

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201111015

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20120309.1448.001.html>

# 具有时变时滞耦合的二阶多主体系统的编队控制

来金钢<sup>1</sup>, 陈士华<sup>2</sup>, 路晓庆<sup>2</sup>

(1. 武汉理工大学 自动化学院, 湖北 武汉 430070; 2. 武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 多主体系统的编队控制是一类重要的网络协同控制问题. 研究了在有向连接拓扑结构下, 具有时变时滞耦合的二阶多主体系统的编队控制问题. 通过一种多层领导机制的框架建模, 得到了时不变编队、时变编队和时变轨迹追踪3种编队问题的充分性条件, 并证明了各种预期队列是以指数的收敛速度形成的. 数值仿真进一步验证了理论结果的正确性, 为该理论在实际中应用起到指导作用.

**关键词:** 多主体系统; 时变时滞; 有向拓扑; 编队控制

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2012)02-0135-07

## Formation control for second-order multi-agent systems with time-varying delays

LAI Jin'gang<sup>1</sup>, CHEN Shihua<sup>2</sup>, LU Xiaoqing<sup>2</sup>

(1. School of Automization, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** The formation control problem for multi-agent systems is one of the most serious network cooperation control problems. The formation control problem of second-order multi-agent systems with time-varying coupling delays in directed interaction topologies was investigated. Sufficient conditions were obtained for the attainment of both time-invariant and time-varying formations as well as for time-varying formations for trajectory tracking by using a special multi-leader framework that attained the formations at exponentially converging speeds. Some numerical simulations were also conducted to validate the theoretical results in order to develop practical applications.

**Keywords:** multi-agent system; time-varying delay; directed topology; formation control

作为一致性相关问题<sup>[1-8]</sup>, 多主体系统的编队控制已经被众多领域的学者所研究, 并广泛应用于多种协同控制领域, 包括无人驾驶飞行器、自制水下潜艇和移动智能系统等. 这种协同控制的关键技术是在各种环境制约下, 均能保证各个主体的状态和队形都达到一致. 从图理论、动力系统理论以及控制论等不同领域出发, 各种编队控制方法<sup>[9-13]</sup>应运而生. 其中大致可分为确定性系统和随机系统2种. 例如, 文献[9]提出了一种新的编队控制的框架, 将编队信息分为全局和局部信息两大类, 并假设只有一小部分主体可以获知全局编队信息, 而局部编队信

息则可以被所有主体感知. 然而, 文献[9]的控制策略是一阶协议, 即通过控制主体的速度而不是加速度来改变主体的位移状态. 在实际控制问题中, 往往是通过控制加速度来实现的, 这就需要设计一种二阶协议来实现编队控制. 此外, 在物理、生物以及电力系统中, 耦合时滞现象是无法避免的, 忽略这一点将会导致不可预测的严重后果. 但现有的文献中很少考虑带时变时滞耦合的编队控制问题.

本文将研究在有向连接拓扑结构中, 一类带有时变时滞耦合的二阶多主体系统的编队控制问题. 采用文献[9]的多层领导框架建模, 将所有主体分为领导者和跟随者2类. 假设每一个领导者可以获知全局编队信息, 且只有一小部分领导者(高层领导者)可以根据状态偏离调整自身的位移并牵制其他领导者达到预期的编队. 类似地, 每一个跟随者可

收稿日期: 2011-11-20. 网络出版日期: 2012-03-09.

基金项目: 国家“973”计划资助项目(2009CB723905); 国家自然科学基金资助项目(70571059).

通信作者: 路晓庆. E-mail: luxq@whu.edu.cn.

以获知局部编队信息,且只有一小部分跟随者(基层领导者)可以根据状态偏离调整自身的位移,并牵制其他跟随者达到预期的编队.进一步假设,每一个领导者可以将自己获知的信息,通过整个编队的演化过程直接或者间接地传递给其跟随者.本文的目的就是在这种多层领导机制框架下,设计适应于时不变编队(time-varying formation, TVF)、时变编队(time-invariant formation, TIF)和时变轨迹追踪(time varying formations for trajectory tracking, TVFT) 3类编队问题的二阶协议.其创新之处有2点:1)这种基于多层领导机制的二阶协议适用于许多拥有多层管理系统的协作机构,每一层管理人员有不同的职责,因此具有潜在的应用价值;2)在设计二阶编队控制协议的时候,考虑了时变时滞耦合因素的影响,这是以往编队控制问题没有提及的.

## 1 编队模型描述

首先介绍文中用到的图理论知识<sup>[13]</sup>和几个引理.设  $G=(V, \mathcal{E}, \mathbf{A})$  为一个  $N$  阶加权有向图,其中顶点集  $V=\{1, 2, \dots, N\}$ , 边集合  $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ , 邻接矩阵  $\mathbf{A}=(a_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$  满足  $a_{ii}=0, a_{ij}>0$ , 当且仅当有一条从  $j$  指向  $i$  的边. 有向图  $G$  的度矩阵  $\mathbf{D}=\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N) \in \mathbf{R}^{N \times N}$  满足  $d_i=\sum_{j \in N_i} a_{ij}, i=1, 2, \dots, N$ , 其中,  $N_i=\{j \in V: (i, j) \in \mathcal{E}\}$  称为  $i$  节点的邻居集. 矩阵  $\mathbf{L}=\mathbf{D}-\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  称为有向图  $G$  的 Laplacian 矩阵. 若任意一组顶点  $(i, j)$  间都有连边, 则称有向图  $G$  是强连通的. 特别地, 当且仅当一个有向图  $G$  的 Laplacian 矩阵是不可约的, 则该有向图  $G$  是强连通的. 一棵有向树是指一个由  $N$  个顶点和  $N-1$  条边组成的有向图, 并且含有一条从根节点通向其余各顶点的有向路径. 相应地, 有向图的一棵生成树是指与一棵有向树有相同顶点集的子图.

**定义 1**  $N$  阶 Laplacian 矩阵  $\mathbf{L}$  的 Perron-Frobenius 标准型<sup>[13]</sup>为

$$\mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & \cdots & L_{mm} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{P}$  为置换矩阵,  $1 \leq m < N, L_{ii} \in \mathbf{R}^{r_i \times r_i}$  是一个标量或者一个不可约子方阵, 且  $N=r_1+r_2+\dots+r_m$ . 由此可知, 如果一个有向图是强连通的, 则  $m=1$ ; 如果一个有向图含有一棵生成树, 则  $m>1$ . 对任意的  $i>1$ , 至少存在某个  $j$  满足  $1 \leq j \leq i-1$ , 使得  $L_{ij} \neq 0$ .

**引理 1**<sup>[14]</sup> 如果有向图  $G$  的 Laplacian 矩阵  $\mathbf{L}$

是不可约的, 对角矩阵  $\mathbf{B}=\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$  满足  $\sum_{i=1}^N b_i > 0, b_i \geq 0, i=1, 2, \dots, N$ , 则矩阵  $\mathbf{L}+\mathbf{B}$  的特征根都具有正实部.

记  $C([- \tau, 0], \mathbf{R}^n)$  为连续函数  $\phi: [- \tau, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$  的赋范  $\|\phi\|_c = \max_{\theta \in [- \tau, 0]} \|\phi(\theta)\|$  Banach 空间. 下面给出著名的 Lyapunov-Razumikhin 定理<sup>[15]</sup>.

**引理 2** 设  $f: C([- \tau, 0], \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^n$  将  $C([- \tau, 0], \mathbf{R}^n)$  中的有界子集映射到  $\mathbf{R}^n$  的有界子集的函数中, 定义如下泛函微分方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x_t(\theta)), \forall t > 0, \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [- \tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\forall \theta \in [- \tau, 0], x_t(\theta) = x(t+\theta), f(0)=0$ . 令  $u(s), v(s), w(s)$  为非降的连续函数, 满足当  $s>0$  时,  $u(s)>0, v(s)>0, w(s)>0, u(0)=v(0)=0$ , 当  $s \rightarrow \infty$  时,  $u(s) \rightarrow \infty$ . 如果存在一个连续函数  $V: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 一个连续非降函数  $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  满足  $s>0$  时,  $\varphi(s)>s$ , 并且存在一个常数  $\sigma \geq 0$ , 使得

$$\begin{cases} u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \\ V(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|) + \sigma. \end{cases} \quad (3)$$

如果

$$\begin{aligned} V(t+\theta, x(t+\theta)) &< \varphi(V(t, x(t))), \\ \forall \theta &\in [- \tau, 0], \end{aligned}$$

则式(2)的零解是一致最终有界的, 进一步, 当  $\sigma=0$  时, 该零解是一致渐近收敛的.

考虑有  $l$  个领导者(记为  $1, 2, \dots, l$ )和  $N-l$  个跟随者(记为  $l+1, l+2, \dots, N$ )组成的系统. 假设领导者的动力学行为与跟随者无关, 但是跟随者则受领导者的影响. 把  $N$  个主体看作顶点, 则主体间的内部连接关系可以用一个有向图  $G$  来表示. 记第  $i$  个主体的运动状态为  $\mathbf{x}_i (i=1, 2, \dots, l)$ , 并设其在  $n$  维欧氏空间中运动, 则其运动轨迹可以用式(4)所示的动力系统描述.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i. \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^n, i=1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i$  和  $\mathbf{u}_i$  分别是位移、速度和控制输入(可以看作是加速度). 记为

$$\mathbf{N}^l = \{1, 2, \dots, l\}, \mathbf{N}^f = \{l+1, l+2, \dots, N\},$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2^T \cdots \mathbf{x}_N^T]^T, \mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2^T \cdots \mathbf{v}_N^T]^T,$$

$$\mathbf{x}^l = [\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2^T \cdots \mathbf{x}_l^T]^T, \mathbf{v}^l = [\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2^T \cdots \mathbf{v}_l^T]^T.$$

**定义 1** 设  $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2^T \cdots \mathbf{f}_l^T] \in \mathbf{R}^{2ln}$  ( $\mathbf{f}_i = [\mathbf{f}_i^{xT} \mathbf{f}_i^{vT}]^T \in \mathbf{R}^{2n}$ ) 是一个与时间相关的列向量, 代表全局编队信息,  $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_{l+1}^T \mathbf{W}_{l+2}^T \cdots \mathbf{W}_N^T] \in \mathbf{R}^{(N-l)n}$  (其中,  $\mathbf{W}_i = [\mathbf{W}_i^1 \mathbf{W}_i^2 \cdots \mathbf{W}_i^l] \in \mathbf{R}^l$ ) 是一个与时间无关的行和为 1 的非负矩阵, 代表局部编队信息. 如果存在

一个  $\mathbf{R}^{2n}$  值函数  $\mathbf{f}_c = [\mathbf{f}_c^*(t)^T \mathbf{f}_c^v(t)^T]^T$  (其中  $\mathbf{f}_c^* \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{f}_c^v \in \mathbf{R}^n$ ), 使得当  $t \rightarrow \infty$  时, 对  $i \in \mathbf{N}^l$  有  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{f}_i^* + \mathbf{f}_c^*$  和  $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{f}_i^v + \mathbf{f}_c^v$ , 对  $i \in \mathbf{N}^f$  有  $\mathbf{x}_i \rightarrow (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}^l$  和  $\mathbf{v}_i \rightarrow (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{v}^l$  则称系统(4)解决了编队问题. 特别地, 如果条件  $\dot{\mathbf{f}}_i^* = \dot{\mathbf{f}}_c^* = \dot{\mathbf{f}}_i^v = \dot{\mathbf{f}}_c^v = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{f}}_i^* = \dot{\mathbf{f}}_i^v \neq \mathbf{0}$  且  $\dot{\mathbf{f}}_c^* = \dot{\mathbf{f}}_c^v = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{f}}_i^* = \dot{\mathbf{f}}_i^v \neq \mathbf{0}$  且  $\dot{\mathbf{f}}_c^* = \dot{\mathbf{f}}_c^v \neq \mathbf{0}$  分别成立, 那么对应地, 称该编队问题为时不变编队、时变编队和时变轨迹追踪问题.

注意到向量  $\mathbf{F}$  定义了由领导者确定的基本编队框架, 非负矩阵  $\mathbf{W}$  则给出了跟随者和其邻居间的局部位移约束. 由于  $\mathbf{W}$  的行和为 1, 跟随者的最终状态一定位于领导者状态的凸组合区域, 因此  $\mathbf{W}$  决定了跟随者的空间分布状况. 而列向量  $\mathbf{F}_c(t)$  则决定了整个编队的队形, 与各个主体的初始状态和外界控制输入相关.

## 2 编队模型分析

本文的主要结论分为 3 部分: 时变一致、时变编队和时变轨迹追踪.

### 2.1 时变一致

首先考虑简化的编队问题: 时变一致性问题. 假设  $\mathbf{f}_1^* = \mathbf{f}_2^* = \dots = \mathbf{f}_l^* = \mathbf{f}_0^*$ ,  $l = N$ , 令  $\dot{\mathbf{f}}_0^* = \dot{\mathbf{f}}_0^v$ ,  $\mathbf{f}_1^v = \mathbf{f}_2^v = \dots = \mathbf{f}_l^v = \mathbf{f}_0^v$ . 如果对于每一个节点  $i$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{f}_0^*\| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{f}_0^v\| = 0$  成立, 则称多主体系统时变一致性可达. 此时, 每一个主体都是领导者, 都可以获知速度  $\mathbf{f}_0^v$  和加速度  $\dot{\mathbf{f}}_0^v$  信息, 但是只有一小部分高层领导者可以获知彼此间的状态差异以及编队信息. 基于此, 设计如下二阶协议:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & \dot{\mathbf{f}}_0^v + k \sum_{j \in \mathbf{N}_i} a_{ij} [\gamma (\mathbf{x}_j(t-\tau) - \mathbf{x}_i(t-\tau)) + \\ & (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)] - kb_i [\gamma (\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{f}_0^*(t-\tau)) + \\ & (\mathbf{v}_i - \mathbf{f}_0^v)]. \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $b_i \geq 0$ .  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$  是对应于有向图  $G$  的邻接矩阵.  $\tau(t)$  是连续可微函数, 满足  $0 < \tau(t) < \tau_0$ . 该协议和已有文献中的协议不同<sup>[9,12]</sup>. 协议(5)是一个二阶协议, 是通过控制主体的加速度来间接控制其位移的. 此外还考虑了信息传输过程中出现的时变时滞耦合现象<sup>[8]</sup>.

**定理 1** 如果有向图  $G$  含有一棵根节点位于  $r$  的有向生成树, 满足  $b_r > 0$ ,  $1 \leq r \leq l$ , 时变时滞  $\tau(t)$  满足:

$$\begin{aligned} 0 < \tau < \tau_0 = \\ & \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\|\mathbf{PZYP}^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{Z}^T\mathbf{P}\| + \beta\|\mathbf{P}\|}. \end{aligned}$$

式中:  $\tau_0$  是一个充分小的正数, 并且  $k > k^*$  ( $k^*$  是一

个与  $\gamma$  相关的正常数). 则应用协议(5)系统(4)的所有主体状态一致性可达.

**证明** 记  $\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{f}_i^*$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^v$ , 则误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i = \bar{\mathbf{v}}_i, \\ \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i = k \sum_{j \in \mathbf{N}_i} a_{ij} [\gamma (\bar{\mathbf{x}}_j(t-\tau) - \bar{\mathbf{x}}_i(t-\tau)) + \\ (\bar{\mathbf{v}}_j - \bar{\mathbf{v}}_i)] - kb_i [\gamma \bar{\mathbf{x}}_i(t-\tau) + \bar{\mathbf{v}}_i], i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

整理得到

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{v}}, \\ \dot{\bar{\mathbf{v}}} &= -k\gamma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_n \bar{\mathbf{x}}(t-\tau) - \\ & k(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_n \bar{\mathbf{v}}(t). \end{aligned}$$

式中:  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_1^T \bar{\mathbf{x}}_2^T \dots \bar{\mathbf{x}}_N^T]^T$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = [\bar{\mathbf{v}}_1^T \bar{\mathbf{v}}_2^T \dots \bar{\mathbf{v}}_N^T]^T$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$ . 令  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{v}}^T]^T$ ,  $\mathbf{L} + \mathbf{B} = \mathbf{H}$ , 则得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= \mathbf{Y}\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{Z}\boldsymbol{\varepsilon}(t-\tau), \\ \text{式中: } \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0} & -k\gamma\mathbf{H} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n, \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k\mathbf{H} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

以下证明  $\mathbf{H}$  是正稳定的. 因为  $G$  含有根节点为  $r$  的有向生成树, 不妨假设  $r = 1$ . 将  $\mathbf{L}$  写为式(6)的形式:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{L}_{11}$  对应于根节点  $r = 1$ , 非奇异矩阵  $\mathbf{L}_{22}$  的特征根都具有正实部. 类似地, 将对角矩阵  $\mathbf{B}$  写成对角块形式  $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ , 其中  $\mathbf{B}_1 = b_1 > 0$ ,  $\mathbf{B}_2 = \text{diag}(b_2, b_3, \dots, b_N)$ . 由  $b_1 > 0$  得  $\mathbf{L}_{11} + \mathbf{B}_1$  正定, 故  $\mathbf{H}$  正稳定. 由 Lyapunov 定理知存在正定矩阵  $\mathbf{M}$  满足  $\mathbf{MH} + \mathbf{H}^T\mathbf{M} = \mathbf{I}_N$ . 取 Lyapunov 函数:

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\mathbf{P}_1\boldsymbol{\varepsilon}(t)}.$$

式中:  $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M}/\gamma \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n$ . 显然,

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \leq V(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2.$$

令  $\mathbf{E} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ -k\gamma\mathbf{H} & -k\mathbf{H} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n$ , 则有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{Z}\mathbf{Y} \int_{-\tau}^0 \boldsymbol{\varepsilon}(t+s) ds.$$

再令  $\mathbf{Q} = -(\mathbf{E}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{E})$ , 则有

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} k\gamma\mathbf{I}_N & k\mathbf{I}_N - \mathbf{M} \\ k\mathbf{I}_N - \mathbf{M} & (k/\gamma)\mathbf{I}_N - 2\mathbf{M} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n.$$

当  $k > k^* = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{M})}{2(1-\gamma)}$  时,

$$\left(\frac{k}{\gamma}\mathbf{I}_N - 2\mathbf{M}\right) - (k\mathbf{I}_N - \mathbf{M})^T(k\gamma\mathbf{I}_N)^{-1}(k\mathbf{I}_N - \mathbf{M}) =$$

$$\left[ \left( \frac{2}{\gamma} - 2 \right) I_N - \frac{M}{k\gamma} \right]^T, M > 0.$$

故  $Q$  是正定的. 根据  $\lambda_{\min}(P) \|\varepsilon\|^2 \leq V(\varepsilon(t)) \leq \lambda_{\max}(P) \|\varepsilon\|^2$  及引理2知, 当  $\tau \in [-\tau_0, 0]$  时,

$$V(\varepsilon(t+\tau)) < \varphi(V(\varepsilon(t))),$$

从而令  $\varphi(s) = \beta s (\beta > 1)$ , 则有

$$\begin{aligned} & -2\varepsilon^T PZY \int_{-\tau}^0 \varepsilon(t+s) ds = \\ & 2 \int_{-\tau}^0 (-Y^T Z^T P \varepsilon)^T \varepsilon(t+s) ds \leq \\ & \int_{-\tau}^0 (-Y^T Z^T P \varepsilon)^T P^{-1} (-Y^T Z^T P \varepsilon) ds + \\ & \int_{-\tau}^0 \varepsilon^T(t+s) (P^{-1})^{-1} \varepsilon(t+s) ds = \\ & \tau \varepsilon^T PZY P^{-1} Y^T Z^T P \varepsilon + \int_{-\tau}^0 V(\varepsilon(t+s)) ds \leq \\ & \tau \varepsilon^T (PZY P^{-1} Y^T Z^T P + \beta P) \varepsilon. \end{aligned}$$

进一步对  $V(\varepsilon(t))$  求导得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= -\varepsilon^T (E^T P + P E) \varepsilon - 2\varepsilon^T PZY \int_{-\tau}^0 \varepsilon(t+s) ds \leq \\ & -\varepsilon^T Q \varepsilon + \tau \varepsilon^T (PZY P^{-1} Y^T Z^T P + \beta P) \varepsilon \leq -\lambda_{\min}(Q) \varepsilon^T \varepsilon + \\ & \tau \varepsilon^T (\|PZY P^{-1} Y^T Z^T P\| + \beta \|P\|) \varepsilon \leq \\ & -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} (1 - \frac{\tau}{\tau_0}) V(\varepsilon) \stackrel{\text{def.}}{=} -\eta V(\varepsilon). \end{aligned}$$

故

$$V(\varepsilon) \leq V(\varepsilon(0)) e^{-\eta t} \|\varepsilon\| \leq \sqrt{\frac{V(\varepsilon(0))}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-(\eta/2)t}.$$

所以, 应用协议(5)系统(4)的所有主体将以指数的收敛速度达成一致.

## 2.2 时变编队

此时编队的最终目的是: 当  $i \in N^l$  时  $x_i \rightarrow f_i^*$  和  $v_i \rightarrow f_i^v$ , 当  $i \in N^f$  时  $x_i(t) \rightarrow (W_i \otimes I_n) x^l$ ,  $v_i(t) \rightarrow (W_i \otimes I_n) v^l$ . 为此, 作如下假设:

1) 领导者集团的拓扑结构中有一棵根节点为  $r$  ( $1 \leq r \leq l$ ) 的有向生成树, 并且领导者的动力行为不受跟随者的影响;

2) 每一个领导者可以感知全局编队信息  $F$ , 并在编队演化过程中将其传递给跟随者;

3) 每一个跟随者可以直接或者间接地从领导者那里获知局部编队信息  $W$ .

实际上, 假设3)等价于在整个主体的拓扑结构中有一棵生成树, 且根节点位于领导者集团中.

采用如下控制协议:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i, i = 1, 2, \dots, N; \\ \dot{v}_i &= \dot{f}_i^v + k \sum_{j=1}^N c_{ij} \{ \gamma [ (x_j(t-\tau) - f_j^x(t-\tau)) - \\ & (x_i(t-\tau) - f_i^x(t-\tau)) ] + [ (v_j - f_j^v) - \\ & (v_i - f_i^v) ] \} - kb_i [ \gamma (x_i(t-\tau) - f_i^x(t-\tau)) + \\ & (v_i - f_i^v) ], i \in N^l; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \sum_{k=1}^N w_k^i \dot{v}_k + k \sum_{j=1}^N c_{ij} \{ \gamma [ x_j(t-\tau) - \\ & \sum_{k=1}^N w_k^j x_k(t-\tau) ] - [ x_i(t-\tau) - \\ & \sum_{k=1}^N w_k^i x_k(t-\tau) ] + \\ & [ (v_j - \sum_{k=1}^N w_k^j v_k) - (v_i - \sum_{k=1}^N w_k^i v_k) ] \} - \\ & kb_i [ \gamma (x_i(t-\tau) - \sum_{k=1}^N w_k^i x_k(t-\tau)) + \\ & (v_i - \sum_{k=1}^N w_k^i v_k) ], i \in N^f, \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $k > 0, 0 < \gamma < 1, b_i \geq 0, C = (c_{ij})_{N \times N}$  是有向图  $G$  的邻接矩阵, 时变时滞  $\tau(t) > 0$  是一个连续函数, 满足  $0 < \tau < \tau_0$ . 则有如下结论.

**定理2** 如果有向图  $G$  含有一个根节点位于  $r$  的有向生成树且满足  $b_r > 0, 1 \leq r \leq l$ , 时变时滞  $\tau(t)$  满足

$$0 < \tau < \tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\|PZY P^{-1} Y^T Z^T P\| + \beta \|P\|}.$$

式中:  $\tau_0$  是一个充分小的正数, 并且  $k > k^*$  ( $k^*$  是一个与  $\gamma$  相关的正常数). 则假设条件1)~3)满足时, 系统(7)解决了时变编队(TVF)问题.

**证明** 对  $i \in N^l$  时作变量变换  $\tilde{x}_i = x_i - f_i^*$  和  $\tilde{v}_i = v_i - f_i^v$ , 对  $i \in N^f$  作变量变换  $\tilde{x}_i = x_i - \sum_{k=1}^N w_k^i x_k$  和  $\tilde{v}_i = v_i - \sum_{k=1}^N w_k^i v_k$ , 则系统(7)可以改写为:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i, i = 1, 2, \dots, N; \\ \dot{\tilde{v}}_i = k \sum_{j=1}^N c_{ij} [ \gamma (\tilde{x}_j(t-\tau) - \tilde{x}_i(t-\tau)) + (\tilde{v}_j - \tilde{v}_i) ] - kb_i ( \gamma \tilde{x}_i(t-\tau) + \tilde{v}_i ), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

定理1保证了  $\tilde{x}_i$  和  $\tilde{v}_i$  均以指数速度收敛到0, 由此可得, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 对  $i \in N^l$  有  $x_i(t) \rightarrow f_i^*(t) + f_c^x$ , 且  $v_i(t) \rightarrow f_i^v(t) + f_c^v$ , 对  $i \in N^f$  有  $x_i(t) \rightarrow (W_i \otimes I_n) x^l$  且  $v_i(t) = (W_i \otimes I_n) v^l$ . 从而定理2证毕. 特别地, 当  $i \in N^l$  时, 令其一致状态为  $f_c$ , 则有如下推论.

**推论** 如果全局编队信息  $F$  为时不变的, 即  $\dot{f}_i^* = \dot{f}_i^v = 0$ , 则在定理2的条件下, 系统(7)解决了TIF问题.

## 2.3 时变轨迹追踪

考虑  $f_c = [f_c^x \ f_c^v]^T$ , 相应的预期追踪轨迹由下列方程确定:

$$\dot{f}_c^* = f_c^v = g(t, f_c^*).$$

进一步假设条件4): 连接拓扑结构中根节点可以感知追踪的参考轨迹, 则应用以下控制协议:

$$\dot{x}_i = v_i, i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_i &= k \sum_{j=1}^N c_{ij} \{ \gamma [ (\mathbf{x}_j(t-\tau) - \mathbf{f}_j^x(t-\tau)) - \\
&\quad (\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{f}_i^x(t-\tau)) ] + \\
&\quad (\mathbf{v}_j - \mathbf{f}_j^v) - (\mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^v) \} - \\
&\quad kb_i [ \gamma (\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{f}_i^x(t-\tau) - \mathbf{f}_c^x(t-\tau)) + \\
&\quad (\mathbf{v}_i^v - \mathbf{f}_i^v - \mathbf{g}(t, \mathbf{f}_c^v)) + \dot{\mathbf{g}}(t, \mathbf{f}_c^v) + \dot{\mathbf{f}}_i^v, i \in \mathbf{N}^l; \\
\dot{\mathbf{v}}_i &= k \sum_{j=1}^N c_{ij} \{ \gamma [ (\mathbf{x}_j(t-\tau) - \sum_{k=1}^N w_k^j \mathbf{x}_k(t-\tau)) - \\
&\quad (\mathbf{x}_i(t-\tau) - \sum_{k=1}^N w_k^i \mathbf{x}_k(t-\tau)) ] + \\
&\quad (\mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^N w_k^j \mathbf{v}_k) - (\mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^N w_k^i \mathbf{v}_k) \} - \\
&\quad kb_i [ \gamma (\mathbf{v}_i(t-\tau) - \sum_{k=1}^N w_k^i \mathbf{x}_k(t-\tau)) + \\
&\quad (\mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^N w_k^i \mathbf{v}_k) ] + \sum_{k=1}^N w_k^i \dot{\mathbf{v}}_k, i \in \mathbf{N}^f. \quad (8)
\end{aligned}$$

其中参数与协议(7)中相同,则有下面结论.

**定理4** 如果有向图  $G$  含有一个根节点位于  $r$  的有向生成树且满足  $b_r > 0, 1 \leq r \leq l$ , 时变时滞  $\tau(t)$

满足  $0 < \tau < \tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\|\mathbf{PZYP}^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{Z}^T\mathbf{P}\| + \beta\|\mathbf{P}\|}$ , 其中,  $\tau_0$  是一个充分小的正数, 并且  $k > k^*$  ( $k^*$  是一个与  $\gamma$  相关的正常数), 则假设条件 1) ~ 4) 满足时, 系统(8)解决了 TVFT 问题.

**证明** 对  $i \in \mathbf{N}^l$  作变量变换  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{f}_i^x - \mathbf{f}_c^x$  和  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^v - \mathbf{g}(t, \mathbf{f}_c^v)$ , 应用定理 1 ~ 2 中的结论可知, 系统(8)的所有主体都将形成编队  $\mathbf{F}$ , 并追踪轨迹  $\mathbf{f}_c$ , 证毕.

### 3 数值仿真

给出一个数值例子来验证本文结论的正确性. 考虑一个由 4 个领导者和 6 个跟随者组成的二阶多主体系统. 图 1 给出了这 10 个主体之间的拓扑结构, 预期的编队队形是一个正三角形. 取系统参数  $k=10, \gamma=0.8, \tau=0.01 \sin t, b_4=1$ , 且邻接矩阵中边的加权因子均为 1, 则有如下编队信息:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i^x &= R_i(t) \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2(i-1)\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2(i-1)\pi}{3}\right) \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3; \\
R_i(t) &= 2 \sin(\sin t) \sin t, i = 1, 2, 3; \\
\mathbf{f}_i^x &= [0 \ 0]^T, i = 4; \\
\mathbf{f}_i^v &= \dot{\mathbf{f}}_i^x, i = 1, 2, 3, 4; \\
\mathbf{f}_c^x &= 3 \begin{bmatrix} \sin(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix}; \\
\mathbf{f}_c^v &= \mathbf{g}(t) = \dot{\mathbf{f}}_c^x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_5^1 &= w_6^2 = w_7^2 = w_8^3 = w_9^3 = w_{10}^1 = 2/3; \\
w_5^2 &= w_6^1 = w_7^3 = w_8^2 = w_9^1 = w_{10}^3 = 1/3; \\
w_i^j &= 0, \text{ 其他.}
\end{aligned}$$

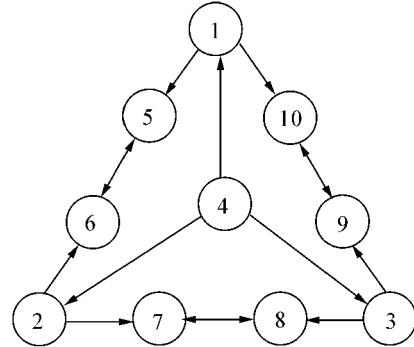


图1 10个主体的连接拓扑结构

Fig.1 The interaction topology of 10 agents

图 2 ~ 3 分别给出了时不变编队、时变编队和时变轨迹追踪 3 类编队问题在二维空间和三维空间中的演化过程. 3 类编队问题的最终编队稳态和误差曲线分别在图 4 ~ 5 中给出.

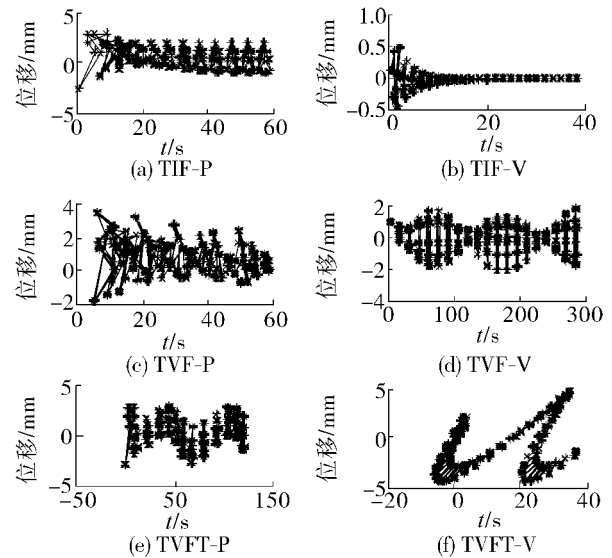
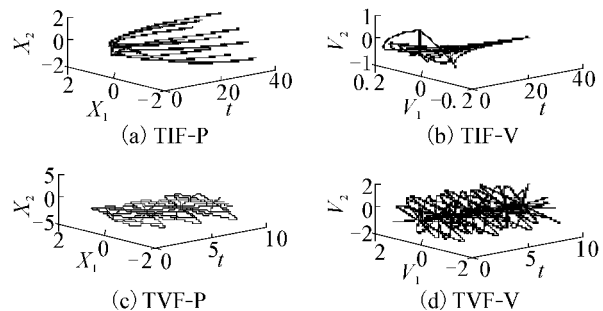


图2 3类编队问题的二维平面演化过程

Fig.2 The formation evolutions of the agents in three different cases (2-D phases)



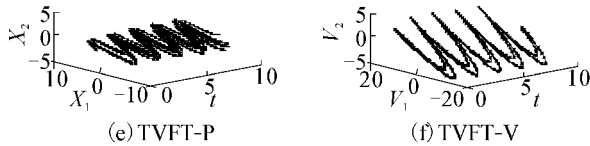


图3 3类编队问题的三维空间演化过程

Fig. 3 The formation evolutions in 3-D spaces

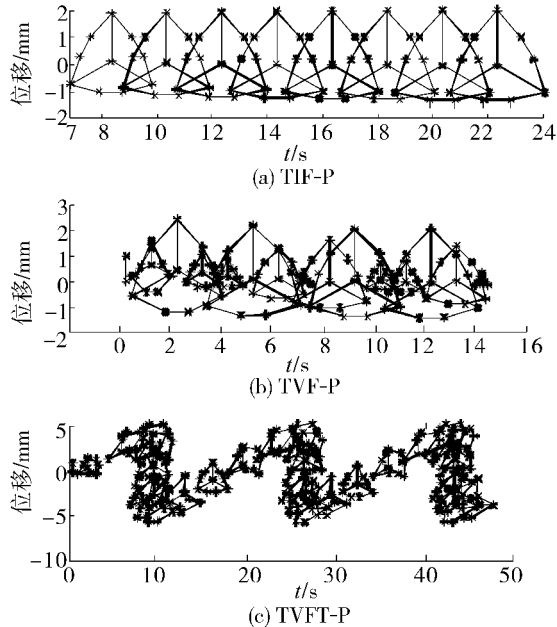


图4 3类编队问题的最终编队稳态(二维显示)

Fig. 4 The final formation states of the agents in three different cases (2-D phases)

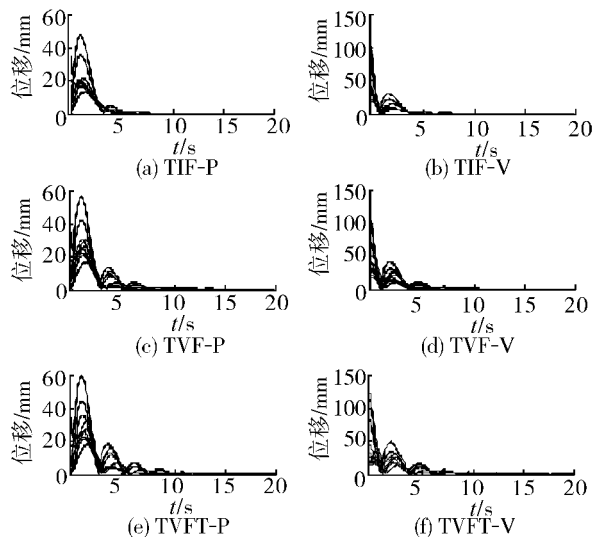


图5 3类编队问题的误差演化过程

Fig. 5 The formation errors of the agents in three different cases

从数值仿真图2~5中可以看出:在时不变编队中,随着时间的演化,所有主体形成的正三角队形保持不变;在时变编队中,随着时间的演化,所有主体形成的正三角队形的中心半径在有规律地放大和缩

小;在时变轨迹追踪中,所有主体形成的正三角队形在追踪一个正弦函数曲线。

## 4 结束语

研究了二阶多主体系统的编队控制问题. 应用多层领导机制的框架建模,设计了具有时变耦合时滞和有向拓扑结构下的二阶编队控制协议,基于图理论、控制理论和 Lyapunov 稳定性理论,解决了时不变编队、时变编队和时变轨迹追踪3类编队控制问题. 数值例子很好地验证了本文的结论. 因此,本文给出的具有时变时滞耦合的二阶多主体系统的编队协议是可行且有效的,为编队问题在实际工程中的应用提供了很好的理论依据。

## 参考文献:

- [1] LIU Xiwei, CHEN Tianping, LU Wenlian. Consensus problem in directed networks of multi-Agents via nonlinear protocols[J]. *Physica Letters A*, 2009, 373(35): 3122-3127.
- [2] YU Wenwu, CHEN Guanrong, LÜ Jinhua. On pinning synchronization of complex dynamical networks[J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 429-435.
- [3] ZHOU Jin, LU Jun'an, LÜ Jinhua. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network[J]. *Automatica*, 2008, 44(4): 996-1003.
- [4] HONG Yiguang, HU Jiangping, GAO Linxin. Tracking control for multi-Agent consensus with an active leader and variable topology[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1177-1182.
- [5] OLFATI-SABOR R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of Agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [6] SU Housheng, WANG Xiaofan, LIN Zongli. Flocking of multi-agents with a virtual leader[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 293-307.
- [7] MOREAU L. Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 169-182.
- [8] HU Jiangping, HONG Yiguang. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays[J]. *Physica A*, 2007, 374(2): 853-863.
- [9] XIAO Feng, WANG Long, CHEN Jie, et al. Finite-time formation control of multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2606-2611.
- [10] JIANG Fangcui, WANG Long. Finite-time information consensus for multi-Agent systems with fixed and switching topologies[J]. *Physica D*, 2009, 238(16): 1550-1560.
- [11] DIMAROGONASA D V, JOHANSSON K H. Stability analysis for multi-agent systems using the incidence matrix: quantized communication and formation control[J]. *Automatica*, 2010, 46(4): 695-700.
- [12] KRISTIAN H M, STJEPAN B, IVICA D. Multi-Agent formation control based on bell-shaped potential functions[J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2010, 58

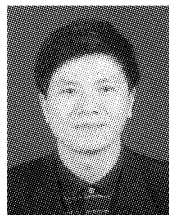
(2): 165-189.

- [13] WU C W. Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems [M]. Singapore: World Scientific, 2007: 5-19.
- [14] LU Xiaoqing, AUSTIN F, CHEN Shihua. Cluster consensus of second-order multi-agent systems via pinning control [J]. Chinese Physics B, 2010, 19(12): 120506.
- [15] HALE J, LUNEL S. Introduction to the theory of functional differential equations, applied mathematical sciences [M]. New York: Springer, 1991: 25-28.

#### 作者简介:



来金钢,男,1985年生,助理工程师,主要研究方向为智能控制理论及其应用,发表学术论文5篇,其中被EI、ISTP检索2篇。



陈士华,男,教授,博士生导师,主要研究方向为微分方程定性理论及混沌动力系统的控制与同步。主持和参与省部级科研项目6项。发表学术论文60余篇,其中被SCI、EI检索50篇。



路晓庆,女,1985年生,博士研究生,主要研究方向为动力系统及其应用、非线性系统、复杂网络、随机分析、多智能体协同控制等,发表学术论文10余篇,均被SCI、EI检索。

## 第10届全国信息获取与处理学术会议

由中国仪器仪表学会主办,沈阳市仪器仪表和自动化学会与高等学校联合承办的全国信息获取与处理学术年会,从2003—2011年分别在沈阳(沈阳工业大学)、大连(大连交通大学)、金华(浙江师范大学)、贵阳(贵州大学)、秦皇岛(燕山大学)、焦作(河南理工大学)、桂林(桂林理工大学)、威海(哈尔滨工业大学)、丹东(丹东市科协)连续举办了9届。全国信息获取与处理学术会议由于投稿地域分布广泛,会议学术气氛浓厚,组织规范,在相关学校、各位作者和热心朋友的共同努力下,已经成为国内仪器仪表领域具有重要影响的学术会议。

第10届全国信息获取与处理学术会议将由中国仪器仪表学会主办,沈阳工业大学、沈阳市科协、沈阳市仪器仪表与自动化学会、辽宁省仪器仪表学会和《仪器仪表学报》编辑部联合承办,并于2012年8月6日在辽宁沈阳召开。

#### 征文范围:

- 1) 视觉检测系统硬件技术:包括光源、滤光片、镜头、图像传感器或成像机构、图像采集与处理电路、图像传输电路、视觉检测系统等。
- 2) 视觉检测系统软件技术:包括成像机构标定,图像预处理(增强、滤波、恢复、重建、裁剪、定位、分割等),目标图像检测,目标图像识别及其应用。
- 3) 目标成像技术:包括微波成像,可见光成像,红外成像,X射线成像,CT成像, $\gamma$ 射线成像,声波成像,超声波成像,磁共振成像,电容成像等。
- 4) 生物特征识别技术:包括虹膜、人脸、人耳、指纹、掌纹、指节纹、手形、手势、手掌静脉、手指静脉、手背静脉、足迹、步态、语音、笔迹等识别技术。
- 5) 其他测量技术:包括各种电量、非电量测量方法,测量装置,传感器等。
- 6) 生物阻抗测量及成像技术:包括生物阻抗测量方法及其应用,生物阻抗正问题,生物阻抗计算方法、成像方法、图像处理以及生物电信号测量、处理方法等。
- 7) 管道、容器与构件安全检测技术。
- 8) 教学实验仪器、装置的开发,各种实验仪器在教学中的应用。

#### 联系方式:

会议网址: <http://www.meeting.org.cn>.

联系电话: 024-25496417(传真).

联系人: 魏秋敏.

通信地址: 110870 沈阳经济技术开发区沈辽西路111号662信箱沈阳市仪器仪表与自动化学会.

电子信箱: syias@126.com(有关会议论文投稿等信息的咨询).