

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201110010

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20120216.2036.002.html>

压缩感知理论及其在成像技术中的应用

赵春晖, 刘巍

(哈尔滨工程大学 信息与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 在传统的 Shannon/Nyquist 采样定理指导下, 信号处理往往面临两大难题: A/D 转换器技术的限制和海量采样数据的处理压力. 压缩感知 (CS) 理论表明当信号具有稀疏性或可压缩性时, 可以通过全局非自适应线性投影的方式, 用远低于 Shannon/Nyquist 采样定理要求的频率获取信号的全部信息. 以 CS 理论为基础的压缩成像 (CI) 技术在近年来得到了快速的发展. 在概述 CS 理论的基础上, 着重介绍了 CI 技术的原理及其发展状况, 并从稀疏分解、观测矩阵的构造和重建算法 3 个方面对其关键问题进行了分析. CI 系统可以显著节省感光器件的数量, 避免了传统成像技术“先采样再压缩”方式带来的资源浪费.

关键词: 压缩感知; 压缩成像; 稀疏分解; 观测矩阵; 重建算法

中图分类号: TP391.41; TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-4785(2012)01-0021-12

Compressive sensing theory and its application in imaging technology

ZHAO Chunhui, LIU Wei

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Under the guidance of the traditional Shannon/Nyquist sampling theorem, signal processing often faces two problems: technology limitation of the A/D converter and processing pressure caused by a mass of sampled data. Compressive sensing (CS) theory suggests that when the signal is sparse or compressible, by means of global non-adaptive linear projection, all the signal information can be obtained with the samples much less than the sampling theorem required. CS theory based compressive imaging (CI) technology has been developed significantly in recent years. This paper first reviewed the principles of CS, and on this basis, discussed the theory and development of CI technology. The key issues of CI were also analyzed from three aspects of sparse decomposition, construction of measurement matrix, and the reconstruction algorithm. The CI system can significantly cut down on the number of photosensitive devices to avoid resource waste caused by a traditional “sample-then-compress” framework.

Keywords: compressive sensing (CS); compressive imaging (CI); sparse decomposition; measurement matrix; reconstruction algorithm

作为信号处理领域的一块基石, 传统的 Shannon/Nyquist 采样定理给出了一种将模拟信号离散化的局部采样方案并确定了采样间距的下限, 它作为信号处理领域中的一个核心原理指导着现今几乎所有的信息采集工作; 但是在诸如雷达、医学成像、

宽带通信等领域中, Shannon/Nyquist 采样定理所要求的采样频率超出了一般 A/D 转换器的处理能力, 导致信号包含的信息难以在采样过程中得到完整的保存并且极易引入混叠和各种噪声, 其导致的另一个结果就是接收端被淹没在海量数据之中. 而为了存储和传输这些海量的采样数据, 又必须额外引入复杂的压缩算法. 随着社会的进步, 人们对于信息的需求正在成倍的增长, 传统的采样方式已经成为了当前信息技术发展的主要瓶颈之一, 迫使人们开始

收稿日期: 2011-10-28. 网络出版时间: 2012-02-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61077079); 高等学校博士学科点专项基金资助项目 (20102304110013); 哈尔滨市优秀学科带头人基金资助项目 (2009RFXG034).

通信作者: 赵春晖. E-mail: zhaochunhui@hrbeu.edu.cn.

在信息获取和处理等方面寻找新的出路。

近些年来,一种名为“压缩感知”(compressive sensing, CS)^[1-3]的理论开始频繁出现在人们的视线之中,该理论证明了当信号具有稀疏性或可压缩性时,可以通过全局非自适应线性投影的方式,用远低于 Shannon/Nyquist 采样定理要求的频率获取信号的全部信息,并且采用非线性优化方法重建该信号。2004 年加州理工大学的 E. Candes 等在研究医学图像重建的过程中发现了这一现象^[4];2006 年 D. Donoho 所撰写的一篇以“压缩感知”为名的论文发表在 IEEE Transactions on Information Theory 上,该理论因此得名^[5];随后 E. Candes 等又进一步证明了采用非自适应的随机线性投影方法,可以在观测值高度不完备和不精确的情况下以极大的概率实现信号重建^[6-7]。在此基础上 D. Donoho 等又在多篇文章中对这一技术进行了深入的分析与进一步的探索^[8-11],使得该理论的框架日趋完善。作为一种全局采样方式,CS 采样过程需要同时操作信号的全部采样值。由于潜在像素时间上的同时性,以及自然图像的成像恰好符合这一要求,因此以 CS 理论为基础的压缩成像(compressive imaging, CI)技术^[12-14]可以显著节省传感器的数量,避免了“先采样再压缩”带来的资源浪费,该项技术的发展将会对诸多领域产生革命性的影响。例如在非可见光谱成像中,感光器件的价格往往是极其昂贵的,若要使用传统方法在某一波段对特定的场景成像,那么一次就要根据成像精度的要求使用几百万或上千万个针对该频谱的感光器件,但是如果调整成像波段,那么就要将这几百万个感光器件全部更换,假如能够通过 CS 理论将感光器件的数量降低到一个,那么将大大节省成本。

CS 理论的魅力在于其暗示了一种全新的信号获取准则,引领人们从另外一个角度审视信息与载体信号之间的深层联系,在此基础上发展起来的 CI 技术在降低成像成本、优化成像方式等方面拥有巨大的发展潜力,在医学成像、空间探测、非可见光成像等领域具有广阔的应用前景。本文在概述 CS 理论的基础上,着重介绍了 CI 技术的原理及其发展状况,并对其关键问题进行了分析。

1 压缩感知的基本原理

1.1 常规采样机制

为了便于后续的讨论,首先要介绍一下信号处理中常规的采样机制。一个信号 $f(t)$ 的获取可以表示为

$$y = \langle f, \varphi_k \rangle, k = 1, 2, \dots, M$$

或者等价的

$$y = \Phi f.$$

式中: Φ 是一个以 φ_k^* (* 表示共轭转置) 为行的 $M \times N$ 矩阵,表示一个普遍意义下的采样行为,不妨称其为观测矩阵。这样可以简单地将信号与波形 $\varphi_k(t)$ 联系起来:如果 $\varphi_k(t)$ 是冲击函数,那么 y 就是理想的信号时域抽样序列;如果 $\varphi_k(t)$ 是正弦波,那么 y 就是信号的傅里叶系数,这也正是核磁共振成像(magnetic resonance imaging, MRI)等医学类断层成像技术的信号获取模型。利用这种采样机制可以通过 M 个向量 $\varphi_k(t) \in \mathbf{R}^N$ 来获取信号 $f \in \mathbf{R}^N$ 的信息。令人真正感兴趣的是 $M \ll N$ 的情况,也就是说当观测值 f 的长度远远小于信号值 f 的长度时是否有可能从少量的测量值中精确恢复信号呢?是否可以人为地设计 $M(M \ll N)$ 个 $\varphi_k(t)$ 使其获得信号的全部信息呢?

从数学的角度来看上述想法几乎是不可能的,要解决这样的问题就涉及到求解一个条件远远少于未知数的“欠定”方程组,而这种方程组的解应当有无穷多个。但是如果信号具有某种特殊的形式,比如一个信号的值在大部分时间里都是 0,只有 S 个位置有值,那么只要有 $M \geq S$ 个观测样本,方程组中的方程数量相对于未知数来讲就显得“充足”了,这就涉及到了信号中普遍存在的稀疏性和可压缩性。

1.2 信号的稀疏性和可压缩性

如果将信号 f 的支撑集的势定义为 $\text{sup}(f) := \{i: f_i \neq 0\}$,那么包含在集合 $\Sigma_S := \{f: \#\text{sup}(f) \leq S\}$ 中的信号就称为 S -稀疏信号,换句话说 S -稀疏信号就是指信号中非零值元素个数最多不超过 S 个的信号。

信号的稀疏性并不仅仅体现在时域上,考虑一个长度为 N 的实值一维离散时间信号 $f \in \mathbf{R}^N$ (高维信号可以向量化为一维信号)。对于一组 $N \times 1$ 维正交基向量 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$,可以将信号表示为这组正交基的线性组合:

$$f = \sum_{i=1}^N x_i \psi_i. \quad (1)$$

式中: x_i 为正交变换的系数。如果以 ψ_i 作为列,构成一个 $N \times N$ 维的正交基矩阵 Ψ 的话,式(1)可以方便地表示为

$$f = \Psi x. \quad (2)$$

式中: x 是以 x_i 为元素的 $N \times 1$ 系数向量。

显然时域形式 f 或频域形式 x 在表示同一个信号时是等价的。从这个角度上来说,如果系数矩阵 x 的支撑集的势为 $\text{sup}(x) := \{i: x_i \neq 0\}$,那么当 $\text{sup}(x) \leq S$ 时,依然可以将信号 f 称为 S -稀疏信号,只是该信号的稀疏性表现在了频域上。

在实际的处理过程中很难遇到严格的稀疏信号。待处理信号的能量不会仅仅集中在时域或频域中的若干个点,大多数情况下它们是散布于整个

信号持续的范围之内的. 一般来讲信号的频域系数会遵循一种指数规律^[15-16], 例如对于一个信号 $f \in \mathbf{R}^N$, 用一组正交基 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ 将其分解为 $f = \sum_{i=1}^N x_i \psi_i$, 如果将系数 x_i 按照从大到小的递减顺序重新排列的话, 即 $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(N)}$, 那么对于每个 $1 \leq n \leq N$ 来说, 各系数应该满足^[6]

$$x_{(n)} \leq R \cdot n^{-1/p},$$

式中: $0 \leq p \leq \infty$. 在这个前提下可以知道, 一般信号的系数 x 中只有少数几个较大的系数, 其他系数相对较小, 称这样的信号为“可压缩信号”. 信号的“可压缩性”是普遍存在于自然界中的, 在此基础上可以在不造成太大感官损失的情况下抛弃小系数, 仅仅保留较大的系数.

1.3 压缩感知的编解码原理

1.3.1 编码观测原理

对于一个长度为 N 的信号 $f \in \mathbf{R}^N$, 假设其在时域不具有稀疏性, 考虑一个线性观测过程 $y = \Phi f$, 其中 Φ 为一个 $M \times N$ 矩阵. 假定 $M \ll N$, 得到一个 $M \times 1$ 向量 y . 显然观测向量 y 就是信号 f 在 Φ 上的一个线性投影. 如果 f 对于一组正交基是稀疏的(或可压缩的), 那么根据式(2), 可以用变换域系数 x 的 S -稀疏形式(或近似稀疏形式)代替其时域形式 f , 则 y 可以表示成

$$y = \Phi f = \Phi \Psi x = \Theta x. \quad (3)$$

式中: 压缩感知矩阵 $\Theta = \Phi \Psi$ 是一个 $M \times N$ 矩阵, 观测向量 y 由 Θ 中对应于信号稀疏值位置的 S 列线性叠加而成. 以上构成了 CS 的基本编码步骤, 如图 1 所示.

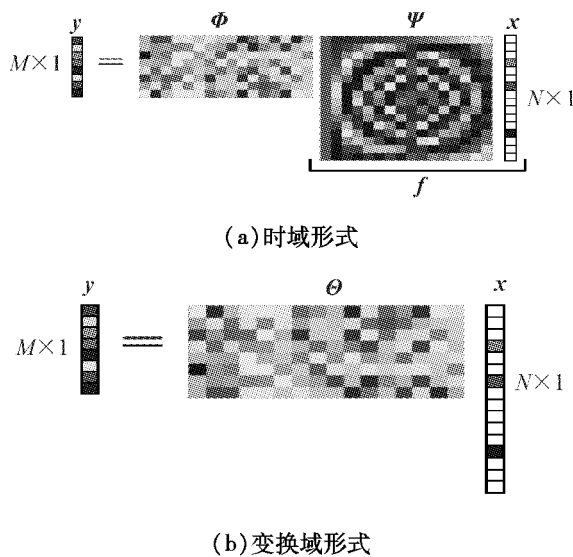


图1 压缩感知编码原理

Fig. 1 Encoding schematic diagram of compressive sensing

这里称 $M \times N$ 矩阵 Φ 为观测矩阵, $N \times N$ 矩阵 Ψ 为稀疏分解矩阵, 此处需要强调的是 Φ 的形式不依赖于

于信号 f , 即整个观测过程不必是自适应的, 它是独立于信号的形式而存在的; 另外 Ψ 可以认为是由任意一组将信号 f 分解为稀疏形式的正交基(或紧框架)组成的矩阵, 它只与信号的重建有关.

在 CS 理论中, 观测矩阵的构造问题实际上就等同于编码模式的选择问题, 观测系统的设计与实现都是围绕着观测矩阵展开的. 观测矩阵在对信号进行采样观测的同时需要保持原信号的结构, 因为一旦观测过程破坏了信号中的信息, 那么精确重建就是不可能的了^[17]. 观测矩阵的构造问题同时涉及到观测矩阵和压缩感知矩阵, 因为对于一个严格稀疏的信号来说, 观测矩阵 Φ 就是压缩感知矩阵 Θ . 在 CS 过程中, 压缩感知矩阵 Θ 必须保证长度为 N 的 x 可以通过 M ($M \ll N$) 个观测值 y 恢复出来. 由于 $M < N$, 这个问题似乎是病态的. 然而如果 x 是 S -稀疏的, 并且 x 中的 S 个非零系数的位置已知, 那么只要令 $M \geq S$ 就可以解决这个问题. 将这个问题简化成为良态问题的一个充要条件是, 对任意 x 与具有相同非零元素的向量 v 来说, 压缩感知矩阵 Θ 需要满足一定的原则.

在文献[8]中 E. Candes 等介绍了一种“一致不确定原则”(uniform uncertainty principle, UUP), 即压缩感知矩阵 Θ 必须满足

$$\frac{M}{2N} \|v\|_2^2 \leq \|\Theta v\|_2^2 \leq \frac{3M}{2N} \|v\|_2^2.$$

UUP 在本质上阐明了 Θ 具有一种“受限等距特性”(restricted isometry property, RIP). 之后在文献[11]中这一原则又被进一步修改为如式(4)形式, 若从 Θ 中提取 T 列 ($T \subset \{1, 2, \dots, N\}$, $|T| \leq S$) 构成子矩阵 Θ_T , 则 Θ_T 满足

$$1 - \delta_S \leq \frac{\|\Theta_T v\|_2^2}{\|v\|_2^2} \leq 1 + \delta_S. \quad (4)$$

式中: δ_S 为 Θ 的 S -受限等距常数. 这一原则本质上要求压缩感知矩阵 Θ 表现为近似正交的(由于 $M \ll N$, 所以不可能完全正交). 式(4)所表示的就是 RIP 的具体形式, RIP 从本质上说明了一个问题: 要想完全重建原始信号, 必须确保观测矩阵不会把 2 个不同的 S -稀疏信号映射到同一个观测集合当中, 这就要求从观测矩阵中抽取的每 T 个列向量构成的矩阵都是非奇异的.

尽管 RIP 理论特性完美, 但是它只是观测矩阵的一个充分条件, 而不是必要条件. 换句话说, 满足 RIP 条件的矩阵可以作为观测矩阵, 但是可以作为观测矩阵的矩阵未必都满足 RIP 条件. 另外 RIP 条件不具有可计算矩阵结构的简单易行的公式, 这样一来很难用它来判断某一观测矩阵是否拥有这种特性, 并且也很难用它来指导观测矩阵的设计. R. G.

Baraniuk 给出的 RIP 的等价条件是观测矩阵 Φ 和稀疏矩阵 Ψ 不相关,其具体内容就是 Φ 的行不能由 Ψ 的列来表示,反之亦然。

1.3.2 解码重建原理

考虑 S -稀疏系数向量 \mathbf{x} ,如果 $\Theta\mathbf{x}=\mathbf{y}$,那么对于任意位于 Θ 的空集空间 $N(\Theta)$ 中的向量 $\mathbf{r}(\Theta\mathbf{r}=\mathbf{0})$ 来说,都有 $\Theta(\mathbf{x}+\mathbf{r})=\mathbf{y}$ 成立. 这样在式(3)中,当 $M<N$ 时应该有无穷多个解 \mathbf{x}' 满足 $\Theta\mathbf{x}'=\mathbf{y}$. 因此,重建算法的目标就是在解集空间 $H=N(\Theta)+\mathbf{x}$ 中找到信号的稀疏系数向量 \mathbf{x} . 欲在众多候选向量中找到最符合稀疏条件的解,自然要求助于最优化算法. 若将向量 \mathbf{x} 的 l_p 范数定义为

$$(\|\mathbf{x}\|_p)^p = \sum_{i=1}^N |x_i|^p. \quad (5)$$

这里有 3 种范数优化方式可供选择:

1) 最小化 l_2 范数重建. 一般来讲,解决这类优化问题的经典方法是通过求解优化方程:

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}'\|_2 \text{ 满足 } \Theta\mathbf{x}' = \mathbf{y},$$

找到变换空集空间中 l_2 范数(能量)最小的向量 $\hat{\mathbf{x}}$. 这种最优化方法有方便的近似解 $\hat{\mathbf{x}} = \Theta^T(\Theta\Theta^T)^{-1}\mathbf{y}$, 遗憾的是 l_2 范数最小化方法几乎难以找到一个真正 S -稀疏的解,取而代之的是含有大量非 0 值的 $\hat{\mathbf{x}}$. 这是因为从能量的角度上讲, l_2 范数最小化是在众多信号可能的形式中寻找使其能量最小的解,而将能量散布于整个信号范围内往往是将能量降低的有效形式,显然这不是希望见到的形式。

2) 最小化 l_0 范数重建. 由于 l_2 范数最小化表示的信号能量不具有稀疏性,所以考虑针对 \mathbf{x} 中非零值计算的 l_0 范数(S -稀疏向量的 l_0 范数等于 S). 将优化方程修改为

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}'\|_0 \text{ 满足 } \Theta\mathbf{x}' = \mathbf{y}, \quad (6)$$

求解这一优化方程可以精确恢复一个 S -稀疏信号. 但一般来讲,求解式(6)既是数值不稳定的同时也是 NP-hard 的,即无法设计有效的算法进行计算,只能通过穷举 \mathbf{x} 中非零值位置的全部可能性来一一验证,直到找到满足条件的解为止。

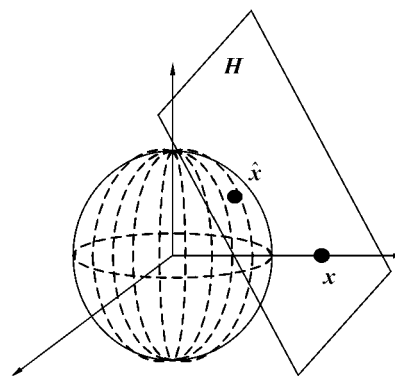
3) 最小化 l_1 范数重建. 相比以上 2 种方法,求解基于最小化 l_1 范数的优化方程:

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}'\|_1 \text{ 满足 } \Theta\mathbf{x}' = \mathbf{y}, \quad (7)$$

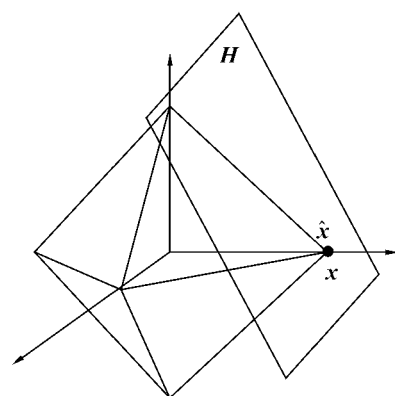
可以精确恢复 S -稀疏信号和近似可压缩信号. 这是一个凸优化问题^[18],可以简化为计算复杂度约为 $O(N^3)$ 的基追踪(basis pursuit, BP)问题^[19].

文献[2-3]分别在二维和三维空间中对最小化 l_1 范数重建信号的有效性做出了几何解释. 通过图 2 可以直观地了解为什么 l_2 -最小化所无法求得的稀疏解, l_1 -最小化却可以找到. 在 \mathbf{R}^N 中所有的 S -稀疏向量 \mathbf{x} 的集合是由坐标系中全部 S -维超平面组成

的一个高度非线性空间. 解集空间 $H=N(\Theta)+\mathbf{x}$ 由于矩阵 Θ 的随机性而具有一个随机的角度,如图 2(a) 所示(在实际使用中 $M, S \gg 3$, 此处为了直观选择三维). 整个优化过程可以想象成是一个“弱球体”从原点开始慢慢膨胀,这个“球”首次与解集空间 H 接触的点即为最终的解,由于所期望得到的解是稀疏形式的,所以“球”和 H 首次接触的点应该位于坐标轴(或若干坐标轴组成的超平面)上. l_2 -最小化得出的解 $\hat{\mathbf{x}}$ 是在 H 上最接近原点的点,这个点可以通过一个与 H 相切的超球面(l_2 -球)来找到. 考虑到 H 方向的随机性,最近点 $\hat{\mathbf{x}}$ 有很高的可能性出现在远离坐标轴的位置,因此可能既不稀疏又不接近正确答案 \mathbf{x} . 与此相对地,图 2(b) 中的 l_1 -球具有坐标轴上的点;因此,当构建 l_1 -球从原点开始膨胀的时候,它会首先与解集空间 H 相交于一个靠近坐标轴的点,这个点正是稀疏向量 \mathbf{x} 的位置。



(a) l_2 范数最小化视觉效果



(b) l_1 范数最小化视觉效果

图 2 重建算法的几何解释

Fig. 2 Visualization of reconstruction algorithm

1.4 模拟信号的压缩感知

CS 是从离散信号处理中发展起来的,当然关心它是否可以推广到模拟信号处理当中. 在实时处理模拟信号时,通常采用的模数(A/D)转换技术往往受到 Shannon/Nyquist 采样率的限制,为了摆脱这种束缚人们开始转向更进一步的深层次转换——模拟/信息(analog-to-information, A/I)转换^[20-21]. A/I 转换针对模

拟信号本身处理,不必将其转换为数字形式就可以通过一系列的步骤得到离散形式的观测值。

对于模拟信号 $f(t)$, 利用一组连续的正交基 $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^N$ 可以将其分解为

$$f(t) = \sum_{n=1}^N x_n \psi_n(t).$$

这里假设系数向量 \mathbf{x} 是严格 S -稀疏的. 尽管每一个 $\psi_n(t)$ 都可能具有极宽的带宽, 但是信号 $f(t)$ 却可以只用很少的自由度确定。

A/I 转换的处理过程大致分为 3 步: 调制、滤波和采样^[22], 如图 3 所示. 首先利用元素为 ± 1 的伪随机序列 $p_c(t)$ 对模拟信号 $f(t)$ 进行调制 (即相乘), 这样做的目的是使信号的频域成分被分散开, 不受后续滤波处理的破坏, 此处的调制速率必须大于或者等于输入信号 $f(t)$ 的 Shannon/Nyquist 采样率; 之后用冲击响应为 $h(t)$ 的低通滤波器对其进行滤波; 最后使用传统的模数 (A/D) 转换器以频率 ξ 采样. 尽管输入信号是模拟量, 但该系统得到的观测值 \mathbf{y} 依然是离散形式的。

$$y[m] = \sum_{n=1}^N x_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau) p_c(\tau) h(m\xi - \tau) d\tau. \quad (8)$$

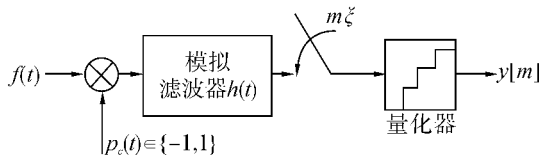


图3 A/I 转换

Fig. 3 Schematic diagram of A/I conversion

为了与离散形式的 CS 统一起来, 依然希望 \mathbf{y} 是由 $f(t)$ 通过一个 $M \times N$ 压缩感知矩阵 Φ 来得到. 根据式 (8) 可以如此构造压缩感知矩阵, 令其第 m 行、第 n 列的元素 $\theta_{m,n}$ 为

$$\theta_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau) p_c(\tau) h(m\xi - \tau) d\tau.$$

显然压缩感知矩阵 Φ 仍然由两部分组成: 稀疏分解矩阵 Ψ 将模拟信号分解为频域系数; 观测矩阵 Φ 从模拟信号中提取离散的观测值. 如此一来, 模拟信号的 CS 就被纳入到离散 CS 的轨道中来了, 离散形式中的理论可以简单地推广到模拟信号的处理当中, 以实现对更加复杂的模拟信号进行灵活的处理^[23-24]。

2 压缩感知的性能

2.1 压缩能力

观测值向量 \mathbf{y} 作为最终的编码结果, 其长度与观测矩阵 Φ 的某一维长度 M 相关, M 的大小显然不可能是任意的, 它必然有一个下限. 为了找到这个

下限首先要引入矩阵相关性的概念. 观测矩阵 Φ 和稀疏分解矩阵 Ψ 之间的相关性可以采用矩阵间的相关系数 $\mu(\Phi, \Psi)$ 表示。

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq k, j \leq N} |\langle \varphi_k, \psi_j \rangle|.$$

式中: $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$. 简单来说, 相关系数表征了 2 个矩阵所包含的元素之间最大的相关关系. $\mu(\Phi, \Psi)$ 越大表示 2 个矩阵之间的相关性越大, 反之则越小。

定理 1^[11] 假设信号 $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^N$ 在稀疏分解矩阵 Ψ 下其系数 \mathbf{x} 是 S -稀疏的, 在 Φ 域中随机选择 M 个观测值满足

$$M \geq C \times \mu^2(\Phi, \Psi) \times S \times \log N.$$

式中: C 为一个正值常数. 那么式 (7) 表示的 l_1 -最小化将以极大的概率取得精确解。

对定理 1 有如下 4 点说明:

1) 相关性的作用是十分明显的, 相关性越小则需要的采样数就越少。

2) 每一个观测值中都包含着原始信号的一部分信息, 可以通过任意 M 个观测值的组合获得信号的全部信息。

3) 可以通过解一个凸优化问题, 从任意 M 个观测值中重建原始信号 \mathbf{f} , 这个重建过程是独立于信号的, 不需要知道任何与原始信号有关的先验知识, 只要原始信号足够稀疏就可以得到精确的结果。

4) “以极大的概率取得精确解” 暗示了例外情况存在的可能性, 某些经过人为精巧安排的不遵守此定理的信号是可能存在的, 但是它们几乎不可能在自然情况下出现。

2.2 对可压缩信号的重建

在前面介绍的 CS 技术都是针对严格稀疏的信号, 但是实际应用中遇到的信号往往不是严格稀疏的, 而是可压缩的. 那么自然要问这样的问题: CS 对于可压缩信号的重建性能如何? 显然精确重建是不可能的; 但是考虑到可压缩信号能够由严格稀疏信号近似, 那么重建信号也应该是精确解的近似. 假设对于任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 保留其中最大的 S 个元素并将其余置 0 得到 \mathbf{x}_s , 下面将以 \mathbf{x}_s 为标准来衡量可压缩信号的重建效果。

定理 2^[1] 假设 $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$, 那式 (7) 的解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 满足:

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1}{\sqrt{S}},$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1 \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1.$$

式中: C 为常数. 如果 \mathbf{x} 是可压缩的并满足指数规律 $x|_{(n)} \leq R \times n^{-1/p}$, 即 \mathbf{x} 属于一个半径为 R 的弱 l_p -球时, 根据经典计算可知:

$$\|x - x_s\|_2 \leq C_2 \times R \times S^{1/2-1/p},$$

$$\|x - x_s\|_1 \leq C_1 \times R \times S^{1-1/p}.$$

通过定理2可知,当 x 为严格 S -稀疏的,即 $x = x_s$,那么重建结果是精确的.当 x 为非稀疏信号时,CS的效果将和预先知道 x 的 S 个最大元素的大小与位置,并用 x_s 近似的效果是一样好的.

2.3 鲁棒性

在实际应用中噪声是不可避免的,一般很难获得没有误差的观测值 y ,如果用 e 表示误差且其大小满足 $\|e\|_2 \leq \varepsilon$,那么压缩感知的模型变为

$$y = \Phi x + e.$$

由于引入了误差项 e ,观测值 y 变得不再准确,以此为基础的信号重建过程也将会随之出现偏差.如果CS技术想在实际应用领域中发挥作用的话,那么它必须具有鲁棒性,即小的误差干扰只对信号重建产生小的影响.将重建的条件放宽为

$$\tilde{x} = \min \|x''\|_1 \text{ 满足 } \|\Phi x'' - y\|_2 \leq \varepsilon. \quad (9)$$

式(9)依然是一个凸优化问题,可以归纳为二次锥规划问题(second order cone program, SOCP),它与式(7)的区别在于仅要求把 $\Phi \tilde{x} - y$ 控制在噪声水平内,也可以得到惟一的解.

定理3^[1,6] 假设 $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$,那么式(7)的解 \tilde{x} 满足

$$\|\tilde{x} - x\|_2 \leq C_1 \times \varepsilon + C_2 \times \frac{\|x - x_s\|_1}{\sqrt{S}}.$$

式中: C_1, C_2 为常数,并且值很小,例如 $\delta_{2S} = 1/4$ 时 $C_1 \leq 5.5, C_2 \leq 6$.

由定理3可知,信号重建的误差是有限的,它受到2个误差项之和的限制,第1个误差项是由噪声引入的,第2个误差项是在无噪声干扰环境下系统自身的误差.从另一个角度上来讲,这也说明在噪声 $\|e\|_2 \leq \varepsilon$ 的干扰下没有性能可以超过式(9)的重建算法了.

3 压缩成像的发展及系统原理

3.1 发展状况

作为一种全局采样方式,CS采样过程需要同时操作信号的全部采样值.由于潜在像素时间上的同时性,自然图像的成像恰好符合这一要求.将CS应用于成像系统可以显著节省传感器的数量,避免了“先采样再压缩”带来的资源浪费. J. Haupt等在文献[25]中探讨了压缩成像相对于传统成像的优势;在文献[26]中 J. Romberg设计了一种用CS描述高频细节配合低频系数的成像方式,取得了不错的实验效果;而 M. Duarte等设计并实现的一种单像素

“压缩感知数码相机”^[12-14]更是将这一新兴技术的实际价值与发展潜力展露无遗,为CI的实际应用奠定了基础.在此基础上, W. Chan等在文献[27]中讨论了相似的问题, A. Heidari等也分析了2-D相机系统的设计问题^[28]. 另外 L. Gan在文献[29]和文献[30]中分别提出了分块压缩成像方法和快速算法; S. Mun等也提出了一种基于方向性变换的分块压缩感知方法^[31];关于彩色图像的内容也在文献[32]中有专门的论述;除静态图像以外,视频的编码与重建等相关问题也得到了关注^[33-35], V. Cevher等在文献[36]中提出了一种用于视频监控系统中的背景去除方法,实验证明该方法在提取视频中的动态物体的轮廓方面效果理想.

3.2 系统原理

压缩成像系统最具代表性的设计就是文献[12-14]的单像素“压缩感知数码相机”,本文以该系统为例介绍压缩成像技术的实现原理,其系统原理如图4所示.系统主要由2个镜头:1个数字微镜系统(digital micromirror device, DMD)和1个感光器件(单像素)组成.要对某一场景成像,首先将其入射光场通过第1个镜头汇聚并由 N 个小镜面组成的DMD反射,然后第2个镜头接收反射光并将其汇聚到感光器件上.在这个系统中,DMD起到了测量矩阵的作用,等效地从 $N \times N$ 沃尔什矩阵中(将-1用0代替)随机抽取 M 行(忽略全为1的第1行)组成测量矩阵. DMD中的每一个小镜面之间的动作相互独立,并受一个随机数生成器(random number generator, RNG)控制.为了生成测量向量 φ_j , RNG对DMD中每一个小镜面发出随机的0或1的指令,控制小镜面向(指令1)或不朝向(指令0)感光器件,这样每次测量就等效为将场景中潜在的像素按列序排成一维,然后与测量向量做内积.如果用 I 表示成像场景对应的数字图像, f 表示 I 按列序组织成一行形成的向量,则感光器件上的电压就等于测量值 $y_j = \langle \varphi_j, f \rangle$,将这一过程重复 M 次即可以得到全部的测量值向量 $y = \Phi f$.在获得了一系列测量值之后,可以根据CS重建原理选择适当的优化算法从这些观测值中重建出原始图像.

这种相机的成像效果如图5所示,图5是对同一场景下不同方式的成像效果进行比较的结果.图5(a)为目标图像,即用65 536个像素按常规方式成像的效果;图5(b)为11 000个测量值重建为65 536个像素的效果(测量值是重建像素的16.78%);图5(c)为利用相当于重建像素1.98%,即1 300个测量值成像的效果.

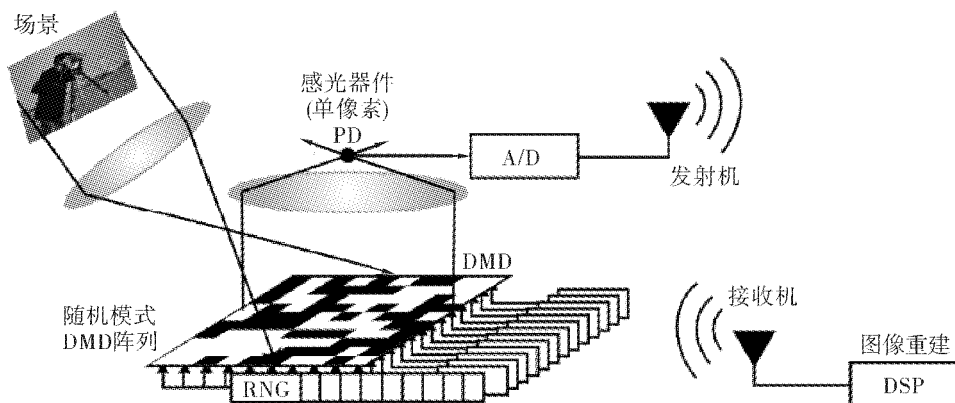


图4 压缩感知相机原理

Fig. 4 Compressive sensing camera block diagram

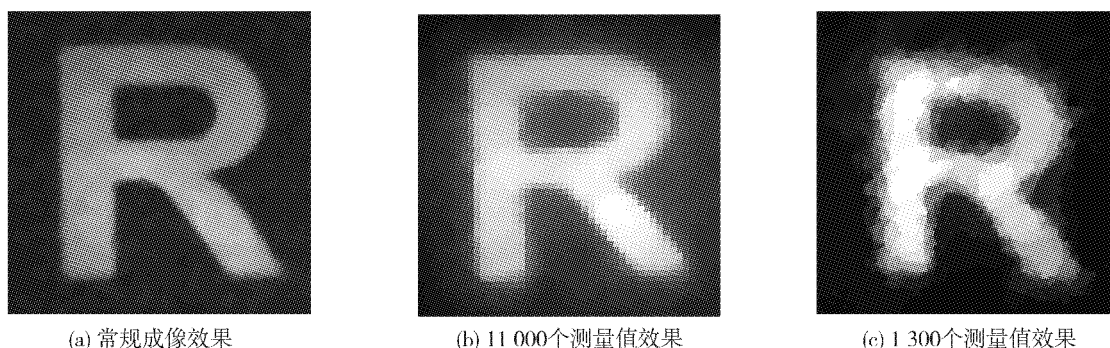


图5 压缩感知相机的成像效果

Fig. 5 Effect of compressive sensing camera

4 压缩成像的关键问题

在整个 CS 体系中,需要解决的关键问题可以被划分成 3 个方面:

- 1) 信号的稀疏表示问题,即如何找到一组正交基(或者紧框架)将信号表示成简洁的形式;
- 2) 观测矩阵的选择问题,即如何选择一个平稳的且与稀疏变换矩阵不相关的观测矩阵,以保证稀疏向量在降维观测时重要信息不遭到破坏;
- 3) 重建算法的设计问题,即如何设计一个快速有效的重构算法,从少量的观测值中准确地恢复出原始信号。

以 CS 理论为基础的 CI 技术可以看成是 CS 针对图像信号进行处理的特殊情况,所以 CI 技术中的关键问题实际上与 CS 是一致的,其中的区别仅在于 CI 更加注重利用和配合图像的特殊属性。本节将参照 CS 理论概述 CI 的相关问题。

4.1 稀疏分解

找到信号最佳的稀疏域就可以得到信号最简洁的表达形式,这是 CS 理论应用的基础和前提。CI 技术处理的是图像信号,其中只有某些二值场景成像能够满足时域严格稀疏的性质,而大部分图像都是相对于某个变换域的可压缩信号。为了获得观测值,

首先要确定一组将图像表示为稀疏形式的基。只有确定了合适的基来表示图像,才能保证在足够稀疏的变换域内进行观测,进而保证重建的精度(TV 最小化算法除外)。

将信号进行稀疏分解的方法有很多,其中最简单的方法就是使用基本的谐波分析中常用的变换方法。以 DCT 变换为基础的静态图像压缩标准 JPEG 和以小波变换为基础的新一代静态图像压缩标准 JPEG-2000 就是其中最典型的应用^[37]。在文献[38]中,G. Peyré 把稀疏变换基的条件做了进一步的扩展,使其从正交基扩充到了由多个正交基构成的正交基字典。除此之外,通过设计一定的算法来计算信号分解的稀疏字典也是可行的,例如 FOCUSS 算法^[39]、K-SVD 算法^[40]、NMF 算法^[41]和 MoTIF 算法^[42]等。

因为完备的正交基可以惟一将信号表示成简单的形式,所以目前在 CS 理论的研究中通常使用完备的正交基。然而对于图像、声音等具有复杂特征信号而言,仅用固定的正交基不足以将其特征完整地表征出来,因此此类信号在正交基下的分解往往不够稀疏。基于超完备冗余字典的信号稀疏表示是近年来又一个新的研究方向和热点,其基本思想是用称之为字典的超完备的冗余函数系统取代基函

数,字典的选择尽可能好地符合被逼近信号的结构,其构成可以没有任何限制,字典中的元素被称为原子.从字典中找到具有最佳线性组合的若干项原子来表示一个信号,称作信号的稀疏逼近或高度非线性逼近^[43-44].对灵长目动物的视觉研究表明,视觉皮层对复杂刺激的表达采用稀疏表示的原则,视觉区细胞对感受区细胞发放输出的信息的特征表达存在“超定”性质,它的编码表达空间的维数大于其输入空间的维数^[45].这说明使用超完备稀疏表示是图像稀疏表达的一种有效策略.超完备信号的稀疏表示方法始于1993年,S. Mallat等在文献[46]中首次提出了应用超完备冗余字典对信号进行稀疏分解的思想,并引入了匹配追踪(marching pursuit, MP)算法,文中论述了超完备冗余字典对信号表示的必要性并强调了超完备字典的构成应符合信号本身所固有的特性以实现MP算法的自适应分解.之后D. Donoho等又于1999年提出了基追踪(basis pursuit, BP)算法^[47],并在2001年发表的另一篇重要文章中给出了基于BP算法的稀疏表示具有惟一解的边界条件,同时提出了字典的互不相干性的概念^[48].显然,采用超完备冗余字典可以更加有效地获取信号的最稀疏形式,从而有效地减少CI的观测值数量,使重建算法的效率更高.但是由于目前基于超完备冗余字典的信号稀疏表示理论还不够成熟,超完备字典中的原子数量一般情况下都很大,算法所涉及的计算十分繁重,因此会给出其实际应用于CI带来一定的困难.

上述不同的稀疏分解手段都可以看成是对图像所进行的一种变换,但需要特别注意的是,CS理论发展自一维信号,目前尚没有研究出处理二维及以上信号的有效算法.无论采用何种变换方法处理高维信号均需要做“降维”处理.对于二维图像来说,“降维”可以是将图像按照列序排成一维向量.然而在“降维”过程中,原本相邻的像素会被人为地分开,使得构成视觉信息的结构受到了破坏.图像的二维变换系数中包含着结构信息,但是二维变换对应的矩阵在计算中会出现维数不匹配的情况.目前通常根据一维变换构造稀疏分解矩阵,在重建中图像被等效为一维数据,结构信息难以准确重建.文献[49]提出了构造等效矩阵来解决图像重建问题的思想,构造等效矩阵所遵循的原则是,构造出的矩阵与“降维”后的图像相乘得到的系数均来自未“降维”图像通过相应二维变换得到的系数矩阵,其原理如图6所示.文中通过构造2D-DCT等效矩阵将图像DCT系数中包含的结构信息引入到图像的重建中,令CI技术可以在使用快速贪婪算法的同时保持图像的结构信息,且不增加软硬件成本,改善了图像

重建的效果.

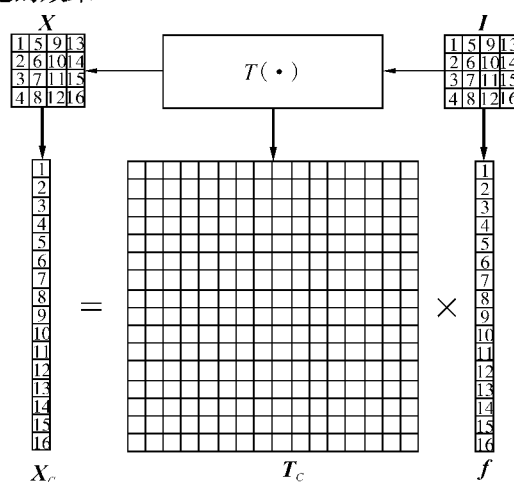


图6 2D-DCT 等效矩阵原理

Fig. 6 The mechanism schematic diagram of 2D-DCT equivalent matrix

4.2 观测矩阵的构造

在CS理论中直接构造一个满足RIP条件的压缩感知矩阵 Θ 是很难实现的.由于稀疏分解矩阵 Ψ 是固定的,要使得 $\Theta = \Phi\Psi$ 满足RIP条件,因此可以通过设计观测矩阵 Φ 来解决.构建一个观测矩阵 Φ 使得 $\Theta = \Phi\Psi$ 满足RIP条件,需要对 N 长向量 v 的 S 个非零元素的每种可能组合验证式(7),这是相当复杂的.然而,若简单地将 Φ 当作随机矩阵选取,则能够以极大的概率同时满足RIP条件和非相关性的要求.一些常见的满足要求的观测矩阵如下:

1) 高斯观测矩阵:构造 $M \times N$ 观测矩阵 Φ 的每一个元素都独立地满足均值为0、方差为 $1/M$ 的高斯分布 $N(0, 1/M)$.高斯观测矩阵有2个优越的性质:a)高斯观测矩阵 Φ 几乎与所有的稀疏信号都不相关.与之等价地,高斯观测矩阵 Φ 与 $\Psi = I$ 不相关,当 $M \geq C \times S \times \log(N/S)$ 时(其中 C 为一个很小的常数),压缩感知矩阵 $\Theta = \Phi I = \Phi$ 以很高的概率满足RIP条件.b)当采用高斯观测矩阵 Φ 时,无论正交矩阵 Ψ 如何选择,观测矩阵 $\Theta = \Phi\Psi$ 都将是独立同分布(independent and identically distributed, IID)的高斯矩阵,因此必将以极高的概率满足RIP.

2) 一致球面观测矩阵^[50-51]:矩阵的列在球 S^{n-1} 上是独立同分布且随机一致的,并且当观测次数为 $M = O(K \ln(N))$ 时,可以在极大的概率下准确重建信号.

3) 二值随机观测矩阵^[7]: $M \times N$ 观测矩阵 Φ 的每一个元素均独立地服从对称伯努利分布($P(\Phi_{i,j} = \pm \sqrt{M}) = 1/2$).研究表明当 $M \geq C \times S \times \ln(N/M)$ 时,准确重构信号的概率极大,并且重建的速度很快.

4) 部分傅里叶观测矩阵^[7,52]:从 $N \times N$ 维傅里

叶变换矩阵中随机地选择 M 行构成 Φ , 并对 Φ 的每一列进行归一化. 部分傅里叶矩阵的一个突出优点是可以利用快速傅里叶变换进行快速计算, 大大降低了采样系统的复杂性, 然而由于其通常只与时域稀疏的信号不相关, 所以应用范围受到了限制.

5) 局部 Hadamard 观测矩阵^[10]: 从 N 维矩阵中随机选择 M 行得到 Φ . 如果用 B 表示分块的大小, 那么当 $M \geq S \sqrt{N/B} \ln(N)^2$ 时, 置乱块 Hadamard 矩阵可以以极大概率精确重构信号.

6) Toeplitz 观测矩阵和循环矩阵^[53]: 当 $M \geq C \times M^3 \times \ln(N/M)$ 时, 这 2 种矩阵使观测矩阵以很大概率满足 RIP 条件, 并且可以直接应用快速傅里叶变换得到快速的重构算法, 能够明显降低高维问题的计算和存储复杂度, 因而对高维问题特别有效.

在性能表现方面, Y. Tsaig 等对一致球面观测矩阵、二值随机观测矩阵、局部 Hadamard 观测矩阵以及部分傅里叶观测矩阵的性能进行了比较, 实验表明使用这几类矩阵作为观测矩阵时, CS 重建信号的误差都较小, 并且随着观测样本数量的增加误差将会进一步减小^[9], 该结论对于现有已被验证的所有观测矩阵都是成立的. 文献^[54]也通过实验对比了常用观测矩阵的性能优劣程度, 在信号稀疏度和 CS 观测数均相同的条件下, 局部 Hadamard 观测矩阵的性能优于其他观测矩阵, 且稀疏度越大效果越明显, 其次是 Toeplitz 观测矩阵, 而随机高斯观测矩阵、二值随机观测矩阵在各种稀疏度下重建效果皆一致, 重建效果最差的是部分傅里叶观测矩阵.

对于 CI 技术来说, 最理想的观测矩阵是只包含 0 和 1 的二值矩阵, 而且其中 0 与 1 的比例越高观测效率就越高, 这也同样适用于 CS 的其他应用领域. 一方面来说, 二值矩阵具有的状态最少, 因而最容易实现; 另一方面来说, 获得观测值后一般要通过量化才能进行编码操作. 如果采用诸如高斯观测矩阵、一致球面观测矩阵或部分傅里叶观测矩阵等作为观测手段的话, 那么量化过程会导致更大的信息丢失并直接影响图像的重建效果. 因此如何构造满足 RIP 并且 0、1 比例高的二值观测矩阵将是 CI 技术今后发展中的热门问题之一.

4.3 重建算法

设计稳定有效的重建算法是实现 CS 的关键问题之一, 也是当前 CS 研究中最热门的方向之一. 由于从观测值中重建出原始信号的方式不是惟一的, 因此构造重建算法的手段也多种多样. 目前已有大量的文献从不同的角度设计出了许多行之有效的方案来解决稀疏信号的重建问题, 这些算法在求解精度、运行效率和适用范围都不各相同, 但归纳起来,

到目前为止出现的主要重构算法可以分为以下 3 类^[17,55-56]:

1) 凸松弛法. 这类方法通过将非凸优化问题转化为凸优化问题求解, 找到信号的逼近, 代表算法包括基追踪算法 (basis pursuit, BP)^[47]、内点法 (interior-point method)^[57]、梯度投影法 (gradient projection)^[58]、迭代阈值法 (iterative thresholding algorithm)^[59] 和迭代硬阈值法 (iterative hard thresholding algorithm, IHT)^[60].

2) 贪婪算法. 这类方法通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号. 代表算法包括匹配追踪算法 (matching pursuit, MP)^[46]、正交匹配追踪算法 (orthogonal matching pursuit, OMP)^[61]、分段正交匹配追踪算法 (stagewise orthogonal matching pursuit, StOMP)^[62]、正则化正交匹配追踪算法 (regularized orthogonal matching pursuit, ROMP)^[63] 和压缩感知匹配追踪算法 (compressive sampling matching pursuit, CoSaMP)^[55].

3) 组合算法. 这类方法要求对信号进行高度结构化地采样, 通过分组测试快速重建. 代表算法包括傅里叶采样^[64]、链式追踪^[65] 和 HHS (heavy hitters on steroids) 追踪^[66] 等.

上述 3 类算法各有其固有的优缺点, 其中凸松弛法在重建时需要的观测值最少, 精度最高, 但是计算复杂度也最高; 组合算法的运行效率最高, 但是其需要的观测值数量最多; 贪婪算法则是在运行效率、对观测值的需求和重建精度方面都取得了折衷的效果. 目前 CS 应用中使用较多的主要是前 2 类算法^[67].

由于图像的特殊性, 其重建可以采用 TV 最小化方法^[68]对像素间梯度进行优化, 这种算法的优势是在重建过程中不必提供稀疏分解矩阵, 并且可以求解出精确结果; 其缺点在于计算复杂, 求解效率非常低, 在处理尺寸较大的图像时可能需要若干天的时间. 令 $\|I\|_{TV}$ 表示二维图像 I 的全变差, 若图像的每一个像素为 $I(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1, t_2 \leq N-1$, 则

$$\|I\|_{TV} = \sum_{t_1, t_2} \sqrt{|D_1 I(t_1, t_2)|^2 + |D_2 I(t_1, t_2)|^2}.$$

式中: D 为有限差分,

$$D_1 I(t_1, t_2) = I(t_1, t_2) - I(t_1 - 1, t_2),$$

$$D_2 I(t_1, t_2) = I(t_1, t_2) - I(t_1, t_2 - 1).$$

通过求解式 (10) 即可精确重建原始图像 I .

$$I' = \min \|I\|_{TV} \text{ 满足 } \Phi f = y. \quad (10)$$

5 结束语

CS 理论从出现至今短短的数年内已经得到了长足的发展, 新的理论层出不穷; 而 CI 作为 CS 理论

应用于实际的一个典型技术在近年来也得到了极大的发展. 本文作为一篇综述性的文献, 笔者在撰写期间深刻感受到该领域内研究进展之神速, 许多并行的理论难以充分涵盖, 对于无法尽述之处深感遗憾.

CS 是一种利用数学计算来减少前端传感器件, 解放信号获取能力的技术. CI 系统可以显著节省感光器件的数量, 避免了传统成像方式带来的资源浪费. 该技术在降低成像成本、优化成像方式等方面拥有巨大的发展潜力, 在医学成像、空间探测、非可见光成像等领域具有广阔的应用前景. 随着此项技术研究的深入, 人们将对图像及其采集方式之间的深层次的联系形成更加深刻的认识, 相信在不久的将来更加行之有效的图像获取框架将在此理论基础上被建立起来.

参考文献:

- [1] CANDES E J. Compressive sampling [C]//International Congress of Mathematics. Madrid, Spain, 2006, 3: 1433-1452.
- [2] BARANIUK R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [3] CANDES E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [4] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [5] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [6] CANDES E J, TAO T. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [7] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [8] CANDES E J, TAO T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [9] TSAIG Y, DONOHO D. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 549-571.
- [10] CANDES E J, ROMBERG J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2006, 6(2): 227-254.
- [11] CANDES E J, ROMBERG J. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985.
- [12] TAKHAR D, LASKA J N, WAKIN M B, et al. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression[C]//Proceedings of Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging. San Jose, USA, 2006: 606509.
- [13] WAKIN M B, LASKA J N, DUARTE M F, et al. An architecture for compressive imaging[C]//IEEE International Conference on Image Processing. Atlanta, USA, 2006: 1273-1276.
- [14] DUARTE M F, DAVENPORT M A, TAKHAR D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83-91.
- [15] DEVORE R. Nonlinear approximation[J]. Acta Numerica, 1998, 7: 51-150.
- [16] DONOHO D, VETTERLI M, DEVORE R, et al. Data compression and harmonic analysis[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1998, 44(6): 2435-2476.
- [17] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1071-1081.
SHI Guangming, LIU Danhua, GAO Dahua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1071-1081.
- [18] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization[M]. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2004.
- [19] CHEN S, DONOHO D, SAUNDERS M. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61.
- [20] KIROLOS S, LASKA J N, WAKIN M B, et al. Analog-to-information conversion via random demodulation [C]//IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS) on Design, Applications, Integration and Software. Dallas, USA, 2006: 71-74.
- [21] LASKA J N, KIROLOS S, MASSOUD Y, et al. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals[C]//IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS) on Design, Applications, Integration and Software. Dallas, USA, 2006: 119-122.
- [22] LASKA J N, KIROLOS S, DUARTE M F, et al. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation[C]//IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). New Orleans, USA, 2007: 1959-1962.
- [23] MISHALI M, ELDAR Y C. Blind multi-band signal reconstruction: compressed sensing for analog signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(30): 993-1009.
- [24] MISHALI M, ELDAR Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. IEEE Journal of Selected Topics on Signal Processing, 2010, 4(2): 375-391.
- [25] HAUPT J, NOWAK R. Compressive sampling vs. conventional imaging[C]//IEEE International Conference on Im-

- age Processing. Atlanta, USA, 2006: 1269-1272.
- [26] ROMBERG J. Imaging via compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 14-20.
- [27] CHAN W, CHARAN K, TAKHAR D, et al. A single-pixel terahertz imaging system based on compressed sensing [J]. Applied Physics Letters, 2008, 93 (12): 121105.
- [28] HEIDARI A, SAEEDKIA D. A 2D camera design with a single-pixel detector [C]//The 34th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. Busan, ROK, 2009: 1-2.
- [29] GAN L. Block compressed sensing of natural images [C]//Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing. Cardiff, UK, 2007: 403-406.
- [30] GAN L, DO T T, TRAN T D. Fast compressive imaging using scrambled block Hadamard ensemble [C/OL]. [2011-10-15]. http://dsp.rice.edu/sites/dsp.rice.edu/files/cs/scrambled_blk_WHT.pdf.
- [31] MUN S, FOWLER J. Block compressed sensing of images using directional transforms [C]//Proceedings of the International Conference on Image Processing. Cairo, Egypt, 2009: 3021-3024.
- [32] NAGESH P, LI B. Compressive imaging of color images [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2009). Taipei, China, 2009: 1261-1264.
- [33] WAKIN M B, LASKA J N, DUARTE M F, et al. Compressive imaging for video representation and coding [C]//Proceedings of the Picture Coding Symposium (PCS). Beijing, China, 2006: 2046-2051.
- [34] STANKOVIC V, STANKOVIC L, CHENG S. Compressive video sampling [C/OL]. [2011-10-15]. <http://www.eurasip.org/Proceedings/Eusipco/Eusipco2008/papers/1569099804.pdf>.
- [35] SANKARANARAYANAN A C, TURAGA P K, BARANIUK R G, et al. Compressive acquisition of dynamic scenes [C]//Proceedings of the 11th European Conference on Computer Vision. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2010: 129-142.
- [36] CEVHER V, SANKARANARAYANAN A C, DUARTE M F, et al. Compressive sensing for background subtraction [C]//Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision. Marseille, France, 2008: 155-168.
- [37] TAUBMAN D S, MARCELLIN M W. JPEG 2000: image compression fundamentals, standards and practice [M]. Norwell, USA: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [38] PEYRÉ G. Best basis compressed sensing [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 4485: 80-91.
- [39] KREUTZ-DELGADO K, RAO B D. FOCUSS-based dictionary learning algorithms [C]//Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII. San Diego, USA, 2000: 459-473.
- [40] MAIRAL J, SAPIRO G, ELAD M. Multiscale sparse image representation with learned dictionaries [C]//The 14th IEEE International Conference on Image Processing. San Antonio, USA, 2007, 3: 105-108.
- [41] PEYRÉ G. Non-negative sparse modeling of textures [C]//Proceedings of the 1st International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. Ischia, Italy, 2007: 628-639.
- [42] JOST P, VANDERGHEYNST P, LESAGE S, et al. MOTIF: an efficient algorithm for learning translation invariant dictionaries [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Toulouse, France, 2006: 857-860.
- [43] 张春梅,尹忠科,肖明霞. 基于冗余字典的信号超完备表示与稀疏分解 [J]. 科学通报, 2006, 51 (6): 628-633.
- [44] TEMLYAKOV V N. Nonlinear methods of approximation [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2003, 3 (1): 33-107.
- [45] 傅霆. 医学信号与图像的多尺度分析方法研究 [D]. 成都: 电子科技大学, 2003.
- FU Ting. Multi-scale analysis research on biomedical signal and image processing [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2003.
- [46] MALLAT S G, ZHANG Zhifeng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [47] CHEN S, DONOHO D, SAUNDERS M. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61.
- [48] DONOHO D, HUO X. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(7): 2845-2862.
- [49] 刘巍,赵春晖. 基于 2D-DCT 等效矩阵的压缩成像 [J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(7): 1576-1582.
- LIU Wei, ZHAO Chunhui. Compressive imaging using 2D-DCT equivalent matrix [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(7): 1576-1582.
- [50] DONOHO D. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal l_1 -norm solution is also the sparsest solution [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(6): 797-829.
- [51] DONOHO D. For most large underdetermined systems of equations, the minimal l_1 -norm near-solution approximates the sparsest near-solution [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(7): 907-934.
- [52] GILBERT A C, GUHA S, INDYK P, et al. Near-optimal sparse Fourier representations via sampling [C]//Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York, USA: ACM, 2002: 152-161.
- [53] BAJWA W U, HAUPT J D, RAZ G M, et al. Toeplitz-structured compressed sensing matrices [C]//Proceedings of the IEEE Workshop on Statistical Signal Processing. Washington, DC, USA, 2007: 294-298.

- [54] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2010.
LI Xiaobo. The research of measurement matrix based on compressed sensing[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2010.
- [55] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 等. 压缩传感理论与重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142-148.
YANG Hairong, ZHANG Cheng, DING Dawei, et al. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142-148.
- [56] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 301-321.
- [57] KIM S J, KOH K, LUSTIG M, et al. An interior-point method for large-scale l_1 -regularized least-squares problems with applications in signal processing and statistics[J]. Journal of Machine Learning Research, 2007, 7(8): 1519-1555.
- [58] FIGUEIREDO M, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. Journal of Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4): 586-598.
- [59] DAUBECHIES I, DEFRISE M, DEMOL C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Communication on Pure and Applied and Mathematics, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [60] BLUMENSATH T, DAVIES M. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3): 265-274.
- [61] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [62] DONOHO D, TSAIG Y, DRORI I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[EB/OL]. [2011-10-16]. <http://www.cs.tau.ac.il/~idrori/StOMP.pdf>.
- [63] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3): 317-334.
- [64] GILBERT A C, MUTHUKRISHNAN S, STRAUSS M J. Improved time bounds for near-optimal sparse Fourier representation[C]//Proceedings of SPIE: Wavelets XI. San Diego, USA, 2005, 5914: 1-15.
- [65] GILBERT A C, STRAUSS M J, TROPP J A, et al. Algorithmic linear dimension reduction in the l_1 norm for sparse vectors[C/OL]. [2011-10-16]. <http://users.cms.caltech.edu/~jtropp/conf/GSTV06-Algorithmic-Linear-Allerton.pdf>.
- [66] GILBERT A C, STRAUSS M J, TROPP J A, et al. One sketch for all: fast algorithms for compressed sensing[C]//Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York, USA: ACM, 2007, 7: 237-246.
- [67] NEEDLE D. Topics in compressed sensing[D]. Davis, CA, USA: University of California Davis, 2009.
- [68] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.

作者简介:



赵春晖,男,1965年生,教授,博士生导师,全国优秀教师,国家级教学名师。IEEE会员,中国电子学会和中国通信学会高级会员,中国航空学会和中国图象图形学会会员。主要研究方向为智能信息与图像处理、非线性信号处理和通信信号处理。发表学术论文300余篇,被SCI、EI、ISTP检索160余篇,出版著作和教材10部。



刘巍,男,1982年生,博士研究生,主要研究方向为非线性信号与图像处理。