

求解旅行商问题的近似多项式算法

高尚, 房靖

(江苏科技大学 计算机科学与工程学院, 江苏 镇江 212003)

摘要:旅行商问题是一个典型的组合优化问题,易于描述却难于求解.对于大规模 TSP 问题,目前仍未有非常有效的方法.针对弹性网络算法在求解旅行商问题中时间性能方面的不足,提出了一种快速的求解算法.在弹性网络算法基础上,提出了求解旅行商问题的扩张方法和收缩方法,它们时间复杂性低于 $O(N^3)$,经过比较扩张方法的效果比较理想.在扩张方法的基础上,提出随机扩张方法和完全扩张方法,完全扩张方法的时间复杂性低于 $O(N^4)$,仍然是一个多项式算法.实例表明,完全扩张方法是一个快速且有效的算法.

关键词:扩张方法;收缩方法;旅行商问题

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-4785(2010)04-0342-05

A polynomial approximation algorithm for the traveling salesman problem

GAO Shang, FANG Jing

(School of Computer and Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)

Abstract: The Traveling Salesman Problem (TSP) is a typical combinational optimization problem which is easy to describe and hard to solve. For large-scale TSP problems, an effective solution has yet to be found. To improve the time performance of the elastic net method in solving large scale TSPs, faster algorithms were investigated. Use of the elastic net method, the expansion method and the shrink method were proposed. The time complexities of these algorithms were less than $O(N^3)$. After comparison and analysis it was clear that the results of the expansion method were comparatively ideal. Based on analysis of the expansion method, a stochastic expansion method and a complete expansion method were developed. The time complexity of the complete expansion method was less than $O(N^4)$, and it was still a polynomial algorithm. Practical examples showed that the complete expansion method is fast and efficient.

Keywords: expansion method; shrink method; traveling salesman problem

旅行商问题(traveling salesman problem)可以描述为有一个推销员从某城市出发走遍所有的城市,且每个城市只能走一次,最后返回原处,如何选择路线使所走路程最短. TSP 问题是一个 NP 完全问题,对于一个 N 个城市的 TSP 问题,可能的路径数是一个组合数 $(N-1)!/2$,随着城市数目 N 的增大,问题的规模呈指数式增大.目前求解 TSP 问题的主要方法有模拟退火算法^[1,4]、遗传算法^[1,5,6]、启发式搜索法、Hopfield 神经网络算法^[7]、蚁群算法^[8,9]等.本文在弹性网络算法的基础上提出 2 种简单的近似

多项式方法.

1 扩张方法

1987 年, R. Durbin 和 D. Willshaw 提出了一种被称为弹性网络的新模型^[10-11]来求解 TSP 问题.这一模型考虑的是欧氏空间中的 TSP 问题,它把一条 TSP 可行路径看作是从一条由 M 个节点构成的闭合路径到 TSP 城市的映射.这条闭合路径被称为“弹性带”(elastic band),一般来说取 $M = 2.5N$.当对于每一个城市都有一个节点与它重合时,“弹性带”的总长度就是 TSP 路径总长度的一个近似.弹性网络算法的思想就是不断调整这些节点的位置,使得“弹性带”在覆盖所有城市的同时,总的长度尽可能小.弹性网络算法通过 2 种作用力来控制弹性

收稿日期:2009-07-13.

基金项目:浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题(A0704);江苏省高校自然科学基金基础研究课题(08KJB520003).

通信作者:高尚. E-mail: gao_shang@hotmail.com.

带上节点的移动,第1种力是来自城市的吸引力,使得节点朝城市位置靠近;第2种力是来自“弹性带”上邻近节点的张力,使得节点朝相邻节点的位置运动.第1种力的目的是使“弹性带”能覆盖所有城市,而第2种力的作用是使“弹性带”的长度保持最短.正是在这2种力的作用下,弹性带上的各点不断地移动.当网络最终达到稳定时,弹性带上的 M 个点中至少有 N 个点非常接近城市所在位置,并使所有城市形成一闭合回路,从而得到一有效路径,即得到TSP问题的一个近似最优解.

扩张方法继承了弹性网络的思想,首先从最短2个城市出发,将其与离2个城市最近的1个城市连成一个三角形,想象这个环是一个正在逐渐被吹大气球,由于气球的弹力,则气球先遇到离这个气球上所有城市较近的城市,也就是所有未访问城市中先访问距离最近的城市,直至所有城市均被搜索到.

在实际操作时将遇到一个关键问题,当扩张到距离最短的某个城市时,如何把该城市加入到路径中.假设当前路径中的一段为 $C_{i-2}C_{i-1}C_iC_{i+1}C_{i+2}$, C_j 是所有未访问城市中离该路径最近的城市,并假设城市 C_i 与 C_j 的距离 $d(C_i, C_j)$ 为最短,下一步,把 C_j 加入到当前路径中,有2种加入次序(如图1):

$$C_{i-2}C_{i-1}C_jC_iC_{i+1}C_{i+2} \text{ 和 } C_{i-2}C_{i-1}C_iC_jC_{i+1}C_{i+2}.$$

$$\text{当 } d(C_{i-1}, C_j) + d(C_i, C_{i+1}) \leq d(C_{i-1}, C_j) + d(C_i, C_{i+1})$$

时,即

$$d(C_{i-1}, C_i) + d(C_j, C_{i+1}) \leq d(C_{i-1}, C_j) + d(C_i, C_{i+1}).$$

加入的次序为 $C_{i-2}C_{i-1}C_jC_iC_{i+1}C_{i+2}$,反之加入

的次序为 $C_{i-2}C_{i-1}C_iC_jC_{i+1}C_{i+2}$.

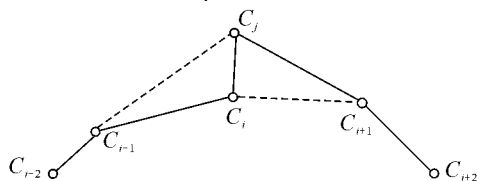


图1 加入一个最近的城市节点

Fig. 1 Add a nearest neighbor city

表1是8个城市的坐标,图2是8个城市时,按扩张方法访问城市的搜索顺序.扩张方法得到的路径为:1,6,7,5,4,8,3,2.路径长度为12.260.

表1 8个城市坐标

Table 1 Coordinates of 8 cities

城 市	坐 标
1	(2,0)
2	(3,0)
3	(3,1)
4	(3,2)
5	(3,3)
6	(1,1)
7	(1,2)
8	(5,1.1)

与弹性网络相同,由于扩张方法不会产生交叉的路径,所以产生的解都相当不错.而且扩张方法避免了弹性网络的训练过程,直接搜索使得访问路径最短的城市,加快了求解速度.因为 N 个城市之间共有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个距离,寻找距离最近的城市复杂性不超过 $O(N^2)$,每次扩张1次增加1个城市,因此扩张算法的时间复杂度低于 $O(N^3)$.

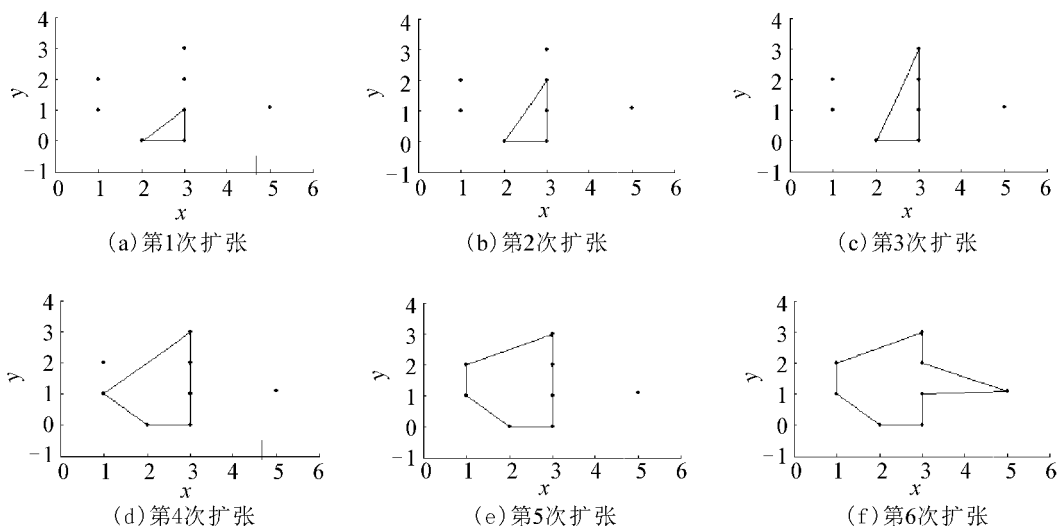


图2 扩张方法的搜索次序

Fig. 2 Searching order of expansion method

2 收缩方法

与扩张方法思路相反的方法是收缩,首先确定4个边角点,方法如下:分别比较出所有城市的 x 轴的最小值 x_{\min} 和最大值 x_{\max} , y 轴的最小值 y_{\min} 和最大值 y_{\max} ,这样就得到4个边角坐标 (x_{\min}, y_{\min}) 、

(x_{\max}, y_{\min}) 、 (x_{\max}, y_{\max}) 和 (x_{\min}, y_{\max}) .这4个边角有可能与原来城市坐标重叠,也可能不重叠(如图3中“0”).然后找出分别与上面4个边角点最近的4个边角城市(如图中的“+”),这4个边角城市作为初始路径.

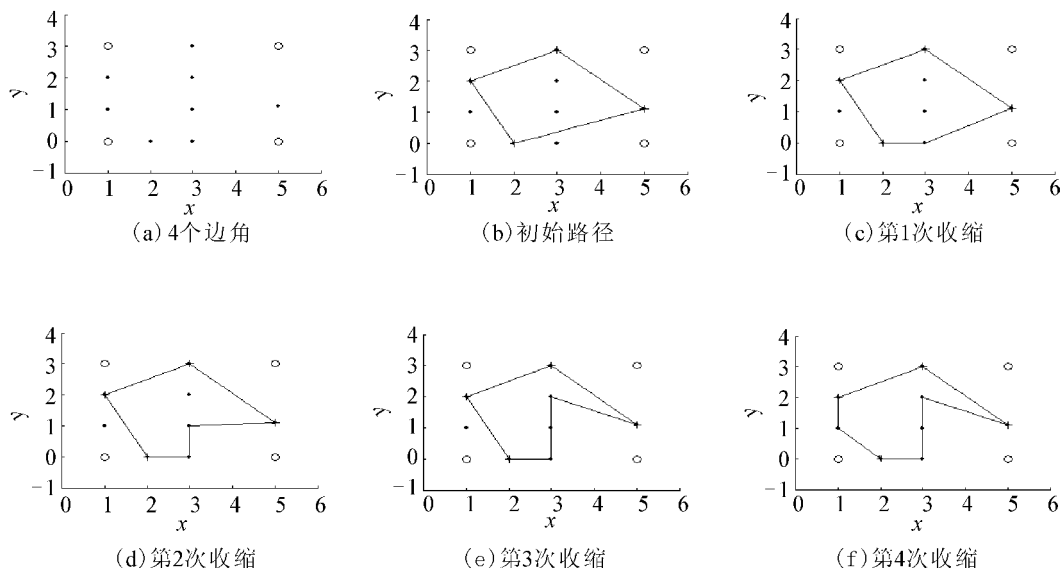


图3 收缩方法的搜索次序

Fig. 3 Searching order of shrink method

接下来的工作与扩展方法类似,搜索所有未访问城市中距离最近的,直至所有城市均被搜索到.与扩张算法类似,其时间复杂度也低于 $O(N^3)$.

同样的例子,图3是扩张方法访问城市的搜索顺序.搜索方法得到的路径为:1,2,3,4,8,5,7,6.路径长度为12.602.

2种方法的结果不一样,解的质量还可以接受.由于收缩方法选择初始的4个城市不能保证把所有城市都包含四边形中,搜索过程中有时收缩,有时扩张,因此该方法的效果不如扩张方法好.

3 实例分析

着重分析扩张方法,分别选用 Oliver30 (最好解为420.15) 和 att48 (TSPLIB 提供的最好解为 33522) 作为实验例子来研究.图4显示了目前 Oliver30 最好解,图5显示了扩张方法解 Oliver30 的 TSP 解,路径长度为 536.56.图6显示了 att48 最好解,图7显示了扩张方法求 att48 的解,路径长度为 42 439.

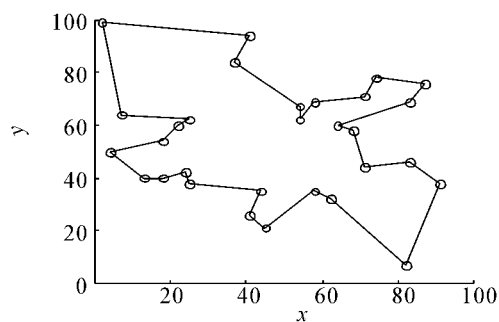


图4 Oliver30 的 TSP 最好的解

Fig. 4 The optimal tour of Oliver30

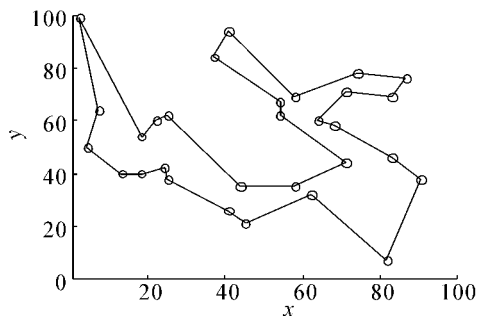


图5 扩张方法的 Oliver30 的 TSP 解

Fig. 5 The tour of Oliver30 by expansion method

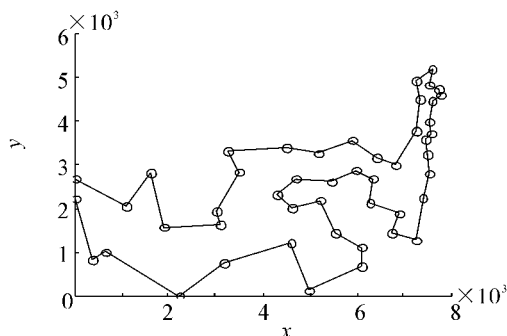


图6 att48 的最好的解

Fig. 6 The optimal tour of att48

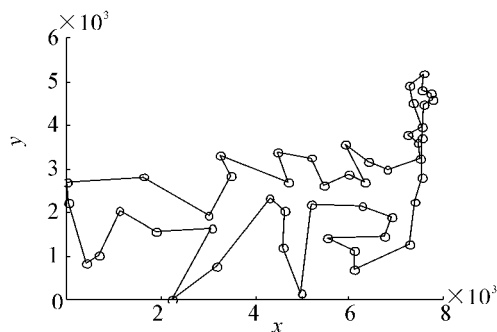


图7 扩张方法的 att48 的解

Fig. 7 The tour of att48 by expansion method

扩张方法首先从最短2个城市出发,将其与离2个城市最近的1个城市连成一个三角形,然后扩展.实际上可以先随机挑选一个城市,然后找离该城市最短的第2个城市,后面的步骤与扩展方法相同,此方法称为随机扩张方法,这样随机的选取会增大更好解的几率.

由于扩张方法的复杂性为 $O(N^3)$, 复杂性不高,可采取完全枚举法,分别以各个城市为第1个城市,然后找离该城市最短的第2个城市,后面的步骤与扩展方法相同,最后从 N 个结果中挑选最好的结果,此方法称为完全扩张方法.很显然其时间性低于 $O(N^4)$.

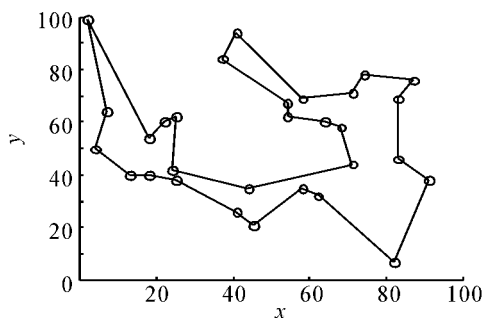


图8 完全扩张方法的 Oliver30 的解

Fig. 8 The tour of Oliver30 by complete expansion method

对于 Oliver30 问题,完全扩张方法最好的结果是:第1个城市选29,路径长度为485.11(图8).对于 att48 问题,完全扩张方法最好的结果是:第1个

城市选23,路径长度为38962.94(图9).虽然完全扩张方法不一定能找到最优解,但能在较短时间内找到“次优解”也能满足实际需要.

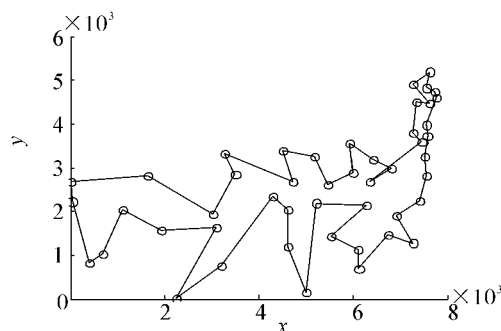


图9 完全扩张方法的 att48 的解

Fig. 9 The tour of att48 by complete expansion method

4 结束语

在弹性网络算法基础上,提出了扩张方法和收缩方法,它们时间复杂性低于 $O(N^3)$, 经过比较扩张方法的效果比较好.在扩张方法的基础上,提出随机扩张方法和完全扩张方法,完全扩张方法的时间复杂性低于 $O(N^4)$, 仍然是一个多项式算法,运行速度极快.由于 TSP 问题代表着一类组合优化问题,并且 TSP 问题在实际工程中有许多应用,如电子地图、交通诱导、VLSI 布线等.在很难找到最优解的情况下,由完全扩张方法找到的“次优解”可满足实际工程需要.

参考文献:

- [1] 邢文循,谢金星.现代优化计算方法[M].北京:清华大学出版社,1999:90-129.
- [2] 高国华,沈林成,常文森.求解 TSP 问题的空间锐化模拟退火算法[J].自动化学报,1999,25(3):425-428.
GAO Guohua, SHEN Lincheng, CHANG Wensen. Using simulated annealing algorithm with search space sharpening to solve traveling salesman problem[J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(3): 425-428.
- [3] KIRKPATRICK S, GELATT JR, VECCHI JR. Optimization by simulated annealing[J]. Science, 1983, 220: 671-680.
- [4] 康立山,谢云,尤矢勇,等.模拟退火算法[M].北京:科学出版社,1994:150-151.
- [5] 谢胜利,唐敏,董金祥.求解 TSP 问题的一种改进的遗传算法[J].计算机工程与应用,2002,38(8):58-60.
XIE Shengli, TANG Min, DONG Jinxiang. An improved genetic algorithm for TSP problem[J]. Computer Engineering and Applications, 2002, 38(8): 58-60.
- [6] 喻镭,凌捷,谢晓峰.用遗传算法求解 CTSP[J].广东工业大学学报,2000,17(5):52-55.
YU Di, LING Jie, XIE Xiaofeng. Solving CTSP with genet-

- ic algorithm[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2000, 17(3): 52-55.
- [7] 张立明. 人工神经网络的模型及其应用[M]. 复旦大学出版社, 1994: 97-98.
- [8] 张纪会, 徐心和. 具有变异特征的蚁群算法[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(10): 1240-1245.
WU Qinghong, ZHANG Jihui, XU Xinhe. An ant colony algorithm with mutation features[J]. Journal of Computer Research and Development, 1999, 36(10): 1240-1245.
- [9] 马良, 项培军. 蚂蚁算法在组合优化中的应用[J]. 管理科学学报, 2001, 4(2): 32-37.
MA Liang, XIANG Peijun. Applications of the ant algorithm to combinatorial optimization[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(2): 32-37.
- [10] DURBIN R, WILLSHAW D. An analogue approach to the traveling salesman problem using an elastic net method[J]. Nature, 1987, 326: 689-691.
- [11] 白艳萍, 胡红萍. 一个改进的弹性网络算法求解 TSP 问题[J]. 华北工学院学报, 2005, 26(4): 235-238.
BAI Yanping, HU Hongping. A modified elastic net algorithm for traveling salesman problem[J]. Journal of North China Institute of Technology, 2005, 26(4): 235-238

作者简介:



高尚, 男, 1972 年生, 教授, 主要研究方向智能计算等。

HZInternational workshop on quality of service management of wireless networks(IWQSWN 2010)

This workshop is to be held in conjunction with the 2010 IEEE Asia-Pacific Services Computing Conference at Hangzhou, China. The objective of this workshop is to review the state of the art research in the quality of service (QoS) management and diagnosis of wireless networks, as well as to explore future research directions in this area. Quality of service of wireless networks refers to the collective service performances with respect to the user expectation and the network configuration. Over the years, the wireless networks have not only expanded in their sizes, such as geographical area and number of nodes, but also in the variety of services, users, and deployment environments. Small mobile devices that allow instantaneous high speed information access and data processing have radically changed the way of our living. Moreover, the development of ad-hoc networks allows the easy formation of wireless networks for information sharing and data gathering.

Indexed by SCI&EI

December 6-10, 2010, Hangzhou, China

Topics of Interest

Topics of interest include (but are not limited to):

- fault diagnosis
- diagnosis middleware
- reconfigurable networks
- performance evaluation
- QoS evaluation model
- self-healing networks
- Adaptable resource management
- Network simulation platforms
- QoS-oriented network planning

See more information at <http://apscc2010.hdu.edu.cn>