智能系统学报
CAAI TRANSACTIONS ON INTELLIGENT SYSTEMS

区间值模糊推理的逻辑度量空间

罗敏霞, 徐东辉

引用本文:
罗敏霞,徐东辉. 区间值模糊推理的逻辑度量空间[J]. 智能系统学报, 2023, 18(3): 613–618.
LUO Minxia,XU Donghui. Logical metric spaces for interval–valued fuzzy reasoning[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2023, 18(3): 613–618.

在线阅读 View online: https://dx.doi.org/10.11992/tis.202110019

DOI: 10.11992/tis.202110019

区间值模糊推理的逻辑度量空间

罗敏霞，徐东辉

（中国计量大学 理学院，浙江 杭州 310018）

摘　要: 为了探寻适合区间值模糊推理的条件，本文研究区间值逻辑度量空间。本文提出一种新的基于区间值双剩余蕴涵算子的区间值模糊集的距离度量。由 4 个著名的区间值双剩余诱导相应的距离度量，做成 4 个度量空间，分别研究 4 个度量空间的性质。进一步，证明基于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵的度量空间和区间值 Goguen 剩余蕴涵的度量空间适合做区间值模糊推理。最后，在基于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵度量空间中，证明基于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵的模糊推理全蕴涵算法是鲁棒的，为区间值模糊推理算法的应用提供了坚实的理论基础。

关键词: 模糊集；区间值模糊集；区间值模糊推理；三角范数；剩余蕴涵；距离度量；逻辑度量空间；全蕴涵算法

中图分类号: TP18　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673−4785(2023)03−0613−06

中文引用格式: 罗敏霞，徐东辉. 区间值模糊推理的逻辑度量空间 [J]. 智能系统学报，2023, 18(3): 613–618.

英文引用格式: LUO Minxia, XU Donghui. Logical metric spaces for interval-valued fuzzy reasoning[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2023, 18(3): 613–618.

Logical metric spaces for interval-valued fuzzy reasoning

LUO Minxia, XU Donghui

(School of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to find the condition suitable for interval-valued fuzzy reasoning, this paper studies the interval-valued logical metric space. This paper presents a new distance metric of interval-valued fuzzy sets based on interval-valued biresiduals. Four famous interval-valued biresiduals are used to induce corresponding distance metrics to produce four metric spaces, and the properties of the four metric spaces are studied respectively. Furthermore, it is proved that the metric space based on interval-valued Łukasiewicz residual implication and the metric space based on interval-valued Goguen residual implication are suitable for interval-valued fuzzy reasoning. Finally, in the interval-valued Ukasiewicz residual implication metric space, it is proved that the full implication algorithm of fuzzy reasoning based on interval-valued Ukasiewicz residual implication is robust, which provides a solid theoretical basis for the application of interval-valued fuzzy reasoning algorithm.

Keywords: fuzzy sets; interval-valued fuzzy set; interval-valued fuzzy reasoning; triangular norm; residual implication; distance metric; logical metric space; full implication method

假设M是一个推理机，A和B分别是推理机M的输入和输出。在推理过程中，如果小的输入扰动引起小的输出扰动，则称推理机M具有良好的鲁棒性。不同领域的研究者对扰动的概念有不同的答案，因此，各种相关的概念相继提出，例如最大扰动、平均扰动、δ−等价、δ−灵敏度、最大δ−灵敏度、平均δ−灵敏度等。文献 [1] 给出了模糊集的最大扰动和平均扰动，并讨论几种模糊推理系统的扰动。文献 [2] 研究连接词的模糊δ−等价和模糊蕴涵算子的鲁棒性。文献 [3-4] 提出模糊连接词的δ−灵敏度、最大δ−灵敏度和平均δ−灵敏度的概念，并讨论模糊推理算法的鲁棒性。通过比较和分析这些概念，我们注意到这些概念是基于不同的距离度量的。然而，在这些距离度量研究中，距离的结构并没有涉及模糊连接词。众所周知，模糊连接词决定模糊逻辑系统的内部结构，基于这一点，文献 [5-6] 提出基于模糊连接词的模糊集相似度的概念，并讨论模糊推理算法 [7] 的鲁棒性。文献 [8] 基于模糊集双剩余给出一

收稿日期：2021−10−18.
基金项目：国家自然科学基金项目 (12171445, 61773019).
通信作者：罗敏霞.E-mail: mxluo@cjlu.eud.cn.

种距离度量，研究 4 种特殊的度量空间的结构，得到适合模糊推理的两类模糊度量空间。

然而，由于模糊集在处理信息的模糊性与不确定性方面存在局限，因此，文献 [9] 提出区间值模糊集，它不仅能减少模糊信息的损失，而且在信息处理中能有效反映信息的模糊性和不确定性。随后，许多学者关注区间值模糊集的研究，并将近似推理推广到区间值模糊环境。文献 [10] 将 CRI 算法推广到区间值模糊集；文献 [11-13] 分别研究基于区间相关联三角范数的模糊推理全蕴涵算法、全蕴涵反向算法与模糊推理五蕴涵算法，并分别研究算法的鲁棒性；文献 [14] 研究区间模糊推理反向三 I 约束算法的鲁棒性；文献 [15] 研究基于 t−可表示区间值三角范数诱导的剩余蕴涵的全蕴涵算法。这些模糊推理算法鲁棒性研究都是基于区间值模糊集的 Moore 距离。

然而，使用 Moore 距离研究区间值模糊推理算法的鲁棒性，很容易丢失信息。由于模糊推理系统的行为主要决定于模糊连接词和模糊蕴涵算子，基于此，本文引入基于区间值剩余蕴涵的一种距离度量研究区间值逻辑度量空间。主要创新点如下：

1) 基于区间值左连续三角范数诱导的剩余蕴涵算子，构造一种新函数，给出此函数做成的区间值模糊集的距离度量的充分条件；

2) 给出由 4 个著名的区间值剩余蕴涵诱导的区间值模糊集的距离，构造 4 个逻辑度量空间；

3) 从拓扑空间角度，证明基于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵的逻辑度量空间中不存在孤立点，基于区间值 Goguen 剩余蕴涵的逻辑度量空中存在一个孤立点，说明这 2 个逻辑度量空间适合做区间值模糊推理；

4) 在区间值Łukasiewicz 逻辑度量空间中，证明基于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵的模糊推理全蕴涵算法是鲁棒的。

1　预备知识

令$L=\{[a,b]|a\leqslant b,a,b\in[0,1]\}$，$L$上的序$\leqslant_L$定义为$[a,b]\leqslant_L[c,d]$，如果$a\leqslant c$且$b\leqslant d$，称之为 Kulisch-Miranker 序[16]。容易验证$\leqslant_L$的是L上的偏序，并且$(L,\leqslant_L,0^*,1^*)$做成一个完备格。设$L(X)$表示非空集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上所有区间值模糊集。设$A=\{[A_l(x_i),A_r(x_i)]\in L|x_i\in X\}\in L(X)$，则$A^c=\{[1-A_r(x_i),1-A_l(x_i)]\in L|x_i\in X\}$是区间值模糊集$A$的补集。

定义 1[17]　函数$T:[0,1]^2\to[0,1]$，如果满足交换律和结合律，且关于 2 个变量是递增，对于所有$x\in[0,1]$，$T(x,1)=x$，则T称为三角范数。

定义 2[18]　由左连续三角范数T诱导的剩余蕴涵定义为

$$\forall a,b\in[0,1],R(a,b)=\sup_{x\in[0,1]}\{x|T(a,x)\leqslant b\}。$$

定义 3[17]　设T为左连续三角范数，R为其诱导的剩余蕴涵。双剩余定义为

$$\forall a,b\in[0,1],\rho(a,b)=R(a,b)\wedge R(b,a)$$

定义 4[19]　设T是区间 [0,1] 的三角范数，$\Im:L\times L\to L$定义为

$$\Im([a,b],[c,d])=[T(a,c),T(b,d)]$$

则$\Im$称为L上相关联三角范数。如果T是左连续三角范数，则称相关联三角范数$\Im$是左连续[11]。

定义 5[20]　设$\Im$是L上的三角范数，对于任意$[a,b],[c,d]\in L$，$\Re:L\times L\to L$定义为

$$\Re([a,b],[c,d])=\sup\{[x,y]\in L|\Im([a,b],[x,y])\leq_L[c,d]\},$$

则$\Re$称为由三角范数$\Im$诱导的剩余蕴涵。

引理 1[20]　设$\Im$是L上相关联三角范数，则由相关联三角范数$\Im$诱导的剩余蕴涵为

$$\Re([a,b],[c,d])=[R_T(a,c)\wedge R_T(b,d),R_T(b,d)],$$

其中R_T是 [0,1] 上的左连续三角范数T诱导的剩余蕴涵。

例 1　4 个特殊的区间值三角范数及诱导的剩余蕴涵。

1) 区间值 Gödel 三角范数及其剩余蕴涵[20]：

$$\Im_G([a,b],[c,d])=[a\wedge c,b\wedge d],$$

$$\Re_G([a,b],[c,d])=\begin{cases}[c,d], & a>c,b>d\\ [c,1], & a>c,b\leqslant d\\ [1,1], & a\leqslant c,b\leqslant d\\ [d,d], & a\leqslant c,b>d\end{cases}$$

2) 区间值极小三角范数及其剩余蕴涵[11]：

$$\Im_0([a,b],[c,d])=\begin{cases}[a\wedge c,b\wedge d],a+c>1,b+d>1\\ [a\wedge c,0],a+c>1,b+d\leqslant 1\\ [0,0],a+c\leqslant 1,b+d\leqslant 1\\ [0,b\wedge d],a+c\leqslant 1,b+d>1\end{cases}$$

$$\Re_0([a,b],[c,d])=\begin{cases}[(a'\vee c)\wedge(b'\vee d),b'\vee d],a>c,b>d\\ [(a'\vee c)\wedge 1,1],a>c,b\leqslant d\\ [1,1],a\leqslant c,b\leqslant d\\ [1\wedge(b'\vee d),b'\vee d],a\leqslant c,b>d\end{cases}$$

其中$a'=1-a,b'=1-b$。

3) 区间值乘积三角范数及其剩余蕴涵[11]：

$$\Im_{G_0}([a,b],[c,d])=[ac,bd]$$

$$\Re_{G_0}([a,b],[c,d])=\begin{cases}\left[\dfrac{c}{a}\wedge\dfrac{d}{b},\dfrac{d}{b}\right],a>c,b>d\\ \left[\dfrac{c}{a},1\right],a>c,b\leqslant d\\ [1,1],a\leqslant c,b\leqslant d\\ \left[\dfrac{d}{b},\dfrac{d}{b}\right],a\leqslant c,b>d\end{cases}$$

4) 区间值Łukasiewicz 三角范数及其剩余蕴涵[20]：

$\Im_L([a,b],[c,d]) = [0\vee(a+c-1), 0\vee(b+d-1)]$

$$\Re_L([a,b],[c,d]) = \begin{cases} [(1-a+c)\wedge(1-b+d), 1-b+d], a>c, b>d \\ [1-a+c, 1], a>c, b\leqslant d \\ [1,1], a\leqslant c, b\leqslant d \\ [1-b+d, 1-b+d], a\leqslant c, b>d \end{cases}$$

定义 6[14]　$\wp: L\times L\to L$定义如下:

$$\wp([a,b],[c,d]) = \Re([a,b],[c,d])\wedge\Re([c,d],[a,b]),$$

其中$\Re$是L上左连续区间值三角范数诱导的剩余蕴涵, 则$\wp$称为区间值双剩余蕴涵算子。

引理 2[14]　设$\Re$是由L上的左连续相关联三角范数$\Im$诱导的剩余蕴涵, 对于任意的$[a,b],[c,d],[e,f],[g,h]\in L$, 则区间值双剩余蕴涵算子$\wp$满足以下性质:

1) $\wp([a,b],[1,1]) = [a,b]$;

2)$[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow \wp([a,b],[c,d]) = [1,1]$);

3) $\wp([a,b],[c,d]) = \wp([c,d],[a,b])$;

4) $\Im(\wp([a,b],[c,d]),\wp([e,f],[g,h])\leqslant_L\wp(\Im([a,b],[e,f]),\Im([c,d],[g,h]))$;

5) $\Im(\wp([a,b],[c,d]),\wp([e,f],[g,h])\leqslant_L\wp(\Re([a,b],[e,f]),\Re([c,d],[g,h]))$;

6) $\Im(\wp([a,b],[c,d]),\wp([c,d],[e,f])\leqslant_L\wp([a,b],[e,f])$。

定义 7[21]　设X是一个集合, 函数$D: X\times X\to[0,+\infty)$定义如下, 对于任意$x,y,z\in X$, 满足如下条件:

1) $D(x,y)\geqslant 0$;

2) $D(x,y) = 0$, 当且仅当$x = y$;

3) $D(x,y)\leqslant D(x,z)+D(y,z)$。

则函数D称为距离度量, (X,D)称为一个度量空间。

2　新的区间值模糊集的距离度量

设$\Re$是由左连续相关联三角范数诱导的剩余蕴涵:

$$\Re([a,b],[c,d]) = [R(a,c)\wedge R(b,d), R(b,d)],$$

其中R是区间 [0, 1] 上的左连续三角范数T诱导的剩余蕴涵。

命题 1　设$\alpha = [\alpha_l,\alpha_r],\beta = [\beta_l,\beta_r]\in L$, $\Re\in\{\Re_G,\Re_L,\Re_{G_0},\Re_0\}$, 则$d(\alpha,\beta) = 1-(\Re(\alpha,\beta)\wedge\Re(\beta,\alpha))_l$是$\alpha$, β的距离度量。

引理 3　对于所有的$[a,b],[c,d]\in L$, 假设$\Re_i([a,b],[c,d]) = [R_i(a,c)\wedge R_i(b,d), R_i(b,d)](i = 1,2)$分别为左连续相关联三角范数$\Im_i(i = 1,2)$诱导的剩余蕴涵, 则$\Re_1\leqslant_L\Re_2$当且仅当$R_1\leqslant R_2$。

命题 2　设$\alpha = [\alpha_l,\alpha_r],\beta = [\beta_l,\beta_r]\in L$, $\Re$是由左连续相关联三角范数所诱导的剩余蕴涵。如果$\Re\leqslant_L\Re_L$, 则$d(\alpha,\beta) = 1-\wp_l(\alpha,\beta) = 1-(\Re(\alpha,\beta)\wedge\Re(\beta,\alpha))_l$是$\alpha$、$\beta$之间的一种距离。

证明　1) 显然$d(\alpha,\beta)\geqslant 0$。

2) 如果$\alpha = \beta$, 有$d(\alpha,\beta) = 0$。

如果$d(\alpha,\beta) = 0$, 则$\wp_l(\alpha,\beta) = 1$, 即$(R(\alpha_l,\beta_l)\wedge R(\alpha_r,\beta_r))\wedge(R(\beta_l,\alpha_l)\wedge R(\beta_r,\alpha_r)) = 1$。因此, $\alpha_l = \beta_l$, $\alpha_r = \beta_r$, 即$\alpha = \beta$。

3) 由引理 2 中 6) 可得:

$$\Im(\wp(\alpha,\gamma),\wp(\gamma,\beta))\leqslant\wp(\alpha,\beta)$$

因此$T(\wp_l(\alpha,\gamma),\wp_l(\gamma,\beta))\leqslant\wp_l(\alpha,\beta)$。

所以$\wp_l(\alpha,\gamma)\leqslant R(\wp_l(\gamma,\beta),\wp_l(\alpha,\beta))$。

因为$\Re\leqslant\Re_L$, 由引理 3 可得, $R\leqslant R_L$。

因此,

$$\begin{aligned} &\wp_l(\alpha,\gamma)\leq R(\wp_l(\gamma,\beta),\wp_l(\alpha,\beta))\leqslant \\ &R_L(\wp_l(\gamma,\beta),\wp_l(\alpha,\beta)) = \\ &\min(1-\wp_l(\gamma,\beta)+\wp_l(\alpha,\beta),1)\leqslant \\ &1-\wp_l(\gamma,\beta)+\wp_l(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

由此可得$1+\wp_l(\alpha,\gamma)\leqslant 2-\wp_l(\gamma,\beta)+\wp_l(\alpha,\beta)$。因此$1-\wp_l(\alpha,\beta)\leqslant 1-\wp_l(\alpha,\gamma)+1-\wp_l(\gamma,\beta)$, 即 $d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\gamma)+d(\beta,\gamma)$ 。

定理 1　设$X = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in L(X)$, $\Re$是由左连续相关联三角范数诱导的剩余蕴涵。如果$\Re\leqslant\Re_L$, 则$d(A,B) = 1-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\wp_l(A(x_i),B(x_i))$是$L(X)$的一个距离度量, $(L(X),d)$是一个度量空间, $(L(X),d)$称为逻辑度量空间。

证明类似于命题 2。

推论 1　由定理 1 得到 4 个逻辑度量空间$(L(X),d_G)$、$(L(X),d_0)$、$(L(X),d_{G_0})$和$(L(X),d_L)$。

注 1　1) 当$\Re = \Re_L$, 则

$d_L(A,B) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(|A_l(x_i)-B_l(x_i)|\vee|A_r(x_i)-B_r(x_i)|)$是基于 Hausdorff 度量的规范化 Hamming 距离[22]。

2) 如果区间值模糊集A和B退化为模糊集, 区间值剩余蕴涵$\Re$退化为剩余蕴涵R, $R\leqslant R_L$, 即$a+R(a,b)\leqslant 1+b$, 则$d(A,B) = 1-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[R(A(x_i),B(x_i))\wedge R(B(x_i),A(x_i)]$是模糊集的距离度量[7]。

例 2　设 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}A,B,C\in L(X)$, $A(x_i) = [0.9,1.0](1\leqslant i\leqslant 10)$, $B(x_i) = [0.9,1.0](1\leqslant i\leqslant 9)$, $B(x_{10}) = [0.0,0.1]$, $C(x_i) = [0.0,0.1](1\leqslant i\leqslant 10)$ 。我们利用推论 2 得到的 4 种距离, 分别计算模糊集(A,B)、(A,C)之间的距离, 如表 1 所示。

表 1　区间值模糊集的距离比较

Table 1　Distance comparison between interval-valued fuzzy sets

	d_G	d_0	d_{G_0}	d_L
$d(A,B)$	0.1	0.09	0.1	0.09
$d(A,C)$	1.0	0.9	1.0	0.9

利用 Moore 距离，$d(A,B)=d(A,C)=0.9$，这个结论显然不合理，利用我们提出的距离，得到区间值模糊集的距离是合理的，与实际的数据信息相吻合的。

3 4 个逻辑度量空间的结构

在度量空间(Y,d)中，设$y\in Y$。对于任意的$0<\varepsilon<1$，如果总能找到另一个点$y'\in Y$，使得$d(y,y')<\varepsilon$，则y称为Y的一个聚点。如果存在$\delta>0$，使得对于每个$y'\in Y$，$d(y,y')\geqslant\delta$，则y称为孤立点[23]。 在本节中，分别研究这 4 个逻辑度量空间$(L(X),d_G)$、$(L(X),d_0)$、$(L(X),d_{G_0})$和$(L(X),d_L)$中聚点和孤立点的分布情况。本节中假设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A\in L(X)$。如果存在$x_k\in X$，使得$A(x_k)=[1,1]$，则称A为正规区间值模糊集。

定义 8[23] 设X是一个拓扑空间，$U\neq\varnothing$、$V\neq\varnothing$是 2 个开集且$U\cap V=\emptyset$，如果$X=U\cup V$，则拓扑空间X称为非连通的。否则，拓扑空间X称为连通的。

定义 9[23] 设S是拓扑空间X一个子集，如果X中的每个点或者属于S，或者是S的聚点，即S的闭包等于拓扑空间X，则称S是一个稠密子集。

引理 4 设$\alpha=[\alpha_l,\alpha_r]$，$\beta=[\beta_l,\beta_r]\in L$，且$\alpha\neq\beta$，则

$$(\mathfrak{R}_G(\alpha,\beta)\wedge\mathfrak{R}_G(\beta,\alpha))_l=\begin{cases}\alpha_l\wedge\beta_l,\ \alpha_l\neq\beta_l\\ \alpha_r\wedge\beta_r,\ \alpha_l=\beta_l\end{cases}$$

定理 2 A为逻辑度量空间$(L(X),d_G)$的聚点当且仅当A为正规区间值模糊集。

证明 设A为正规区间值模糊集，则存在$x_k\in X$使得$A(x_k)=[1,1]$。对于任意的$\varepsilon\in(0,1)$，取$B\in L(X)$，使得$B(x_k)=[1-\varepsilon_1,1-\varepsilon_2]$，$\varepsilon_2<\varepsilon_1<\varepsilon$，$B(x_j)=A(x_j)(j\neq k)$。显然$B\neq A$且

$$d_G(A,B)=$$
$$1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{R}_G(A(x_i),B(x_i))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_i),A(x_i)))_l=$$
$$1-\frac{1}{n}(\mathfrak{R}_G(A(x_k),B(x_k))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_k),A(x_k)))_l+$$
$$\sum_{i=1(i\neq k)}^{n}(\mathfrak{R}_G(A(x_i),B(x_i))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_i),A(x_i)))_l=$$
$$1-\frac{1}{n}(1-\varepsilon_1+(n-1))\ =\frac{\varepsilon_1}{n}<\varepsilon(\text{由引理4})$$

因此，在A的任意ε邻域内，始终存在一个不同于A的区间值模糊集B。因此，A是度量空间$(L(X),d_G)$中的聚点。

如果A不是正规的，则对于所有的$x_i\in X$，$A(x_i)\neq[1,1]$，任意$B\in L(X)$，使的$B\neq A$。假设：

$$C=\{(\mathfrak{R}_G(A(x_i),B(x_i))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_i),A(x_i)))_l\ |A_l(x_i)\neq B_l(x_i),i=1,2,\cdots,s\}=\{A_l(x_i)\wedge B_l(x_i)|A_l(x_i)\neq B_l(x_i),i=1,2,\cdots,s\}(\text{由引理4})$$

$$D=\{(\mathfrak{R}_G(A(x_i),B(x_i))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_i),A(x_i)))_l\ |A_l(x_i)=B_l(x_i),A_r(x_i)\neq B_r(x_i),\ i=s+1,s+2,\cdots,t\}=\{A_r(x_i)\wedge B_r(x_i)|A_l(x_i)=B_l(x_i),i=s+1,s+2,\cdots,t\}(\text{由引理4})$$

$$E=\{(\mathfrak{R}_G(A(x_i),B(x_i))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_i),A(x_i)))_l\ |A_l(x_i)=B_l(x_i),A_r(x_i)=B_r(x_i),\ i=t+1,t+2,\cdots,n\}=\{1|A_l(x_i)=B_l(x_i),A_r(x_i)=B_r(x_i),i=t+1,t+2,\cdots,n\}(\text{由引理2})$$

设$c=\max\{z|z\in C\}$，$d=\max\{z|z\in D\}$，$a=\max\{c,d\}$。则有

$$d_G(A,B)=$$
$$1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{R}_G(A(x_i),B(x_i))\wedge\mathfrak{R}_G(B(x_i),A(x_i)))_l=$$
$$1-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{s}(A_l(x_i)\wedge B_l(x_i))+\sum_{i=s+1}^{t}(A_r(x_i)\wedge B_r(x_i))+(n-t)\right)\geqslant$$
$$1-\frac{1}{n}(sc+(t-s)d+(n-t))>1-\frac{1}{n}(ta+n-t)=\frac{t(1-a)}{n}=\delta>0$$

因此，存在$\delta>0$，使得在A的δ邻域中不存在与A不同的区间值模糊集，即A是度量空间$(L(X),d_G)$的一个孤立点。

推论 1 设$V=L(X)-U$，其中$U=\{A\in L(X)|\exists x_i\in X,A(x_i)=[1,1]\}$。那么$V$是逻辑度量空间$(L(X),d_G)$的稠密子集，即所有孤立点的集合是逻辑度量空间$(L(X),d_G)$的一个稠密集子集。

推论 2 逻辑度量空间$(L(X),d_G)$是一个不连通空间。

引理 5 设$\alpha=[\alpha_l,\alpha_r],\beta=[\beta_l,\beta_r]\in L$，且$\alpha\neq\beta$，则

$$(\mathfrak{R}_0([\alpha_l,\alpha_r],[\beta_l,\beta_r])\wedge\mathfrak{R}_0([\beta_l,\beta_r],[\alpha_l,\alpha_r]))_l=\begin{cases}\min\{\ (1-\max(\alpha_l,\beta_l))\vee\min(\alpha_l,\beta_l),\\ (1-\max(\alpha_r,\beta_r))\vee\min(\alpha_r,\beta_r)\},\alpha_l\neq\beta_l,\alpha_r\neq\beta_r\\ (1-\max(\alpha_l,\beta_l))\vee\min(\alpha_l,\beta_l),\alpha_l\neq\beta_l,\ \alpha_r=\beta_r\\ (1-\max(\alpha_r,\beta_r))\vee\min(\alpha_r,\beta_r),\alpha_l=\beta_l,\alpha_r\neq\beta_r\end{cases}$$

定理 3 A是度量空间$(L(X),d_0)$的聚点当且仅当A或A^c是X上正规区间值模糊集。

证明类似于定理 2。

推论 3 设$U=\{A\in L(X)|\exists x_i\in X,A(x_i)=[1,1]$或$A(x_i)=[0,0]\}$，并且有$V=L(X)-U$，则$V$是逻辑度量空间$(L(X),d_0)$的一个稠密子集，即所有孤立点的集合是逻辑度量空间$(L(X),d_0)$的一个稠密子集。

推论 4 逻辑度量空间$(L(X),d_0)$是一个不连通空间。

引理 6 设$\alpha=[\alpha_l,\alpha_r],\beta=[\beta_l,\beta_r]\in L$，且$\alpha\neq\beta$，则

$$(\mathfrak{R}_{G_0}(\alpha\beta)\wedge\mathfrak{R}_{G_0}(\beta\alpha))_l=\min\left(\frac{\min(\alpha_l,\beta_l)}{\max(\alpha_l,\beta_l)},\frac{\min(\alpha_r,\beta_r)}{\max(\alpha_r,\beta_r)}\right)$$

定理 4 $A=\{A(x_i)=[0,0](1\leqslant i\leqslant n)|x_i\in X\}$是度

量空间$(L(X),d_{G_0})$的唯一孤立点。

推论 5　设$V=L(X)-U$, 其中$U=\{A\in L(X)|\forall x_i\in X, A(x_i)=[0,0]\}$, 则$V$是逻辑度量空间$(L(X),d_{G_0})$的一个稠密子集, 即所有聚点的集合是逻辑度量空间$(L(X),d_{G_0})$的一个稠密子集。

推论 6　逻辑度量空间$(L(X),d_{G_0})$是一个不连通空间。

引理 7　设$\alpha=[\alpha_l,\alpha_r],\beta=[\beta_l,\beta_r]\in L$, 且$\alpha\neq\beta$, 则

$$(\Re_L(\alpha\beta)\wedge\Re_L(\beta\alpha))_l=(1-|\alpha_l-\beta_l|)\wedge(1-|\alpha_r-\beta_r|)$$

定理 5　量逻辑度空间$(L(X),d_L)$不存在孤立点。即逻辑度量空间$(L(X),d_L)$是一个连通空间。

综上对 4 个逻辑度量空间的研究, 逻辑度量空间$(L(X),d_G)$和$(L(X),d_0)$中存在过多的孤立点; 而$(L(X),d_{G_0})$中只有一个孤立点, 除了这个点, $(L(X),d_{G_0})$中的其他点都是聚点; $(L(X),d_L)$中没有孤立点。

4　区间值模糊推理全蕴涵算法的鲁棒性

为了讨论区间值模糊推理算法的鲁棒性, 我们希望度量空间$(L(X),d)$没有太多的孤立点。因此, 逻辑度量空间$(L(X),d_L)$和$(L(X),d_{G_0})$更适合做区间值模糊推理。推理算法输入微小的改变, 引起输出微小的改变, 则称算法是鲁棒的。推理算法的鲁棒性是评价推理算法的一个重要指标。在本节中, 在适合做区间值模糊推理的逻辑度量空间$(L(X),d_L)$中, 研究基于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵的区间值模糊推理全蕴涵算法的鲁棒性。基于区间值 Goguen 蕴涵区间值模糊推理全蕴涵算法的鲁棒性研究是类似的。

命题 3　设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, A,A',B和$B'\in(L(X),d_L)$。如果$d_L(A,A')\leqslant\varepsilon_1$, $d_L(B,B')\leqslant\varepsilon_2$, 则$d_L(\Im_L(A,B),\Im_L(A',B'))\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2$。

命题 4　设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,A',B,B'\in(L(X),d_L)$。如果$d_L(A,A')\leqslant\varepsilon_1$, $d_L(B,B')\leqslant\varepsilon_2$, 则$d_L(\Re_L(A,B),\Re_L(A',B'))\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2$。

定理 6[11]　设$\Re$是一个区间值剩余蕴涵。1) 模糊假言推理 (fuzzy modus ponens, FMP) 问题的区间值$\Re$−型全蕴涵推理算法解B^*为

$$B^*(y)=\sup_{x\in X}\Im(\Re(A(x),B(y)),A^*(x)),y\in Y$$

2) 模糊反驳推理 (fuzzy modus tollens, FMT) 问题的区间值$\Re$−型全蕴涵推理算法解A^*为

$$A^*(x)=\inf_{y\in Y}\Re(\Re(A(x),B(y)),B^*(y)),x\in X$$

定理 7　设B^*和B'^*分别是FMP(A,B,A^*)和FMP(A',B',A'^*)的区间值$\Re$−型全蕴涵推理算法解(见定理 6 中 1))。设$d(A,A')\leqslant\varepsilon_1$, $d(B,B')\leqslant\varepsilon_2$, $d(A^*,A'^*)\leqslant\varepsilon_3$, 则$d(B^*,B'^*)\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$。

证明　对于区间值Łukasiewicz 剩余蕴涵和对应的三角范数。由命题 3 及 4 可得, $d_L(\Re_L(A,B),\Re_L(A',B'))\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2$。

$$d_L(\Im_L(\Re_L(A,B),A^*),\Im_L(\Re_L(A',B'),A'^*)\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3。$$

因此, $d_L(B^*,B'^*)\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$。

定理 8　设A^*和A'^*分别是FMT(A,B,B^*)和FMT(A',B',B'^*)的区间值$\Re$−型全蕴涵推理算法解(见定理 6 中 2))。设$d(A,A')\leqslant\varepsilon_1$, $d(B,B')\leqslant\varepsilon_2$, $d(B^*,B'^*)\leqslant\varepsilon_3$, 则$d(A^*,A'^*)\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$。

证明类似于定理 7。

5　结束语

本文基于左连续区间值三角范数诱导的剩余蕴涵, 提出一种新的区间值模糊集的距离度量。基于 4 个常用的区间值剩余蕴涵, 构造 4 个特殊的逻辑度量空间。证明得到: 逻辑度量空间$(L(X),d_G)$和$(L(X),d_0)$存在过多孤立点, 不适合做区间值模糊推理; 逻辑度量空间$(L(X),d_{G_0})$存在一个孤立点, 逻辑度量空间$(L(X),d_L)$没有孤立点, 因此, 逻辑度量空间$(L(X),d_{G_0})$和$(L(X),d_L)$适合做区间值模糊推理。进一步, 在逻辑度量空间$(L(X),d_L)$中, 证明基于区间值Łukasiewicz 蕴涵的区间值模糊推理全蕴涵算法是鲁棒的, 为区间值模糊推理算法的应用提供坚实的理论基础。

由于区间值模糊集可以处理具有模糊性与不确定性的信息, 区间值模糊推理算法能够很好处理具有这类复杂信息的推理问题。在未来研究中, 我们将把具有理论支撑的区间值模糊推理全蕴涵算法应用于模式识别与医疗诊断等领域。

参考文献:

[1]　YING Mingsheng. Perturbation of fuzzy reasoning[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 1999, 7(5): 625–629.

[2]　CAI Kaiyuan. Robustness of fuzzy reasoning and δ-equalities of fuzzy sets[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2001, 9(5): 738–750.

[3]　李永明. 模糊系统分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[4]　LI Yongming, LI Dechao, PEDRYCZ W, et al. An approach to measure the robustness of fuzzy reasoning[J]. International journal of intelligent systems, 2005, 20(4): 393–413.

[5]　DAI Songsong, PEI Daowu, GUO Donghui. Robustness analysis of full implication inference method[J]. International journal of approximate reasoning, 2013, 54(5): 653–666.

[6] 金检华, 李永明, 李春泉. 模糊推理系统的鲁棒性 [J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(5): 80–91.
JIN Jianhua, LI Yongming, LI Chunquan. Robustness of fuzzy reasoning[J]. Fuzzy systems and mathematics, 2008, 22(5): 80–91.

[7] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法 [J]. 中国科学 (E辑), 1999(1): 43–53.
WANG Guojun. Fuzzy reasoning full implication triple I method[J]. Science in China (series E), 1999(1): 43–53.

[8] 王国俊, 段景瑶. 适宜于展开模糊推理的两类模糊度量空间 [J]. 中国科学:信息科学, 2014, 44(5): 623–632.
WANG Guojun, DUAN Jingyao. Two types of fuzzy metric spaces suitable for fuzzy reasoning[J]. Scientia sinica:information science, 2014, 44(5): 623–632.

[9] ZADEH L A. Theory of approximate reasoning[J]. Machine intelligence, 1970: 149-194.

[10] LI Dechao, LI Yongming, XIE Yongjian. Robustness of interval-valued fuzzy inference[J]. Information sciences, 2011, 181(20): 4754–4764.

[11] LUO Minxia, ZHANG Kai. Robustness of full implication algorithms based on interval-valued fuzzy inference [J]. International journal of approximate reasoning, 2015, 62: 61–72.

[12] LUO Minxia, ZHOU Xiaoling. Robustness of reverse triple I algorithms based on interval-valued fuzzy inference[J]. International journal of approximate reasoning, 2015, 66: 16–26.

[13] LUO Minxia, ZHOU Xiaoling. Interval-valued quintuple implication principle of fuzzy reasoning[J]. International journal of approximate reasoning, 2017, 84: 23–32.

[14] 王蓉, 惠小静, 井美. 区间值模糊推理反向三 I 约束算法的鲁棒性 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(1): 84–91.
WANG Rong, HUI Xiaojing, JING Mei. The robustness of reverse triple Ⅰ restriction methods based on interval-valued fuzzy reasoning[J]. Fuzzy systems and mathematics, 2019, 33(1): 84–91.

[15] LUO Minxia, WANG Yajing. Interval-valued fuzzy reasoning full implication algorithms based on the *t*-representable *t*-norm[J]. International journal of approximate reasoning, 2020, 122: 1–8.

[16] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order[M]. New York: Cambridge University Press, 1990

[17] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular norms [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

[18] HÁJEK P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Dordrecht: Kluwer, 1998.

[19] JENEI S. A more efficient method for defining fuzzy connectives[J]. Fuzzy sets and systems, 1997, 90(1): 25–35.

[20] ALCALDE C, BURUSCO A, FUENTES-GONZÁLEZ R. A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implication operators[J]. Fuzzy sets and systems, 2005, 153(2): 211–227.

[21] CHOUDHARY B. The elements of complex analysis[M]. New Delhi: New Age International Ltd, 1992.

[22] ZHANG Hongying, ZHANG Wenxiu, MEI Changlin. Entropy of interval-valued fuzzy sets based on distance and its relationship with similarity measure[J]. Knowledge-based systems, 2009, 22(6): 449–454.

[23] MUNKRES J R. Topology[M]. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000

作者简介：

罗敏霞，教授，博士，中国人工智能学会人工智能基础专业委员会常务委员，中国逻辑学会非经典逻辑与计算专委会委员，国际信息研究学会中国分会泛逻辑与智能信息处理专业委员会副主任，国际信息研究学会中国分会人工智能专业委员会专家委员。主要研究方向为非经典逻辑、近似推理与图像处理；发表学术论文 130 余篇，出版专著 2 部，教材 1 部。

徐东辉，助教，主要研究方向为区间值模糊推理。