

doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2010.02.010

6R 关节型机器人运动学建模

王立权¹, 刘秉昊², 吴健荣¹, 韩金华¹, 卢正宇¹

(1. 哈尔滨工程大学 机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:为满足新开发的多机器人实验系统编程需要,研究了6R机器人运动学逆解问题。推导了代数逆解结果,并研究了将其用于实际控制系统时,逆解的漏解、增根和多解问题。与传统方法比较,采用了便于程序模块化的坐标系设置方式,在需要经常更换作业工具的多机器人系统中更为适用。推导过程只需2次矩阵逆乘,步骤简单。基于VC++和OpenGL技术编制了系统程序,检验了方法的有效性。以其中一个位姿为例,对比几何方法得出的结果,验证了算法的正确性。研究的结果适用于MOTOMAN-UP6和PUMA560等相似构型的所有机器人。

关键词:逆运动学;机器人;代数解法

中图分类号: TP241 文献标识码:A 文章编号:1673-4785(2010)02-0156-05

Modeling and implementing the inverse kinematics of a six revolute joint robot

WANG Li-quan¹, LIU Bing-hao², WU Jian-rong¹, Han jin-hua¹, LU Zheng-yu¹

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: To program a new multi-robot system, inverse kinematic equations for a six revolute joint (6R) robot were developed. Their algebraic solutions were then derived. Conditions causing there to be no solution, extraneous roots, or multiple solutions for inverse kinematic equations were studied for equations used in the practical control of a system. Compared with traditional methods, this method is more suitable for a multi-robot system in which working tools are frequently replaced. As only two inverse matrices were involved, the method was simple and easy. In order to verify the effectiveness of the method, it was compiled using VC ++ and OpenGL software. After selecting a specific position as an example, we proved the correctness of the algorithm by comparing its results to those from geometric analysis. The research is applicable to other robot systems with similar mechanical configurations, such as MOTOMAN-UP6 or PUMA560.

Keywords: inverse kinematics; robot; algebraic solution

运动学逆解是机器人控制的基础,已有大量文献研究。机器人运动学逆解方法有很多,包括代数法、几何法、数值法,以及神经网络、遗传算法等智能方法。其中,代数法结果精确、实时性好,在MOTOMAN、PUMA型机器人控制中最为实用。

为建立开放的多机器人协调作业实验平台,编制适用于多机器人、多工具系统的机器人逆解程序,笔者查阅了大量文献。发现绝大部分文献都是单个机器人逆解方法的理论研究,既不考虑实际控制中非常重要的漏解、增根、多解问题,也不考虑编程应

用的方便性,个别文献的理论推导还存在瑕疵。

文献[1]理论推导了PUMA560的运动学逆解方程,文献[2-3]给出了一种求解MOTOMAN-UPJ型机器人的逆解方法。文献[4]在文献[2]的基础上讨论MOTOMAN-SV3X型机器人逆解问题,注意到了机器人安装位置和所配工具的变化。由于使用反正弦、反余弦、反正切表示角度,文献[2]和文献[4]都存在个别漏解问题,国内一些介绍机器人技术的专著中也有类似现象。此外,以上文献对推导的多组解没有作进一步处理,其结果尚不能直接用于机器人控制编程。

本文结合课题需要,在文献[3-4]的基础上对逆解方法进行改进,寻求一种准确可靠、实时性好、可

收稿日期:2008-12-20。

基金项目:黑龙江省自然科学基金重点资助项目(ZD200911)。

通信作者:王立权. E-mail: wangliquan@hrbeu.edu.cn.

若出现 $v^2 + u^2 - m^2 < 0$, 则表明目标位姿点不在机器人可达工作空间内.

由式(4)和(5)得

$$\theta'_3 = \text{atan2}(a_3 h_2 - d_4 h_1, a_3 h_1 + d_4 h_2).$$

式中: $h_1 = c_2 u - s_2 v - a_2$, $h_2 = -s_2 u - c_2 v$.

考虑第3关节的转动范围是 $-225^\circ < \theta_3 < 70^\circ$, 因此

$$\theta_3 = \begin{cases} \theta'_3, & \theta'_3 \leq (70/180)\pi, \\ \theta'_3 - 2\pi, & \theta'_3 > (70/180)\pi. \end{cases}$$

2) 求解 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$.

由 ${}^0_6 T = {}^0_3 T {}^3_6 T$ 得:

$${}^3_6 T = ({}^0_3 T)^{-1} {}^0_6 T. \quad (6)$$

左边:

$${}^3_6 T = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

右边:

$$({}^0_3 T)^{-1} {}^0_6 T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

式中:

$$\begin{aligned} r_{11} &= (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) n_x + (s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3) n_y - \\ &\quad (s_2 c_3 + c_2 s_3) n_z, \\ r_{12} &= (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) o_x + (s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3) o_y - \\ &\quad (s_2 c_3 + c_2 s_3) o_z, \\ r_{13} &= (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) a_x + (s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3) a_y - \\ &\quad (s_2 c_3 + c_2 s_3) a_z, \\ r_{21} &= (-c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3) n_x - (s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 c_3) n_y + \\ &\quad (s_2 s_3 - c_2 c_3) n_z, \\ r_{22} &= (-c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3) o_x - (s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 c_3) o_y + \\ &\quad (s_2 s_3 - c_2 c_3) o_z, \\ r_{23} &= (-c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3) a_x - (s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 c_3) a_y + \\ &\quad (s_2 s_3 - c_2 c_3) a_z, \\ r_{33} &= -s_1 a_x + c_1 a_y. \end{aligned}$$

考虑式(6)左、右对应元素(2, 3)相等, 得:

$$\theta_5 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - r_{23}^2}, r_{23}).$$

若 $s_5 \neq 0$, 用 $\text{sign}(s_5)$ 表示 s_5 的符号, 考虑式(6)两边对应元素(1, 3)和(3, 3)相等, 得

$$\theta_4 = \text{atan2}(-r_{33} \times \text{sign}(s_5), -r_{13} \times \text{sign}(s_5)).$$

考虑式(6)两边对应元素(2, 1)和(2, 2)相等, 得

$$\theta_6 = \text{atan2}(-r_{22} \times \text{sign}(s_5), r_{21} \times \text{sign}(s_5)).$$

若 $s_5 = 0$, 代入式(6)右边, 再考虑对应元素(1, 1)和(1, 2)相等, 得 $\theta_4 + \theta_6 = \text{atan2}(-r_{12}, r_{11})$.

此时, 机器人处于奇异位置, 可先确定 θ_4 , 再求 θ_6 . 这里: $\theta_4(k+1) = \theta_4(k) + \lambda [\theta_{4+6}(k+1) - \theta_{4+6}(k)]$, λ 由第4关节和第6关节许用的最大速度确定. $\theta_4(k+1)$ 表示 θ_4 目标角度 $\theta_4(k)$ 表示 θ_4 的当前角度, 其余类似.

至此, 求出了全部的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$.

上述求解过程用双变量反正切函数 $\text{atan2}(y, x)$ 表示角度, 求解过程使用了以下结论^[6]:

若 $\cos \theta = b$, 则 $\theta = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - b^2}, b)$ (原文献中为 $\theta = \text{atan2}(b, \pm \sqrt{1 - b^2})$, 疑为疏误);

若 $\cos \theta + b \sin \theta = 0$, 则 $\theta = \text{atan2}(a, -b)$ 或 $\theta = \text{atan2}(-a, b)$;

若 $\cos \theta + b \sin \theta = c$, 则 $\theta = \text{atan2}(b, a) \pm \text{atan2}(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, c)$;

若 $\begin{cases} \cos \theta - b \sin \theta = c \\ a \sin \theta + b \cos \theta = d \end{cases}$, 则 $\theta = \text{atan2}(ad - bc, ac + bd)$.

3 推导结果的讨论

3.1 角度的表示问题

在数学中, $y = \arcsin(x)$ 的值域是 $[-\pi/2, \pi/2]$, $y = \arccos(x)$ 的值域是 $[0, \pi]$, $y = \arctan(x)$ 的值域是 $(-\pi/2, \pi/2)$, $z = \text{atan2}(y, x)$ 的值域是 $[-\pi, \pi]$. 大多数机器人关节角度是在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 之间. 因此, 用双变量反正切函数表示关节角度更为合适. 文献[3, 5]直接用反正弦、反余弦、反正切函数表示关节角, 而没有考虑实际的机器人关节转动范围, 可能造成漏解. 对于角度范围超出 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 的关节要分区间讨论.

3.2 增根问题

通常产生增根的原因有2个:一是解得的目标角度超出机器人关节允许的转动范围;二是代数法中运用三角函数公式造成. 对于前者, 必须通过角度范围的校验来剔除增根. 对于后者, 由于不可避免要使用三角代换, 因此需要借助几何方法来分析可能的最大逆解组数, 以检查推导过程是否引入了增根. 若分析得出的最大逆解组数与推导的逆解组数不

符,则应继续寻找约束条件,剔除增根.

本文机器人物型最多有 8 组逆解,得到 8 组逆解,说明代数求解方法没有引入增根.

3.3 多解问题

由第 2 节推导的结果可知,可能的逆解有 8 组,如图 2 所示. 实际控制系统只能按其中一组解来执行,这里采用结构体变量 Tree,并引入最佳柔顺准则式(7)选取惟一解.

$$ex = \min\left(\sum_{i=1}^6 k_i [\theta_i(k+1) - \theta_i(k)]^2\right). \quad (7)$$

式中: $\theta_i(k+1)$ 为目标角度, $\theta_i(k)$ 为当前角度, k_i 为权值.

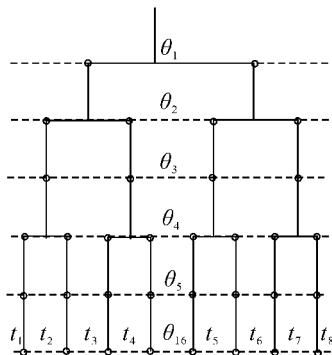


图 2 逆解树

Fig. 2 Tree of inverse solutions

Struct Tree //保存逆解的结构体

```
{
    int P; //结束标识,初始值为 0
        //1,2...表示结束计算的原因
    double theta1;
    ...
    double theta6; //角度值
    double ex; //柔顺值
};
```

具体计算步骤是:计算 θ_1 → 计算 θ_2 (若 $v^2 + u^2 - m^2 < 0$, 则 $P = 1$, $ex = 10^7$, 结束该组解计算;否则执行下一步) → 判断 θ_2 是否为增根(若为增根,则 $P = 2$, $ex = 10^7$, 结束该组解计算;否则执行下一步) → 计算 θ_3 → 判断 θ_3 是否为增根 → 计算 θ_5 → 判断 θ_5 是否为增根 → 计算 θ_4 → 计算 θ_6 → 调用子程序,检验障碍等约束条件,若不满足则置 P 值和 ex 值,否则继续下一步 → 计算 $ex = \sum_{i=1}^6 k_i [\theta_i(k+1) - \theta_i(k)]^2$. 最后,从中选出 ex 值最小的一组解,并判断 ex . 若 $ex < 10^7$, 则将该结构体中的角度值作为最终逆解结果,这样就得到了惟一逆解. 若不满足 $ex < 10^7$, 则表明没有可行解,检查 P 值,可以知道原因.

4 实验系统及算法检验

4.1 实验系统

根据课题需要,开发了控制系统的软、硬件,图 3 是机器人实验系统照片. 硬件系统以 PC 机作为上位机,通过 CAN9820 总线控制多个下位单片机,每个单片机控制一个关节. 基于 VC ++ 和 OpenGL 技术实现机器人的虚拟主从控制,详情见文献[6].

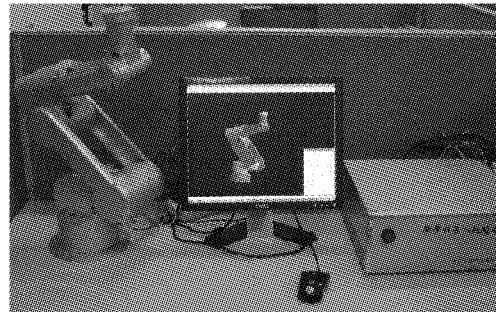


图 3 机器人系统照片

Fig. 3 Photo of the robot system

本文所讨论的逆解算法作为算法模块的一个子程序. 由于 D-H 坐标系设置时将基座、工具形状等因素从核心运动学算法中分离,算法模块可供系统中多个机器人共用,并且能够方便地修改其基座位置和工具形状.

4.2 逆解结果检验

利用实验系统可直观地验证逆解结果. 为精确地分析逆解过程,从软件系统中获取运行数据,举例分析其中一个位姿 $\mathbf{T}^0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 120; 0 \ 0 \ 1 \ 220; 0 \ 0 \ 0 \ 1]$, 取权值 $k_1 = k_2 = k_3 = 1, k_4 = k_5 = k_6 = 0.2$. 得到的结果如表 2 所示,与几何方法分析的结果一致. 图 4 中给出了 4 组解,肘关节翻转后可再生成 4 组解. 表 2 中加“*”的角度值是参考值(实际程序中是随机数),最终程序选择了第 4 组解. 将角度值代入正解表达式,正解结果与给定值一致.

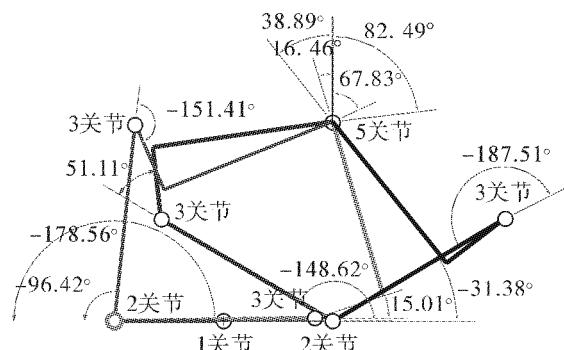


图 4 机器人的 4 组解

Fig. 4 Four solutions of the robot

表 2 运动学逆解结果
Table 2 Solutions of inverse kinematic

组	$\theta_1/(^\circ)$	$\theta_2/(^\circ)$	$\theta_3/(^\circ)$	$\theta_4/(^\circ)$	$\theta_5/(^\circ)$	$\theta_6/(^\circ)$	$ex(\times 10^{-4})$	备注
1	90.00	-31.38	-187.51	0.00	38.89	90.00	4.62	
2	90.00	-31.38	-187.51	-180.00	-38.89	-90.00	5.26	
3	90.00	-148.62	51.11	180.00	82.49	-90.00	4.22	
4	90.00	-148.62	51.11	0.00	-82.49	90.00	3.57	✓
5	-90.00	-96.42	-151.41	0.00	67.83	-90.00	4.28	
6	-90.00	-96.42	-151.41	-180.00	-67.83	90.00	4.93	
7	-90.00	-178.56	* 15.01	* 180.00	* 16.46	* 90.00	10^3	$P = 2$
8	-90.00	-178.56	* 15.01	* 0.00	* -16.46	* -90.00	10^3	$P = 2$

5 结束语

本文给出了一种求 MOTOMAN-UP6 构型 6R 机器人运动学逆解的代数方法, 它同时适用于 PUMA560 型机器人。文中采用了更利于程序模块化的 D-H 坐标设置方法, 推导过程比文献[1,7-9]更为简捷。用双变量反正切函数表示角度, 避免文献[2,4,7]中可能存在的漏解问题。使用柔顺性准则从最多 8 组可行解中确定惟一解。基于 VC++ 和 OpenGL 技术实际编制了软件系统, 检验了算法的有效性, 并以其中一个位姿点为例, 对比几何分析方法验证了逆解结果的正确性。

参考文献:

- [1] 王奇志, 徐心和, 尹朝万. PUMA 机械手逆运动方程新的推导方法及求解[J]. 机器人, 1998, 20(2): 81-87.
WANG Qizhi, XU Xinhe, YIN Chaowan. A new inferential method and efficient solutions for inverse kinematics equations of PUMA robot manipulator [J]. Robot, 1998, 20(2): 81-87.
- [2] 王雪松, 许世范, 郝继飞. MOTOMAN 机械手逆运动学方程新的推导方法与求解[J]. 中国矿业大学学报, 2001, 30(1): 73-75.
WANG Xuesong, XU Shifan, HAO Jifei. New inferential method and efficient solutions for inverse kinematics equations of robot MOTOMAN [J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2001, 30(1): 73-75.
- [3] 陈平, 刘国海. MOTOMAN-UPJ 型机械手运动学改进算法研究[J]. 机械传动, 2006, 30(4), 23-27.
CHEN Ping, LIU Guohai. Study on an improved method in Kinematics for MOTOMANUPJ manipulator [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2006, 30(4), 23-27.
- [4] 崔建伟, 宋爱国, 黄惟一. 遥操作系统中 MOTOMAN-SV3X 机器人的运动建模研究[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2003, 33(4): 424-429.

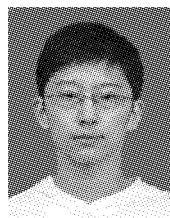
CUI Jianwei, SONG Aiguo, HUANG Weiyi. Research on kinematics modeling of MOTOMAN-SV3X robot in teleoperate system [J]. Journal of Southeast University : Natural Science Edition, 2003, 33(4): 424-429.

- [5] CRAIG J. Introduction to robotics: mechanics and control [M]. 3th ed. Beijing: China Machine Press, 2005: 1-100.
- [6] 王立权, 吴健荣, 刘于珑. 机器人虚拟主手参考结构及关键技术研究[J]. 制造业自动化, 2008, 30(8): 54-57.
WANG Liquan, WU Jianrong, LIU Yulong. Reference architecture and key technologies for virtual master-robot [J]. Manufacturing Automation, 2008, 30(8): 54-57.
- [7] 孙迪生, 王炎. 机器人控制技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997: 1-100.
- [8] 熊有伦. 机器人技术基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 73-75.

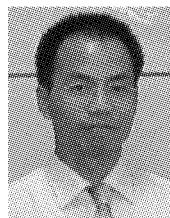
作者简介:



王立权,男,1957年生,教授,主要研究方向为机器人技术,在机器人领域发表学术论文 26 篇。



刘秉昊,男,1989年生,主要研究方向为自动化技术。



吴健荣,男,1982年生,博士研究生,研究方向为机器人技术。