第 2 卷第 5 期　　智 能 系 统 学 报　　Vol. 2 №5
2007 年 10 月　　CAAI Transactions on Intelligent Systems　　Oct. 2007

一类非线性不确定系统的非奇异 Terminal 滑模控制

姚丽萍,刘国栋
(江南大学 通信与控制工程学院,江苏 无锡 214122)

摘　要:针对一类二阶非线性系统提出新的 Terminal 滑模控制面以克服传统的 Terminal 滑模控制的奇异问题,同时确保系统从任何初始状态能在有限时间内收敛至平衡点. 进一步考虑系统参数摄动和外界扰动等不确定性因素上界的未知性,用 Lyapunov 稳定性方法给出了一个带有未知性上界参数估计的自适应非奇异 Terminal 滑模控制(NTSM)控制. 最后通过实例比较三种滑模控制方法,仿真结果验证了非奇异 Terminal 滑模控制能克服传统的 Terminal 滑模控制的奇异问题,并说明了自适应非奇异 Terminal 滑模控制的有效性和可行性.

关键词:Terminal 滑模控制;奇异;非线性系统;Lyapunov 稳定性
中图分类号:TP273　**文献标识码**:A　**文章编号**:1673-4785(2007)05-0053-05

Non-singular Terminal sliding mode control for a class of uncertain nonlinear systems

YAO Li-ping, LIU Guo-dong
(Department of Communication and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China)

Abstract: This paper presents a new Terminal sliding mode control surface for a class of second-order nonlinear uncertain systems to eliminate the singularity problem in conventional terminal sliding mode controls, so that the system can be guaranteed to converge to an equilibrium point from any initial state within a finite time in the phase of sliding mode motion. To deal with the upper bounds of uncertainties such as systematic parameter perturbations and external disturbances, an adaptive non-singular Terminal sliding mode (NTSM) control with parametric estimation for uncertain upper bounds was derived using Lyapunov stability theory. The simulation results of an example are investigated to show non-singularity terminal sliding mode can elimination the singularity, and also show the feasibility and the effectiveness of the self-adaptive method.

Keywords: Terminal sliding mode control; singularity; nonlinear systems; Lyapunov stability

滑模变结构控制的基本原理就是使用一个不连续的高频切换控制迫使闭环系统的运动到达预先选定的滑动面或者它的一个很小的邻域上,通过控制器结构的改变以使系统达到良好的动态性能. 滑模控制对参数摄动和外部扰动具有不敏感性,一般情况下,选择线性的滑动超平面是变结构控制理论中最为常见的情形. 这个线性的滑动超平面能够确保系统轨迹在到达滑动模态阶段以后,滑动模态的运动是渐近稳定的,尽管如此滑动模态仍然不会在有限时间内收敛至零[1]. 近年来,有限时间机理-Terminal 滑动模态发展起来,它是一种新型变结构控制思想. 变结构控制理论中引入 Terminal 滑动模态的最直接的原因就是:Terminal 滑模可以使系统的状态在“有限时间内”收敛至平衡点[2]. Terminal 滑模控制策略的实质在于:在滑动超平面的设计中引入了非线性函数,非线性函数的引入使得在滑动面上系统状态能够在有限时间内收敛到零. 然而传统的 Terminal 滑模控制器的设计存在奇异问题,一些避免 Terminal 奇异问题的解决方法已提出[3]. 本文针对一类二阶非线性不确定动态系统提出非奇异 Terminal 滑动模态(NTSM)控制器的设计,并通过提出一种新的 NTSM 滑模面来克服奇异问题,使得

收稿日期:2007-04-08.

系统处于滑动模态阶段时状态变量能够在有限时间内收敛至平衡点. 最后利用文献[4]中提出的自适应思想,研究带有未知系统参数摄动和外界扰动等不确定性因素上界的自适应非奇异 Terminal 滑模控制策略.

1 系统描述

考虑如下二阶不确定非线性动态系统:

$$\dot{x}_1 = x_2.$$
$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x) + b(x)u. \quad (1)$$

式中: $x = [x_1, x_2]^T$ 表示系统状态向量, $f(x)$、$b(x) \neq 0$为非线性函数, $g(x)$ 代表不确定项和干扰项,且 $\|g(x)\| \leq l_g$, $l_g > 0$, u 为控制输入.

2 非奇异 Terminal 滑动模态

2.1 传统 Terminal 滑模(TSM)控制

传统的 TSM 滑模面取为下列 Terminal 滑模向量:

$$s = x_2 + \beta x_1^{q/p}. \quad (2)$$

式中: $\beta > 0$ 为常数, p, q 均为正奇数且满足 $p > q$. 存在 TSM 的充分条件为 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 < -\eta|s|$, $\eta > 0$ 为常数. 对系统(1)取控制量为

$$u = -b^{-1}(x)[f(x) + \beta\frac{q}{p}x_1^{q/p-1}x_2 + (l_g + \eta)\mathrm{sgn}(s)], \quad (3)$$

以确保滑动模态发生. 当 $s(0) \neq 0$ 时,系统状态将在有限时间 t_r 内达到滑动模态 $s(0) = 0$,且满足 $t_r \leq \frac{|s(0)|}{\eta}$;当系统达到滑动模态 $s = 0$,系统动态特性由下列非线性微分方程决定:

$$x_2 + \beta x_1^{q/p} = \dot{x}_1 + \beta x_1^{q/p} = 0. \quad (4)$$

式中: $x_1 = 0$ 为系统(4)的 Terminal 吸引子. 设从 $x_1(t_r) \neq 0$ 到 $x_1(t_s + t_r) = 0$ 的有限时间为 t_s 且由下式给出:

$$t_s = \frac{p}{\beta(p-q)}|x_1(t_r)|^{1-q/p}. \quad (5)$$

这意味着在 TSM 滑模面(4)上,系统状态 x_1、x_2 在有限时间内收敛到零.

由 TSM 输入控制式(3)可看出,式(3)第 2 项包含 $x_1^{q/p-1}x_2$,在 $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ 的条件下会发生奇异问题,而这种情况不会发生在理想滑动模态,因为当 $s = 0$, $x_2 = -\beta x_1^{q/p}$,只要 $q < p < 2q$ 即 $1 < p/q < 2$,此项 $x_1^{q/p-1}x_2 = -\beta x_1^{(2q-p)/p}$ 为非奇异项. 当输入控制不能确保 $x_1 = 0$、$x_2 \neq 0$,奇异问题就可能发生在到达滑动模态阶段,也可能发生在到达滑动模态 $s = 0$ 后,由于计算误差和不确定项影响,系统状态不能确保总在滑动模态,特别在平衡点($x_1 = 0$, $x_2 = 0$)附近和 $x_1 = 0$、$x_2 \neq 0$ 情况下奇异问题会不时发生,因此奇异问题在传统 TSM 系统下就显得非常重要.

2.2 非奇异 Terminal 滑动模态(NTSM)控制

为了克服传统 TSM 的奇异问题已提出几种方法,如在 TSM 和线性滑模超平面之间进行转换[5],另一种是将轨迹转换到提前规定的区间上,在此区间上 TSM 非奇异,这些方法都是间接避免奇异问题. 本文采用如下的 NTSM 方法.

设 NTSM 滑模函数为

$$s = x_1 + \frac{1}{\beta}x_2^{p/q}. \quad (6)$$

式中: β、p 和 q 的定义同式(2),可以看出当 $s = 0$ 时式(6)相当于式(2). 因此系统在滑动模态下达到平衡点 $x_1 = 0$ 的时间和式(5)相同,而且由式(6)得到的 $\dot{s}$ 在动态系统中不会导致负幂次方,用下面的定理可以证明.

定理 1 对系统(1)取滑模面切换函数(6)控制量 u 取为

$$u = -b^{-1}(x)\left[f(x) + \beta\frac{q}{p}x_2^{2-p/q} + (l_g + \eta)\mathrm{sgn}(s)\right]. \quad (7)$$

式中: $1 < p/q < 2$, $\eta > 0$ 系统将在有限时间内到达 NTSM,进一步讲状态量 x_1、x_2 将在有限时间内收敛到零.

证明 由(6)可得到

$$\dot{s} = \dot{x}_1 + \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}\dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}\dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}(f(x) + g(x) + b(x)u) = \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}(g(x) - (l_g + \eta)\mathrm{sgn}(s)).$$

那么

$$s\dot{s} = \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}(g(x)s - (l_g + \eta)\mathrm{sgn}(s)s) \leq -\frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}\eta|s|.$$

由于 p 和 q 均为正奇数且 $1 < p/q < 2$,有当 $x_2 \neq 0$ 时, $x_2^{p/q-1} > 0$,让 $\rho(x_2) = \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}$ 则有:当 $x_2 \neq 0$ 时, $s\dot{s} \leq -\rho(x_2)\eta|s|$, $\rho(x_2)$, $\eta > 0$. 因此当 $x_2 \neq 0$时,系统满足 Lyapunov 稳定性原理. 将输入

控制量式(7)代入式(1)得

$$\dot{x}_2 = -\beta\frac{q}{p}x_2^{2-p/q} + g(x) - (l_g - \eta)\,\mathrm{sgn}(s).$$

当 $x_2 = 0$ 时,有

$$x_2 = g(x) - (l_g - \eta)\,\mathrm{sgn}(s).$$

当 $s > 0$ 时,$\dot{x}_2 \le -\eta$,当 $s < 0$ 时,$\dot{x}_2 \ge -\eta$,系统相轨迹如图 1 示. 由相轨迹可见当 $x_2 = 0$ 时,系统状态能在有限时间内到达滑动模态 $s = 0$[6]. 可以看出当 $1 < p/q < 2$ 时 NTSM 控制(7)不存在奇异问题.

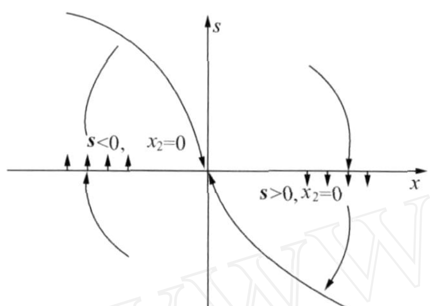

图 1　系统的相轨迹

Fig. 1　The phase plot of the system

3　自适应 NTSM 控制器的设计

在一般的变结构控制系统中,均需已知系统不确定性的界,并由此构造出具有继电控制项的控制律,保证系统进入滑动模态. 这些界往往很难获得,若控制律中的这些数据取得太大,会影响控制效率,取得太小,将不能保证滑动模态的存在. 自适应控制方法提供了另一种解决系统不确定性问题的有效方法,可以得到已知不确定性结构的未知参数估计. 因此这里将结合变结构和自适应控制的各自优点,并应用 Terminal 滑模变结构控制思想,来综合一种新型的自适应 Terminal 滑模控制算法[7-8]. 此时系统(1) 的不确定项 $g(x)$ 不再满足 $\|g(x)\| \le l_g$,即不确定性的界未知,为此给出下面假设.

假设　不确定性 $g(x)$ 满足下面的不等式:

$$\|g(x)\| \le r_0 + r_1\|x\|. \tag{8}$$

而 r_0、r_1 是 2 个非负的未知常数,这里为了估计不确定性 $g(x)$,给出如下的简单自适应律:

$$\dot{\tilde{r}}_0(t,x) = q_0^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|,$$

$$\dot{\tilde{r}}_1(t,x) = q_1^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|\cdot\|x\|. \tag{9}$$

式中:$\tilde{r}_0(t,x) = \bar{r}_0(t,x) - r_0$ 和 $\tilde{r}_1(t,x) = \bar{r}_1(t,x) - r_1$ 是自适应参数误差,q_0 和 q_1 分别为各自的正常数自适应增益,而 $\bar{r}_0(t,x)$ 和 $\bar{r}_1(t,x)$ 即为未知参数 r_0 和 r_1 的自适应参数估计. 由于参数 r_0 和 r_1 为常数,所以式(9) 的自适应律也可写为

$$\dot{\tilde{r}}_0(t,x) = q_0^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|,$$

$$\dot{\bar{r}}_1(t,x) = q_1^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|\cdot\|x\|.$$

考虑 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(s^{\mathrm{T}}s + q_0\tilde{r}_0^2 + q_1\tilde{r}_1^2).$$

对时间 t 的微分为

$$\dot{V} = s^{\mathrm{T}}\dot{s} + q_0\tilde{r}_0\dot{\tilde{r}}_0 + q_1\tilde{r}_1\dot{\tilde{r}}_1 = \oplus s^{\mathrm{T}}(x_2 + \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}(f(x) + g(x) + b(x)u)) + q_0\tilde{r}_0\dot{\tilde{r}}_0 + q_1\tilde{r}_1\dot{\tilde{r}}_1 \le$$

$$s^{\mathrm{T}}(x_2 + \frac{1}{\beta}\frac{p}{q}x_2^{p/q-1}(f(x) + r_0 + r_1\|x\| + b(x)u)) + q_0\tilde{r}_0\dot{\tilde{r}}_0 + q_1\tilde{r}_1\dot{\tilde{r}}_1. \tag{10}$$

选择控制输入 $u(t)$ 为

$$u(t) = -b^{-1}(x)(f(x) + \beta\frac{q}{p}x_2^{2-p/q} + (\bar{r}_0 + \bar{r}_1\|x\| + \eta)\,\mathrm{sgn}(s)). \tag{11}$$

式中:η 为正常数,得

$$\dot{V} \le \|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|(r_0 + r_1\|x\|) - \|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|((r_0 + r_1\|x\| + \eta)\,\mathrm{sgn}(s)) + q_0\tilde{r}_0\dot{\tilde{r}}_0 + q_1\tilde{r}_1\dot{\tilde{r}}_1.$$

将自适应律(9)代入上式可得

$$\dot{V} \le \eta\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\| < 0. \tag{12}$$

由于 $\|\rho(x_2)\| > 0$,$\eta > 0$,所以可以保证系统全局一致渐近收敛至 $s = 0$[9]. 下面讨论滑动面向量 s 的收敛率问题,根据式(10) 和(12)可得

$$\dot{V} = s^{\mathrm{T}}\dot{s} + q_0\tilde{r}_0\dot{\tilde{r}}_0 + q_1\tilde{r}_1\dot{\tilde{r}}_1 \le -\eta\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|$$

$$s^{\mathrm{T}}\dot{s} + q_0\tilde{r}_0 q_0^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|$$

或 $q_1\tilde{r}_1 q_1^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|\cdot\|x\| \le -\eta\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|.$

$$\|s\|\cdot\|\dot{s}\| \ge \tilde{r}_0\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|$$

或 $\tilde{r}_1\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|\cdot\|x\| + \eta\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|.$

则当 $\|s\| \ne 0$ 时,有

$$\|s\| \ge \frac{\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|(\tilde{r}_0 + \tilde{r}_1\|x\| + \eta)}{\|s\|}.$$

对自适应律积分得

$$\tilde{r}_0 = \bar{r}_0(0,x) + \int_0^t q_0^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|\,\mathrm{d}t - r_0. \tag{13}$$

$$\tilde{r}_1 = \bar{r}_1(0,x) + \int_0^t q_1^{-1}\|\rho(x_2)\|\cdot\|s\|\cdot\|x\|\,\mathrm{d}t - r_1. \tag{14}$$

则可得

$$\|s\| \ne 0 \text{ 时 } \|\dot{s}\|\rho(x_2)\|(\tilde{r}_0 + \tilde{r}_1\|x\| + \eta) \ge \|\rho(x_2)\|\eta. \tag{15}$$

式中: $\|\rho(x_2)\|$, $\eta>0$,从而式(15)可以表明滑动面能够在有限时间内收敛到零.

定理 2 对于一类非线性系统(1),在满足假设 1 的条件下,取 NTSM 滑动面切换函数式(6),并采用式(11)的变结构控制策略以及式(13)、(14)的自适应律,可以确保闭环系统能够在任意的有限时间 T 内收敛至零.

注明:为了减小抖动,符号函数 sgn 可以用饱和函数 sat 来代替[10].

4 仿真实例

为了分析 NTSM 的有效性,比较 TSM 和 NTSM 及自适应 NTSM 控制效果,考虑如下的二阶动态系统:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 0.08\sin 20t + u.$$

取 $q=3$, $p=5$, $r_0=0.25$, $r_1=0.50$, $q_0=8$, $q=10$,将 TSM 和 NTSM 的滑模面分别设计如下,自 NTSM 的滑模面同 NTSM 的滑模面:

$$s_{\mathrm{TSM}} = x_2 + x_1^{3/5},$$
$$s_{\mathrm{NTSM}} = x_2 + x_1^{5/3}.$$

设系统的初始状态为[0.3 0.1],控制律参数取 $\lg=0.02$, $\beta=0.85$, $\eta=0.2$, TSM 和 NTSM 及自适应 NTSM 的输入控制律分别对应为式(3)和式(7)及式(11),仿真结果如图:

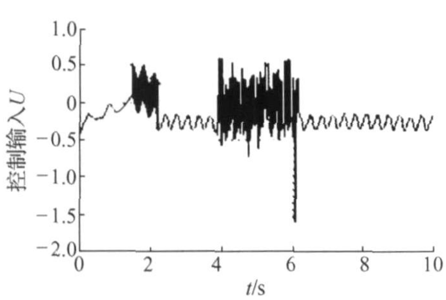

图 2 控制输入信号(TSM)

Fig. 2 The signal of control input(TSM)

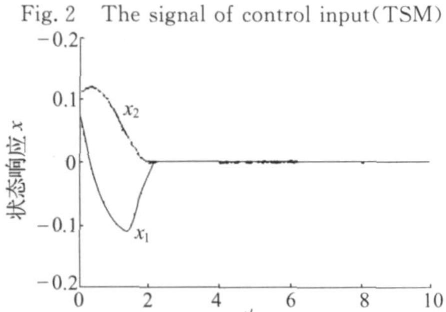

图 3 状态响应(TSM)

Fig. 3 Response of state (TSM)

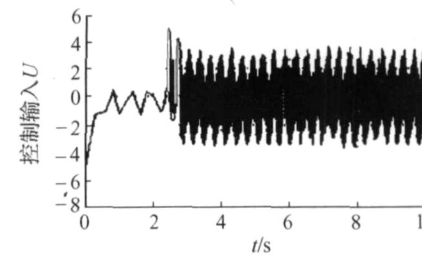

图 4 控制输入信号(NTSM)

Fig. 4 The signal of control input (NTSM)

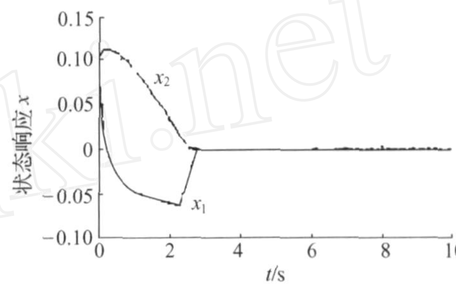

图 5 状态响应(NTSM)

Fig. 5 Response of state (NTSM)

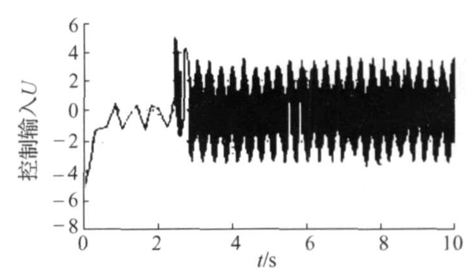

图 6 控制输入信号(自适应 NTSM)

Fig. 6 The signal of adapt control input(adapt NTSM)

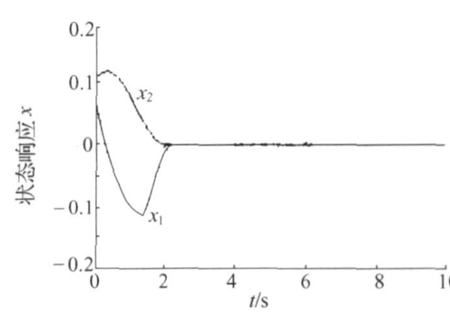

图 7 状态响应(自适应 NTSM)

Fig. 7 Response of state (adapt NTSM)

5 结束语

针对一类二阶非线性参数不确定动态系统通过设计新的 Terminal 滑模控制面来克服传统 TSM 控制的奇异问题,提出了 NTSM 控制方法,并且基于 Lyapunov 稳定性理论得出了带有自适应律的自适应 NTSM 控制.

参考文献:

[1]PARK K B,LEE J J. Comments on a robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robot manipulators[J]. IEEE Trans on Automatic Control,1996,41(4):761 - 762.

[2]PARK K B,TERUO T. Terminal sliding mode control of second-order nonlinear uncertain system [J]. Int J of Robust Nonlineat Control,1999,9(4):769 - 780.

[3]WU Y Q, FENG X H, MAN Z H. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. Systems and Control Letters,1998,34(2):281 - 287.

[4]FENG Y, YU X H, MAN Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators [J]. Automatica,2002,38:2159 - 2167.

[5]FENG Y,HAN F,YU X H,et al. Tracking precision analysis of terminal sliding mode control systems with saturation functions [A]. Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications [C]. Singapore: World Scientific. 2000.

[6]姚琼荟,黄继起,吴汉松. 变结构控制系统[M]. 重庆:重庆大学出版社,1997.

[7]MAN Z H, YU X H. Terminal sliding mode control of mimo linear systems[J]. Fundanmental Theory and Applications,1997,44(11):1065 - 1070.

[8]胡剑波,褚　健. 变结构控制和增益调度控制[D]. 杭州:浙江大学,2001.
HU Jianbo, CHU Jian. Variable structure control and gain-scheduling contrl[D]. Hangzhou: Zhejiang University,2002.

[9]庄开宇,褚　健,苏宏业. 变结构控制理论若干问题研究及其应用[D]. 杭州:浙江大学,2002.
ZHUANG Kaiyu, CHU Jian, SU Hongye. Variable structure control theory study and application [D]. Hangzhou:Zhejiang University,2002.

[10]胡建波,时满宏,庄开宇,等. 一类非线性系统的 Terminal 滑模控制[J]. 控制理论与应用,2005,22(3):495 - 498.
HU Jianbo, SHI Manhong, ZHUANG Kaiyu,et al. Terminal sliding control for a class of nonlinear systems [J]. Control Theory and Application,2005,22(3):495 - 498.

作者简介:

姚丽萍,女,1978 年生,硕士研究生,主要研究方向为机器人技术.
E-mail:xiziyidi@hotmail.com.

刘国栋,男,1950 年生,教授,硕士生导师,主要研究方向为人工智能与机器人,在国内外期刊发表论文 20 余篇.