology network with step 0.33



(a) 位置转移



(b) 速度转移

图5 步长为0.34时变拓扑无向网络下的仿真结果

Fig. 5 Simulation results in switching topology network with step 0.34

仿真研究中, 状态的初值为 $[3(2, -2) - 1(-2, 2) - 24]^T$, $k=1$, 一致位置状态分量为0.667, 一致速度分量为零. 步长分别取不同的值0.33和0.34. 从图5中可以看出当步长大于0.33时, 系统开始趋于发散. 仿真结果证明了稳定性分析

的正确性.

4 结束语

本文提出了离散时间多智能体系统上的拟平均一致性问题,分析了一致性协议适用的条件,即如果多智能体系统的网络拓扑结构是连通的且是平衡的,并且步长 ζ 不大于 $1/d_{\max}(\mathbf{G})$,那么运用提出的一致性协议,可以使系统达到拟平均一致.并在Matlab中仿真了变拓扑无向网络结构的多智能体系统,步长 ζ 分别取0.33、0.34,以及相应的位置不一致函数 $V = \|\delta_x(k)\|^2$ 的曲线.仿真结果证明了理论分析的有效性.

参考文献:

- [1] FAX A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions[C]//The 15th IFAC World Congress. Barcelona, Spain, 2002: 346-352.
- [3] REYNOLDS C W. Flocks, herds, and schools; a distributed behavioral model[J]. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 1987, 21(4): 25-34.
- [4] CORTES J, BULLO F. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems[J]. The SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 44(5): 1543-1574.
- [5] PAGANINI F, DOYLE J, LOW S. Scalable laws for stable network congestion control[C]//Proc of the Int Conf on Decision and Control. Los Angeles, USA, 2001, 1: 185-190.
- [6] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [7] JADBABAIE A, LIN J, MORSE S A. Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [8] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [9] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of IEEE, 2007, 195(1): 215-233.
- [10] LIN P, JIA Y M. Average-consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2008, 348(1): 303-313.
- [11] LIN P, JIA Y M. Consensus control for networks of agents with double integrator dynamics[EB/OL]. [2010-05-12]. <http://www.paper.edu.cn>.
- [12] LEE D J, SPONG M W. Agreement with non-uniform information delays[C]//Proceedings of the 2006 American Control Conference. Minneapolis, USA, 2006: 750-756.

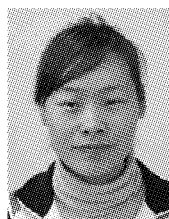
作者简介:



李波,男,1983年生,主要研究方向为时间自动控制、多智能体一致性控制、网络授时.



吴淑琴,女,1972年生,主要研究方向为卫星通信、数字通信及时间频率应用技术.



谷明琴,女,1981年生,博士研究生,主要研究方向为多智能体一致性控制、图像处理、模式识别,发表学术论文多篇.