第6卷第2期 智能系统学报 Vol.6 №.2
2011年4月 CAAI Transactions on Intelligent Systems Apr. 2011

doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2011.02.003

概率逻辑系统是与集合代数同态的布尔代数

刘宏岚，郝卫东
（北京科技大学 信息工程学院，北京 100083）

摘　要：联结词的本质是命题的运算，只有对所有命题都适用的真值函数才能用于定义联结词. 概率逻辑中由于命题的内涵相关性，任何[0,1]上的函数都不能完全适用于任意命题的运算，概率逻辑的联结词不能定义成真值函数. 各种算子可以作为一种计算方法使用和研究，但不能代表一个逻辑系统研究系统的性质. 概率逻辑系统是概率空间的逻辑表示，是与概率空间中的事件域（集合代数）同态的布尔代数. 用事件域上的集合函数精确定义各种联结词，与经典二值逻辑相容，与事实相符，能够在经典逻辑框架内实现概率命题演算.

关键词：概率逻辑；集合代数；布尔代数；同态；真值函数
中图分类号：TP181　**文献标识码**：A　**文章编号**：1673-4785(2011)02-0107-07

A probabilistic logic system as a Boolean algebra homomorphic with set algebra

LIU Honglan, HAO Weidong
(School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Connectives are essentially operations on propositions, and only the true value functions applicable to all propositions can be used to define connectives. In probabilistic logic, any function on [0,1] is not completely applicable for the operation on all propositions, and the connectives of probabilistic propositional logic cannot be defined as a true value function because of propositional relativity in connotation. Every operator may be discussed and employed as a method of calculation, but not as a logic system. A probabilistic propositional logic system is the logical description of a probabilistic space, and is a Boolean algebra homomorphic with set algebra that is the event domain in the probabilistic space. All connectives which are compatible with those in classical two-valued logic and which accord with fact can be defined exactly by set functions on event domains. The classical formal system of propositional calculus is completely applicable to probabilistic propositional calculus.

Keywords: probabilistic propositional logic; set algebra; Boolean algebra; homomorphism; truth value function

各种近似推理和模糊推理理论的逻辑基础就是各种概率逻辑和模糊逻辑系统，而逻辑系统的核心是联结词的定义. 各种概率逻辑、模糊逻辑系统对于逻辑联结词定义了大量的算子，尤其是多种蕴涵算子是各种近似推理的依据. 但这些系统都未能从逻辑学上给出定义联结词的合理性和客观依据，存在大量的争论，如不适应经典公理系统，排中律不成立等违背直觉和事实的情况.

1　概率逻辑系统分析

概率逻辑是在经典二值逻辑和概率论的基础上，研究如何用逻辑的语言来进行概率演算. 卡尔纳普(Carnap)概率逻辑和波普尔(Popper)概率逻辑是概率逻辑模型的2个典型代表[1-2]. 令 p、q 表示任意命题，$v(p)$ 表示命题 p 的真值，命题联结词定义为 $v(\neg p)=1-v(p)$，$v(p\vee q)=v(p)+v(q)-v(p\wedge q)$ 等. 卡尔纳普和波普尔概率逻辑都不具备"真值函数性"，即一个公式的真值不能由其子公式的真值完全确定[2-3]，如上述公式 $p\vee q$ 的真值 $v(p\vee q)$ 不是只与 $v(p)$ 和 $v(q)$ 有关，还与 $v(p\wedge q)$ 有关，不能表示成 $v(p\vee q)=f(v(p),v(q))$ 的形式. 真值 v 不是命题的逻辑运算 $\vee$ 到真值的数值计算 f 的同态映射，则不能用[0,1]上的函数 f 表示 $\vee$ 运算，实际应用中不方便计算和推理，不能在经典命题演算形式系统内实现概率（真值）演算.

收稿日期：2010-07-27.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60873002，60573014).
通信作者：刘宏岚. E-mail：honglanliu@ies.ustb.edu.cn.

为了方便计算和推理,学者们一直在寻找函数(算子)来定义联结词,使得运算结果与事实相符并且有一个可靠的逻辑基础. 各种非经典逻辑系统层出不穷,包括 Łukasiewicz 系统、多种模糊逻辑和泛逻辑等都是以[0,1]上的真值函数的形式定义联结词. 典型的如 Łukasiewicz 定义$\neg x = 1 - x$, $x \vee y = \max(x,y)$, $x \wedge y = \min(x,y)$, $x,y \in [0,1]$. 但如 Zadeh 模糊逻辑,虽然在应用上取得成功,理论基础上却并非无懈可击,未能从逻辑学上找到模型存在的合理性和客观依据,所以并没有归入严密的逻辑系统之中[3-4].

数理逻辑中的符号是表义的,命题变量表示命题包括内涵和真值,联结词表示命题的逻辑运算,蕴含、等值等表示命题的语义关系. 人们习惯于通过真值函数研究命题的逻辑运算,这在经典二值逻辑中确实可行. 因为二值逻辑中,复合命题的真值只与成分命题的真值有关,而与成分命题的内涵无关,二值逻辑系统同态于布尔代数$\langle \{0,1\}, \neg, \vee, \wedge \rangle$,所以联结词可定义成集合$\{0,1\}$上的真值函数,通过真值函数研究命题演算.

但概率逻辑中,命题的逻辑运算由命题内涵的关系决定. 注意到命题相关性,各种模糊系统定义了多种算子如 Zadeh 算子、概率算子、有界算子等. 泛逻辑甚至引入[0,1]上的相关系数来刻画命题的关系,将相关系数作为参数定义联结词. 如用函数$N(x,k)$、$T(x,y,h)$和$S(x,y,h)$定义$\neg x$、$x \wedge y$和$x \vee y$, $x,y,k,h \in [0,1]$, k、h为相关系数. 文中3.3将给出明确分析,Zadeh 算子、概率算子等只是对某些特殊关系的命题成立,[0,1]上的任何函数都不能完全适用于任意命题的运算,只有对所有命题都适用的真值函数才能用于定义联结词. 概率逻辑中,"寻找[0,1]上的真值函数定义联结词"这一出发点本身就是不合理的[9]. 概率逻辑不能再通过真值函数研究命题演算,主观使用任何一种算子去讨论逻辑运算性质,势必是盲人摸象,会出现如排中律不成立等与事实不符的现象,这些都是命题关系判断错误,算子使用不当的结果.

本文既不是同经典逻辑的语构理论、脱离符号的含义、直接抽象地研究符号的演算;也不是如某些多值逻辑、模糊逻辑等脱离命题内涵直接定义[0,1]上的算子;而是从数理逻辑研究的基本对象——命题入手,明确了概率逻辑中的命题、真值与概率空间中的事件、概率的关系,并且与概率空间的事件域相对,定义了命题域即命题的集合. 逻辑学中的命题是有惟一确定真值的陈述句. 概率逻辑中的命题表示惟一的随机事件. 这种惟一性是一种从命题域到事件域的函数关系,定义为取义函数φ, $\varphi(p)$表示命题p所表示的事件. 通过命题表示的事件就可以精确地定义命题地关系和命题联结词,研究逻辑运算性质.

2 概率命题逻辑系统是概率空间的逻辑表示

2.1 命题是随机事件的语言表示

概率论中的随机事件有3种表示法[5]. 如掷一颗骰子,样本空间$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,以下3种方法表示同一个事件. 1)语言表示:"出现的点数不小于3";2)集合表示:$\{3,4,5,6\}$;3)随机变量表示:若令随机变量x表示出现的点数,则上述事件表示为"$x \geqslant 3$". 概率论主要研究事件的集合表示和随机变量表示. 概率逻辑主要研究事件的语言表示和集合表示.

随机事件的语言表示本质上正是无二义性的命题. 如著名的 Łukasiewicz 命题"明年12月21日中午,我将在华沙[4]"表示一个随机事件. 概率逻辑中的命题表示随机事件,命题是对事件的发生作出判断,命题的真值就是事件发生的可能性大小,即事件的概率,它满足概率的所有性质. 本文用小写字母p、q、r等表示命题,$v(p)$表示命题p的真值,用大写字母A、B、C等表示事件或集合,为了与命题符号和谓词符号区分开,用$\Pr(A)$表示事件A的概率. 若命题p表示的事件为A,则有$v(p) = \Pr(A)$.

例1(原子命题表示随机事件):设谓词$P(x)$表示"张三明年12月21日中午将在中国的x地区",客体变量x取值为沈阳、辽宁、河北或中国等. 令$\Omega_1 = \{$中国所有的城市$\}$, $X = 2^{\Omega_1} = \{\varnothing, \{$北京$\}, \{$石家庄$\}, \cdots, \{$台北$\}$,河北$= \{$河北省城市$\}, \cdots$,海南$= \{$海南省城市$\}$,东北$= \{$东北地区城市$\}, \cdots$,沿海$= \{$沿海城市$\}, \cdots$,中国$= \{$中国的城市$\}\}$,其中$2^{\Omega_1}$是$\Omega_1$的幂集, X是客体变量x的取值范围即客体域,也是概率空间(Ω_1, X, Pr)的事件域.

令A表示沈阳($= \{$沈阳市$\}$),B表示辽宁($= \{$辽宁省城市$\}$),命题$P(B)$:"张三明年12月21日中午将在(辽宁)"表示概率空间(Ω_1, X, Pr)中的随机事件B,命题的真值等于事件B的概率. 若张三等概率地出现在各个城市,则有真值$v(P(B)) = Pr(B) = |B|/|\Omega_1|$,其中$|B|$表示集合$B$中元素的个数.

定义 1(关系命题集合)　称定义在一维概率空间(Ω,X,Pr)上的原子命题的集合$P(X)=\{P(x)\mid x\in X\}$为关系命题集合,其中$P(x)$为谓词,X为客体域或事件域,若Ω为有穷集,则$X=2^{\Omega}$. 同一关系命题集合中的命题具有相同的谓词. 关系命题集合$P(X)$是概率空间(Ω,X,Pr)的逻辑表示.

例 2(复合命题表示随机事件)　在例 1 中,关系命题集合$P(X)=\{P(x)\mid x\in X\}$是概率空间(Ω_1,X,Pr)的逻辑表示. 令谓词$Q(y)$表示“明天的离散数学课将被安排在y时间上”,样本空间$\Omega_2=\{1,2,3,4\}$,集合元素表示第几节课. 客体域为$Y=2^{\Omega_2}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$,上午$=\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}$,下午$=\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\Omega_2=\{1,2,3,4\}\}$. 则关系命题集合$Q(Y)=\{Q(y)\mid y\in Y\}$是概率空间$(\Omega_2,Y,Pr)$的逻辑表示.

令$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, C表示第 1 节课($=\{1\}$), D表示上午($=\{1,2\}$),复合命题$p=P(B)\wedge Q(D)$:“张三明年 12 月 21 日中午将在(辽宁) 且明天的离散数学课将被安排在(上午)上”表示二维概率空间$(\Omega,2^{\Omega},Pr)$中的随机事件$B\times D$, 令命题$q=P(A)\wedge Q(D)$, $r=P(B)\wedge Q(C)$, $s=P(A)\wedge Q(C)$, $t=P(B)\vee Q(D)$, 它们都表示该概率空间中的事件,其中:

p表示事件$B\times D=\{$(沈阳,1), (沈阳,2), (大连,1), (大连,2), $\cdots\}$, $|B\times D|=|B|\times|D|$;

q表示事件$A\times D=\{$(沈阳,1), (沈阳,2)$\}$;

r表示事件$B\times C=\{$(沈阳,1), (大连,1), $\cdots\}$;

s表示事件$A\times C=\{$(沈阳,1)$\}$;

$\neg s$表示事件$\Omega_1\times\Omega_2-A\times C$;

$P(A)$表示事件$A\times\Omega_2$, $|A\times\Omega_2|=|\Omega_2|=4$;

t表示事件$B\times\Omega_2\cup\Omega_1\times D$.

定义 2(命题域)　设关系命题集合$P_1(X_1)$, $P_2(X_2),\cdots,P_n(X_n)$分别表示一维概率空间(Ω_1,X_1,Pr), (Ω_2,X_2,Pr), $\cdots$, (Ω_n,X_n,Pr), 令$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n$, 命题域$S$是$n$维概率空间$(\Omega,X,Pr)$的逻辑表示,是命题的集合,定义如下:

1) $P_1(X_1),P_2(X_2),\cdots,P_n(X_n)\subseteq S$, 即原子命题属于命题域;

2) 若命题$p\in S$, 则$\neg p\in S$;

3) 若命题$p,q\in S$, 则$p\vee q,p\wedge q,p\to q\in S$;

4) 可数个命题$p_1,p_2,\cdots\in S$, 经过可数次的$\neg$、$\vee$、$\wedge$等复合运算后形成的复合命题$f(p_1,p_2,\cdots)\in S$.

即命题域对命题的逻辑运算是封闭的. 命题域S是事件域X的逻辑表示. 算上命题的真值和逻辑运算,也可说命题域S是概率空间(Ω,X,Pr)的逻辑表示. 若$\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$都是有穷集,则$X_i=2^{\Omega_i}(i=1,2,\cdots,n)$,且$X=2^{\Omega}$. 命题域$S$中的所有命题都表示$(\Omega,X,Pr)$中的事件. 关系命题集合是一种特殊的命题域.

一个命题表示一个惟一的事件, 这种惟一性是一种函数关系、所以可定义如下函数.

定义 3(取义函数)　设命题域S是概率空间(Ω,X,Pr)的逻辑表示,

$\varphi:S\to X,\forall q\in S,\varphi(q)=$命题$q$表示的事件.

则有$v(q)=Pr(\varphi(q))$, 命题q的真值等于q所表示的事件的概率. 称函数$\varphi:S\to X$为命题的取义函数.

如在例 1 中,$\varphi(P(A))=A,v(P(A))=Pr(A)$, 在例 2 中,$\varphi(p)=B\times D$, $\varphi(\neg s)=\Omega_1\times\Omega_2-A\times C$, $\varphi(t)=B\times\Omega_2\cup\Omega_1\times D$.

$\forall p\in S$, 若$\varphi(p)=\varnothing$, 则有$v(p)=Pr(\varphi(p))=Pr(\varnothing)=0$, 称$p$为假命题, 记做$F$. 假命题表示不可能事件. $\forall p\in S$, 若$\varphi(p)=\Omega$, $v(p)=Pr(\varphi(p))=Pr(\Omega)=1$, 称$p$为真命题, 记做$T$. 真命题表示必然事件.

2.2　命题间的关系是命题所表示的事件间的关系

命题间的关系同事件间的关系相对,有蕴含、等义、不相容(交)等关系.

定义 4 (命题的关系)　设命题域S表示概率空间(Ω,X,Pr), $\forall p,q\in S$, p、q所表示的事件$\varphi(p),\varphi(q)\in X$, p、q之间的关系定义为:

1) p蕴含q, 记作$p\subseteq q$, 当且仅当$\varphi(p)\subseteq\varphi(q)$.

2) p与q等义, 记作$p\equiv q$, 当且仅当$\varphi(p)=\varphi(q)$, 即两命题等义当且仅当两命题所表示的事件相等. 命题等义则真值(概率)相等,反过来不一定成立.

3) p与q不相容(交)当且仅当$\varphi(p)\cap\varphi(q)=\varnothing$.

命题间的关系就是命题所表示的事件间的关系. 如例 1 中,命题$P(A)$蕴涵$P(B)$ $(A\subseteq B)$, 所以当$P(A)$为真时, $P(B)$一定为真. 例 2 中,由于$A\subseteq B,C\subseteq D$, 有$A\times C\subseteq B\times C\subseteq B\times D,A\times C\subseteq A\times D\subseteq B\times D,B\times D\subseteq B\times\Omega_2\cup\Omega_1\times D$;所以命题$s$蕴涵$p$、$q$、$r$、$t$;命题$q$、$r$蕴涵$p$; p蕴涵t.

2.3　命题的逻辑运算是事件运算的逻辑表示

命题的逻辑运算是命题所表示事件的集合运算的逻辑表示.

定义 5(命题的逻辑运算)　设命题域S表示概

率空间(Ω,X,Pr)，$\forall p,q\in S$，p、q之间的逻辑运算定义如下：

1)合取：$\varphi(p\wedge q)=\varphi(p)\cap\varphi(q)$，$v(p\wedge q)=Pr(\varphi(p\wedge q))=Pr(\varphi(p)\cap\varphi(q))$，即合取命题表示的事件是命题表示的事件的交.

2)析取：$\varphi(p\vee q)=\varphi(p)\cup\varphi(q)$，$v(p\vee q)=Pr(\varphi(p\vee q))=Pr(\varphi(p)\cup\varphi(q))$.

3)取反：$\varphi(\neg p)=\sim\varphi(p)$，$v(\neg p)=Pr(\varphi(\neg p))=Pr(\sim\varphi(p))=1-Pr(\varphi(p))=1-v(p)$，即互为否定的命题表示的事件互为对立(互为补集).

4)蕴涵：$\varphi(p\to q)=\sim\varphi(p)\cup\varphi(q)=\varphi(\neg p\vee q)$，$v(p\to q)=Pr(\sim\varphi(p)\cup\varphi(q))$，由定义4的2)得$p\to q\equiv\neg p\vee q$.

如例2中的命题，$\varphi(q\wedge r)=\varphi(q)\cap\varphi(r)=A\times D\cap B\times C=A\times C=\varphi(s)$，有$q\wedge r\equiv s$，$v(q\wedge r)=Pr(A\times D\cap B\times C)=v(s)$.

例3 设命题域S表示概率空间(Ω,X,Pr)，$\forall p,q\in S$，当p蕴含q即$\varphi(p)\subseteq\varphi(q)$时，

$\varphi(p\wedge q)=\varphi(p)\cap(q)=\varphi(p)$，由定义4中2)有$p\wedge q\equiv p$；

$\varphi(p\vee q)=\varphi(p)\cup(q)=\varphi(q)$，即$p\vee q\equiv q$；

$v(p\to q)=Pr(\varphi(p\to q))=Pr(\sim\varphi(p)\cup\varphi(q))=Pr(\Omega)=1$，即当蕴涵联结词"$\to$"的前件成立时，后件也成立，$v(p\to q)=1$，与经典二值逻辑相容.

即当$p\subseteq q$时，$p\wedge q\equiv p$，$p\vee q\equiv q$，$p\to q\equiv T$.

根据概率的单调性，$\forall A,B\in X$，若$A\subseteq B$，则$Pr(A)\leqslant Pr(B)$. 所以若$p\subseteq q$，$v(p)=Pr(\varphi(p))\leqslant Pr(\varphi(q))=v(q)$，即$v(p)\leqslant v(q)$. 这时有，

$$v(p\wedge q)=Pr(\varphi(p)\cap\varphi(q))=Pr(\varphi(p))=v(p)=\min(v(p),v(q)),$$
$$v(p\vee q)=Pr(\varphi(p)\cup\varphi(q))=Pr(\varphi(q))=v(q)=\max(v(p),v(q)).$$

说明 逻辑运算与事实相符，与二值逻辑相容.

如例1中，令$p_1=P(A)$，$p_2=P(B)$，由于$A\subseteq B$，即p_1蕴含p_2，有$v(p_1\wedge p_2)=\min(v(p_1),v(p_2))=v(p_1)$，$v(p_1\to p_2)=Pr(\sim\varphi(p_1)\cup\varphi(p_2))=Pr(\Omega)=1$，如果命题$P$(沈阳)为真，则$P$(辽宁)为真，与事实相符. 令$E$=黑龙江={黑龙江省城市}，$p_3=P(E)$，由于$B\cap E=\varnothing$，即$p_2$与$p_3$不相容，$v(p_2\wedge p_3)=0\neq\min(v(p_2),v(p_3))$，与事实相符，张三不可能同时出现在辽宁和黑龙江2个地区，p_2与p_3不可能同时为真.

特别当p为假命题，即$\varphi(p)=\varnothing$，$v(p)=0$，$\forall q\in S$，$\varphi(p\to q)=\sim\varphi(p)\cup\varphi(q)=\Omega$，$v(p\to q)=Pr(\Omega)=1$，即$p\to q\equiv T$. 经典逻辑中"善意的推定"，当前件$p$为假时，后件的真值无论是多少，$p\to q\equiv T$，与经典二值逻辑相容.

2.4 概率逻辑系统是与事件域同态的布尔代数

设命题域S表示概率空间(Ω,X,Pr). 事件域X对集合运算封闭[5]，集合代数$\langle X,\cup,\cap,\sim,\varnothing,\Omega\rangle$是布尔代数，同时满足结合律、分配律、摩根律、排中律等. 由定义2，命题域S对逻辑运算封闭，构成了代数系统$\langle S,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$. 定义5说明，取义函数$\varphi:S\to X$是概率逻辑系统$\langle S,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$到集合代数$\langle X,\cup,\cap,\sim,\varnothing,\Omega\rangle$的同态映射，即$\forall p,q\in S$，$\varphi(\neg p)=\sim\varphi(p)$，$\varphi(p\wedge q)=\varphi(p)\cap\varphi(q)$，$\varphi(p\vee q)=\varphi(p)\cup\varphi(q)$，且$\varphi(F)=\varnothing$，$\varphi(T)=\Omega$.

定理1(命题逻辑运算性质) 概率逻辑系统$\langle S,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$是布尔代数，逻辑运算满足所有的命题定律、结合律、分配律、吸收律、摩根律、排中律等.

证明 设命题域S表示概率空间(Ω,X,Pr). 命题的取义函数$\varphi:S\to X$是概率逻辑系统$\langle S,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$到布尔代数$<X,\cup,\cap,\sim,\varnothing,\Omega>$的同态映射. $\forall p,q,r\in S$，有：

1) 分配律：由定义5且集合代数满足分配律有，$\varphi(p\wedge(q\vee r))=\varphi(p)\cap\varphi(q\vee r)=\varphi(p)\cap(\varphi(q)\cup\varphi(r))=(\varphi(p)\cap\varphi(q))\cup(\varphi(p)\cap\varphi(r))=\varphi((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$，由命题等义的定义有$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$. 同理可证$\vee$对$\wedge$可分配.

2) 摩根律：由定义5且集合代数满足摩根律有，$\varphi(\neg(p\wedge q))=\sim\varphi(p\wedge q)=\sim(\varphi(p)\cap\varphi(q))=\sim\varphi(p)\cup\sim\varphi(q)=\varphi(\neg p)\cup\varphi(\neg q)=\varphi(\neg p\vee\neg q)$，所以$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$. 同理可证$\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$成立.

3) 矛盾律，$\neg p\vee p\equiv F$，排中律：$\neg p\vee p\equiv T$.

$\varphi(\neg p\wedge p)=\sim\varphi(p)\cap\varphi(p)=\varnothing$，$v(\neg p\wedge p)=Pr(\varphi(\neg p\wedge p))=Pr(\varnothing)=0$，由定义3，$\neg p\wedge p\equiv F$.

$\varphi(\neg p\vee p)=\sim\varphi(p)\cup\varphi(p)=\Omega$，$v(\neg p\vee p)=Pr(\varphi(\neg p\vee p))=Pr(\Omega)=1$，由定义3，$\neg p\vee p\equiv T$.

幂等律、结合律、交换律等证明略，所以概率逻

辑系统 $\langle S,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$ 是布尔代数.

说明　依据这些常用的命题定律和置换规则，概率逻辑同样能在经典逻辑框架内实现命题的等义演算，如 $(p\wedge q)\to r\equiv\neg(p\wedge q)\vee r\equiv\neg p\vee\neg q\vee r\equiv\neg p\vee(\neg q\vee r)\equiv p\to(q\to r)$.

3　概率逻辑的联结词不能定义成[0，1]上的真值函数

为了便于讨论问题，首先明确以下一些概念.

3.1　命题公式与真值函数

命题公式是由命题变量、常量、联结词、括号等以规定的格式联结起来的符号串，递归定义见文献[6,8]. 设以下定义中命题域 S 表示概率空间 (Ω,X,Pr).

1) 命题公式(合式公式).

命题公式本质上是关于命题的函数，其形式化描述为 $f:S^n\to S$，$\forall p_1,p_2,\cdots,p_n\in S$，$f(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in S$. 如公式 $f(p_1,p_2,p_3)=p_1\wedge p_2\to p_3$.

2) 真值函数. 形式化描述为 $g:[0,1]^m\to[0,1]$，$\forall x_1,x_2,\cdots,x_m\in[0,1]$，$g(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in[0,1]$. Łukasiewicz 多值系统和多种模糊系统都是以真值函数的形式定义联结词，如 $\neg x=1-x$，$x\vee y=\max(x,y)$，$x,y\in[0,1]$. 在模糊系统中，真值函数也称作算子.

3) 集合函数 $h:X^k\to X$，$\forall A_1,A_2,\cdots,A_k\in X$，$h(A_1,A_2,\cdots,A_k)\in X$，$X$ 为事件域. 如集合函数 $\sim(A\cap B)\cup C$. 定义 5 即是用事件域 X 上的集合函数定义命题的逻辑运算.

4) 命题的真值 $v:S\to[0,1]$，$\forall p\in S$，$v(p)\in[0,1]$.

5) 取义函数 $\varphi:S\to X$ 与真值 v 相对. 集合函数与真值函数相对，都是用来研究命题演算的工具.

3.2　二值逻辑中的命题公式与真值函数

在经典二值逻辑中，命题逻辑运算结果(仍然是命题)的真值只与参与运算的命题的真值有关，而与这些命题的内涵无关. 设 S_t 为二值逻辑中所有命题的集合，若在 $\{0,1\}$ 上定义以下真值函数：$\neg x=1-x$，$x\vee y=\max(x,y)$，$x\wedge y=\min(x,y)$，$x,y\in\{0,1\}$，则命题的真值 $v:S_t\to\{0,1\}$ 是二值逻辑系统 $\langle S_t,\neg,\vee,\wedge\rangle$ 到布尔代数 $\langle\{0,1\},\neg,\vee,\wedge\rangle$ 的同态，即 $\forall p,q\in S_t$，$v(\neg p)=\neg v(p)$，$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q)$，$v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q)$ 等[4]. 同态象 $\langle\{0,1\},\neg,\vee,\wedge\rangle$ 就是抽去二值逻辑系统 $\langle S_t,\neg,\vee,\wedge\rangle$ 中命题的内涵，只讨论真值，是对二值逻辑系统的一种抽象描述，反映了命题逻辑运算的真值运算特征.

所以经典二值逻辑可不考虑命题的内涵，直接将联结词定义成 $\{0,1\}$ 上的真值函数，将命题公式看作真值函数，对公式中的命题变量指定真值，如文献[6]中对公式 $p_1\wedge p_2\to p_3$ 的赋值，就是给命题变量 p_1、p_2、p_3 指定一组真值，如 001、100 等. 二值逻辑直接通过真值函数研究命题演算，如果没有上述同态关系，这些做法不再适用.

3.3　概率逻辑中的命题公式与真值函数

在人工智能和机器翻译等实际应用中，参与推理和运算的命题内涵(语义)上都是有相互关系的，概率命题的逻辑运算必须考虑命题的语义关系. 设以下讨论中命题域 S 表示概率空间 (Ω,X,Pr).

例 4　$\forall p,q\in S$，设 $v(p)=0.3$，$v(q)=0.5$，求 $v(p\wedge q)$.

由定义 5，$v(p\wedge q)=Pr(\varphi(p\wedge q))=Pr(\varphi(p)\cap\varphi(q))$.

1) 当两命题不相容时 $(\varphi(p)\cap\varphi(q)=\varnothing)$：$v(p\wedge q)=Pr(\varnothing)=0$.

2) 当 p 蕴含 q 时 $(\varphi(p)\subseteq\varphi(q))$：$v(p\wedge q)=v(p)=0.3$.

3) 当两命题表示的事件彼此独立(这时称当两命题独立)时：

$$v(p\wedge q)=Pr(\varphi(p)\cap\varphi(q))=Pr(\varphi(p))\times Pr(\varphi(q))=v(p)\times v(q)=0.5\times0.3=0.15.$$

真值相同的不同命题，逻辑运算结果不同. 复合命题的真值与成分命题的内涵有关，并不是只与成分命题的真值有关.

1) Łukasiewicz 定义的 $\wedge$、$\vee$ 算子只对具有蕴含关系的命题成立.

在例 3 中讨论过，当 $p\subseteq q$ 或 $q\subseteq p$ 时：$v(p\wedge q)=\min(v(p),v(q))$，$v(p\vee q)=\max(v(p),v(q))$. 这时，集合 S 上的命题的逻辑运算 $\vee$(析取)，$\wedge$(合取)通过真值 $v:S\to[0,1]$ 映射到 $[0,1]$ 上的 Łukasiewicz 算子 $x\vee y=\max(x,y)$，$x\wedge y=\min(x,y)$，$x,y\in[0,1]$，即当 p 与 q 是蕴含关系时，有 $v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q)$，$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q)$. 其他情况下，该式不再成立. 错误的使用就会导致所谓的“排中律不成立”等现象：如当 $p\neq T,F$ 时，由于 p 与 $\neg p$ 不具备蕴含关系(集合 $\varphi(p)$ 与 $\sim\varphi(p)$

互补,不具备包含关系),由定理1,$v(p\vee\neg p)=1$;而不是$v(p\vee\neg p)=\max(v(p),v(\neg p))\neq 1$,排中律不成立.

2)概率算子只对具有独立关系的命题成立.

当命题p、q相互独立时,由定义5易得,$v(p\wedge q)=v(p)\times v(q)$和$v(p\vee q)=v(p)+v(q)-v(p)\times v(q)$. 这时,集合$S$上的命题的逻辑运算∨、∧通过映射$v:S\to[0,1]$映射到$[0,1]$上的概率算子$x\oplus y=x+y-x\times y$, $x\otimes y=x\times y$, $x,y\in[0,1]$,即当p与q相互独立时,有$v(p\wedge q)=v(p)\otimes v(q)$, $v(p\vee q)=v(p)\oplus v(q)$. 其他情况下,该式不再成立. 错误地使用,就会出现"幂等律不成立"等现象:如$\forall p\in S$,因为$p\subseteq p$,所以$v(p\vee p)=v(p)$;而不是$v(p\vee p)=v(p)\oplus v(p)\neq v(p)$,幂等律不成立.

3)对于具有相交而非蕴含关系的命题,概率逻辑中的联结词无法定义成真值函数的形式.

如对于$v(p\wedge q)=Pr(\varphi(p)\cap\varphi(q))$,当$\varphi(p)\cap\varphi(q)\neq\varnothing$且$\varphi(p)\cap\varphi(q)\neq\varphi(p)$且$\varphi(p)\cap\varphi(q)\neq\varphi(q)$时,$p\wedge q$的真值由集合运算$\varphi(p)\cap\varphi(q)$决定,无法表示成函数$v(p\wedge q)=f(v(p),v(q))$的形式,这时映射$v:S\to[0,1]$不能把联结词∧映射到$[0,1]$上的任何函数,即$[0,1]$上的任何函数都不能准确定义联结词.

真值不能体现命题的内涵,仅通过真值更无法判断命题的关系、选择算子. 在命题的多项式演算中,只有处处适用的真值函数才能用于定义命题联结词,并研究命题的逻辑运算与推理. 概率逻辑中不存在$[0,1]$上的真值函数使∧、∨等满足如下性质:对所有的$p,q\in S$,满足1)$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q)$;2)$v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q)$,而无论$p$、$q$是什么关系. 即概率逻辑中的真值$v:S\to[0,1]$不再是同态映射. 同态是2个代数系统包括集合$S$和集合$[0,1]$、命题运算和真值运算之间的映射关系,必须得对集合当中所有的元素都满足1)、2)才叫同态,部分元素和元素间的某些映射关系如概率算子等不是同态.

只有2个系统真正的同态,如二值命题系统$\langle S_t,\neg,\vee,\wedge\rangle$与布尔代数$\langle\{0,1\},\neg,\vee、\wedge\rangle$同态,才能通过研究后者的运算性质来抽象地研究前者的性质. 很多定义算子的模糊逻辑如Zadeh系统是基于一个未经证明的基本假设;即$v:S\to[0,1]$是同态映射,认为$[0,1]$上应当有与S中的∨、∧等相对应的真值运算. 任意命题公式如$f(p_1,p_2,p_3)=p_1\wedge p_2\to p_3,p_1,p_2,p_3\in S$,应当有与之相对应的真值函数,如$\bar{f}(p_1,p_2,p_3)=p_1\wedge p_2\to p_3,p_1,p_2,p_3\in[0,1]$. 然后再研究$[0,1]$上这些假设存在的运算和函数的性质,认为这些性质就是多值命题的逻辑运算性质. 而事实是,真值v不是同态,真值运算的性质并不代表逻辑运算的性质,所以才会出现不适应经典公理系统、排中律不成立等问题.

概率逻辑系统$\langle S,\vee,\wedge,\neg\rangle$与布尔代数$\langle X,\cup,\cap,\sim\rangle$同态,后者的运算性质和关系抽象地反映了前者的运算性质和关系,可通过事件域X上的集合函数定义各种逻辑联结词,因此实现在逻辑框架内的命题演算.

4 结束语

本文明确了概率逻辑系统与概率空间的关系,明确了概率命题运算、集合(事件)运算和真值运算间的关系. 其中,命题运算与集合运算之间有同态关系,后者是前者的抽象描述,可以通过集合的关系和运算抽象地研究命题的关系和运算. 但概率命题运算与真值运算之间没有同态关系,那些假设二者间存在同态,而主观地用$[0,1]$上的真值运算定义命题运算的做法是不对的,所谓的"不适应经典公理系统、排中律不成立"等问题,只是命题关系判断错误、算子使用不当的结果.

概率逻辑中,$[0,1]$上的任何函数都不能准确定义命题联结词,因为多种算子和模糊推理等方法适用于某些特殊情况,所以可以在某些应用领域如自动控制作为计算模型使用,但算子的性质决不代表整个逻辑系统的性质. 概率逻辑系统$\langle S,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$与布尔代数$\langle X,\cup,\cap,\sim,\varnothing,\Omega\rangle$同态,经典命题演算的形式系统完全适用于概率命题演算.

参考文献:

[1]王万森,何华灿. 基于泛逻辑学的逻辑关系柔性化研究[J]. 软件学报, 2005, 16(5): 754.

WANG Wansen, HE Huacan. Research on flexibility of logic relation based on universal logics[J]. Journal of Software, 2005, 16(5): 754.

[2]杨炳儒. 知识工程与知识发现[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2000: 76.

[3]GABBAY D M, GUENTHNER F. Handbook of philosophical logic[M]. 2nd ed. London: Kluwer Academic publishers, 2001: 53.

[4]王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 7.

[5]茆诗松,程依明,濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 4.

[6]屈婉玲, 耿素云, 张立昂. 离散数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 3.

[7]刘宏岚, 高庆狮, 杨炳儒. 概率逻辑中的命题相关性与逻辑运算[J]. 北京科技大学学报, 2008, 30(9): 1079.
LIU Honglan, GAO Qingshi, YANG Bingru. Proposition relativity and logic calculation in probabilistic logic [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2008, 30(9): 1079.

[8]杜国平. 经典逻辑与非经典逻辑基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 9.

[9]刘宏岚, 高庆狮, 杨炳儒. 概率命题逻辑中命题相等关系的两个层面与命题演算[J]. 哲学研究, 2009, 10: 113.
LIU Honglan, GAO Qingshi, YANG Bingru. The two layers of propositional equivalence and the propositional calculus in probabilistic propositional logic [J]. Philosophical Researches, 2009, 10: 113.

[10]GAO Qingshi, GAO Xiaoyu, HU Yue. A new fuzzy set theory satisfying all classical set formulas [J]. Journal of Computer Science and Technology: English Edition, 2009, 24(4): 798.

作者简介:

刘宏岚,1973 生,女,博士,主要研究方向为自然语言理解、机器翻译、模糊集合理论的研究与应用、离散数学等. 发表学术论文多篇.

郝卫东,1970 生,男,博士,主要研究方向为计算机网络、模糊集合理论的研究与应用. 发表学术论文多篇.

2011 年全国软件与应用学术会议
National Software Application Conference 2011

中国计算机学会主办,软件工程专委、系统软件专委和吉林大学承办的"2011 年全国软件与应用学术会议 NASAC2011",将于 2011 年 10 月 28 日 ~ 30 日在长春举行. 大会将设置特邀报告、论文大会报告、专题 workshop、张贴论文、软件系统原型和产品展示等多种学术交流形式,会议还将与《软件学报》和《计算机学报》合作组织专题特约报告,为与会代表提供丰富的交流平台. 会议将出版论文集,并拟将评选出的优秀论文推荐到《电子学报》等杂志.

一、征文范围(但不限于下列内容)

1. 需求工程; 2. 构件技术与软件复用; 3. 面向对象与软件 Agent; 4. 软件体系结构与设计模式; 5. 软件开发方法及自动化; 6. 软件过程管理与改进; 7. 软件质量、测试与验证; 8. 软件再工程; 9. 软件工具与环境; 10. 软件理论与形式化方法; 11. 操作系统; 12. 软件中间件与应用集成; 13. 分布式系统及应用; 14. 软件语言与编译; 15. 软件标准与规范; 16. 软件技术教育; 17. 计算机应用软件.

二、论文要求

1. 论文必须未在杂志和会议上发表和录用过.
2. 论文篇幅限定 8 页(A4 纸)内.
3. 会议只接受电子文档 PDF 格式提交论文. 论文格式的详细要求请参照软件学报投稿文章格式.
4. 投稿方式采用在线投稿:http://www.easychair.org/conferences/? conf = nasac2011

三、重要日期

论文征稿截止日期:2011 年 7 月 5 日
论文录用通知日期:2011 年 8 月 15 日

四、联系方式

联系人:王剑飚,鲍锋
吉林大学计算机科学与技术学院(130012)
联系电话: 0431 - 85166269, 0431 - 85159420
NASAC 2011 会议网址:http://csw.jlu.edu.cn/NASAC2011