智能系统学报
CAAI TRANSACTIONS ON INTELLIGENT SYSTEMS

双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集模型及其应用

梁美社, 米据生, 张少谱

引用本文:
梁美社,米据生,张少谱. 双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集模型及其应用[J]. 智能系统学报, 2022, 17(3): 585–592.
LIANG Meishe,MI Jusheng,ZHANG Shaopu. Generalized intuitionistic fuzzy probabilistic rough set models on two universes and their applications[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2022, 17(3): 585–592.

在线阅读 View online: https://dx.doi.org/10.11992/tis.202106025

DOI: 10.11992/tis.202106025
网络出版地址: https://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20220324.1548.006.html

双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集模型及其应用

梁美社[1], 米据生[2], 张少谱[1]
(1. 石家庄铁道大学 数理系, 河北 石家庄 050043; 2. 河北师范大学 数学科学学院, 河北 石家庄 050024)

摘 要: 已有的双论域直觉模糊概率粗糙集模型通过设置两个阈值λ_1、λ_2, 讨论了经典集合在直觉模糊二元关系下的概率粗糙下上近似。该模型不能计算直觉模糊集合在直觉模糊二元关系下的概率粗糙下上近似, 这在一定程度上限制了该模型的应用。首先给出了直觉模糊条件概率的定义。在直觉模糊概率空间下构造了双论域广义直觉模糊概率粗糙集模型, 讨论了模型的主要性质。最后, 将模型应用到临床诊断系统中。与其他模型相比, 所提出的广义直觉模糊概率粗糙集模型进一步丰富了概率粗糙集理论, 更适合于实际应用。

关键词: 双论域; 粗糙集; 直觉模糊关系; 概率粗糙集; 直觉模糊集; 直觉模糊概率近似空间; 下近似; 上近似
中图分类号: TP391 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673−4785(2022)03−0585−08

中文引用格式: 梁美社, 米据生, 张少谱. 双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集模型及其应用 [J]. 智能系统学报, 2022, 17(3): 585–592.
英文引用格式: LIANG Meishe, MI Jusheng, ZHANG Shaopu. Generalized intuitionistic fuzzy probabilistic rough set models on two universes and their applications[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2022, 17(3): 585–592.

Generalized intuitionistic fuzzy probabilistic rough set models on two universes and their applications

LIANG Meishe[1], MI Jusheng[2], ZHANG Shaopu[1]
(1. Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China; 2. School of Mathematics Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China)

Abstract: In the existing intuitionistic fuzzy (IF) probabilistic rough set model of two universes, the probabilistic rough lower and upper approximations of a classical set under IF binary relation are discussed by setting two thresholds, λ_1 and λ_2. However, this model is unable to calculate the probabilistic rough lower and upper approximations of IF sets under IF binary relation, which limits the application of this model to a certain extent. In this study, we first define the IF conditional probability. Then, the generalized IF probability rough set models are constructed in IF probabilistic approximation space. In addition, the main properties of the model are discussed. Finally, the numerical examples of clinical diagnostic systems are applied to illustrate the validity of the proposed models. Compared with other models, the proposed generalized IF probabilistic rough set models further enrich the probabilistic rough set theory and are more suitable for practical applications.

Keywords: two universes; rough set; intuitionistic fuzzy relations; probabilistic rough set; intuitionistic fuzzy sets; intuitionistic fuzzy probabilistic approximation spaces; lower approximation; upper approximation

粗糙集最早是由 Pawlak[1] 于 1982 年提出的。经典的粗糙集模型是建立在等价关系之上, 由于等价关系的要求过于严苛, 为了适应各类复杂数据环境, 许多学者提出了包括优势关系[2]、容差关系[3]、模糊关系[4]、邻域关系[5] 等扩展的粗糙集模型。考虑集合之间的重叠关系, 许多研究者给出了该理论的概率推广[6-8]。概率粗糙集模型是其中一种重要的推广[9-11]。该模型中的概率近似算子是根据条件概率和阈值(能承受不确定性或分类错

收稿日期: 2021−06−16. **网络出版日期**: 2022−03−28.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (62076088); 河北省自然科学基金项目 (A2020208004).
通信作者: 梁美社. E-mail: liangmeishe@163.com.

误的程度）来确定的。当前，概率粗糙集模型大致分为三类：决策理论粗糙集模型、变精度粗糙集模型和贝叶斯粗糙集模型。Yao 在文献 [12] 中，基于粗糙隶属度和粗糙包含度，重新讨论了概率粗糙集近似算子，给出了 3 个模型的统一框架。近年来，概率粗糙集模型在应用方面取得了很大进展[13-15]，Sun 等[16] 基于概率粗糙集的三支决策原理，提出了一种改进的 Pawlak 冲突分析模型。与原有的 Pawlak 冲突分析模型相比，所提出的模型不仅为处理冲突分析问题提供了新的视角和方法，而且克服了原有模型的局限性。基于模糊熵，Ma[17] 给出了三支概率粗糙集模型中两种属性约简方法。Yang 等[18] 提出了基于模糊关系的概率粗糙集模型，并将其用于医疗诊断系统中。尽管该模型中采用了模糊关系，但真正起作用的是模糊关系的截关系。这意味着它仍然是基于经典二元关系的概率粗糙集模型。

概率理论中的事件一般指样本空间中的精确指定的元素集合[19]。然而日常生活中，人们也常常遇到模糊的、不清晰的事件[20]。这就需要讨论模糊概率近似空间框架下，模糊事件的概率粗糙近似问题。文献 [21] 提出了 4 种模糊概率近似算子，然后应用贝叶斯决策理论，研究了模糊事件的三支决策问题，指出了决策理论粗糙集与模糊概率粗糙集的关系。作为模糊集理论的重要推广，直觉模糊集理论是 Atanassov[22-23] 于 1986 年提出的。由于该理论在考虑隶属度的同时，增加了元素对集合的非隶属度和犹豫度等信息，因此比模糊集在表达模糊性上更加细腻，在处理不确定性问题方面更具灵活性和实用性。郭智莲等[24] 提出了基于直觉模糊关系的概率粗糙集模型。与文献 [18] 类似，利用阈值将直觉模糊关系转化成经典二元关系，它依然是基于经典二元关系的概率粗糙集模型。当前，在直觉模糊概率近似空间框架下，很少文献对直觉模糊事件进行概率粗糙近似研究。因此，有必要将概率粗糙集模型进一步推广到直觉模糊概率近似空间，进而拓展模型的应用。

在现有文献的基础上，本文首先定义了直觉模糊条件概率。在直觉模糊概率空间下构造了双论域广义直觉模糊概率粗糙集模型，讨论了模型的主要性质。最后，将模型应用到临床诊断系统中。

1 预备知识

1.1 直觉模糊集

定义 1[22-23] 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是非空有限论域，称 $A=\{\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in U\}$ 为 U 上的直觉模糊集合，其中 $\mu_A:U\to[0,1]$，$\nu_A:U\to[0,1]$ 分别为 U 中元素 a 关于 A 的隶属度和非隶属度，且对于任意 $x\in U$ 都满足 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant1$。称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 为 x 关于 A 的犹豫度或不确定度。如果对于任意 $x\in U$ 都有 $\pi_A(x)=0$，则直觉模糊集合退化成模糊集合。U 上全体直觉模糊集记为 $\mathrm{IFS}(U)$。

定义 2[22-23] 对于任意 $A,B\in\mathrm{IFS}(U)$，有：

1) $A\subseteq B\Longleftrightarrow\forall x\in U,\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$；

2) $A=B\Longleftrightarrow\forall x\in U,\mu_A(x)=\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)=\nu_B(x)$；

3) $\sim A=\{\langle\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle|x\in U\}$；

4) $A\cap B\Longleftrightarrow\{\langle\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$；

5) $A\cup B\Longleftrightarrow\{\langle\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$；

6) $A\oplus B=\{\langle\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x),\nu_A(x)\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$；

7) $A\otimes B=\{\langle\mu_A(x)\mu_B(x),\nu_A(x)+\nu_B(x)-\nu_A(x)\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$。

设 U、V 是两个非空有限论域，称 $\mathrm{IR}:U\times V\to[0,1]\times[0,1]$ 是 U 到 V 上的直觉模糊二元关系。对于任意 $x\in U$，$\mathrm{IR}(x)=\{\langle\mu_{\mathrm{IR}}(x,y_1),\nu_{\mathrm{IR}}(x,y_1)\rangle,\langle\mu_{\mathrm{IR}}(x,y_2),\nu_{\mathrm{IR}}(x,y_2)\rangle,\cdots,\langle\mu_{\mathrm{IR}}(x,y_m),\nu_{\mathrm{IR}}(x,y_m)\rangle|y_j\in V,j=1,2,\cdots,m\}$ 表示 V 上的直觉模糊集合。从粒的角度来看，$\mathrm{IR}(x)$ 可以看成对象 x 的一个直觉模糊粒，而 $\{\mathrm{IR}(x)|x\in U\}$ 可看成 U 上的一个直觉模糊粒结构。

1.2 粗糙集与概率粗糙集

设 U 是一个非空有限论域，R 是 $U\times U$ 上的一个等价关系，则称 (U,R) 为一个近似空间。于是 R 产生了 U 上的一个划分 $U/R=\{[x_i]_R|x_i\in U\}$，$[x_i]_R$ 称为含 x_i 的等价类。$\forall X\subseteq U$，X 关于 R 的下近似和上近似分别定义为 $\underline{R}(X)=\{x\in U|[x]_R\subseteq X\}$，$\overline{R}(X)=\{x\in U|[x]_R\cap X\neq\varnothing\}$。称序对 $\left(\underline{R}(X),\overline{R}(X)\right)$ 为 X 关于等价关系 R 的粗糙集[1]。

设 U 是一个非空有限论域，R 是 $U\times U$ 上的一个等价关系，P 是定义在由 U 的子集构成的 σ 代数上的概率测度，则称 (U,R,P) 为一个概率近似空间。$\forall X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$，$X$ 关于近似空间 (U,R,P) 及阈值 α、β 的概率粗糙下近似和上近似分别定义为

$$\underline{R}_\alpha(Y)=\{x\in U|P(X|[x]_R)\geqslant\alpha\}$$

$$\overline{R}_\beta(X)=\{x\in U|P(X|[x]_R)>\beta\}$$

其中 $P(X|[x]_R)$ 表示 $[x]_R$ 中元素属于 X 的概率。称序对 $\left(\underline{R}_\alpha(X),\overline{R}_\beta(X)\right)$ 为 X 关于 (U,R,P) 及阈值 α、β 的概率粗糙集[8]。

2 双论域上的模糊概率粗糙集与直觉模糊概率粗糙集

定义 3[18] 设 U、V 是两个非空有限论域，称 $R:U\times V\to[0,1]$ 是 U 到 V 上的模糊二元关系。$\forall\lambda\in[0,1]$，

称R_λ为R的λ截关系, 即$R_\lambda = \{(x,y)\in U\times V|R(x,y)\geqslant\lambda\}$。$\forall x\in U$, 令$R_\lambda(x)=\{y\in V|R(x,y)\geqslant\lambda\}$。

定义 4[18]　设U、V是两个非空有限论域, R 是 U 到 V 上的模糊二元关系。P 是定义在由 V 的子集构成的σ代数上的概率测度。称(U,V,R,P)为 U 到 V 上的模糊概率近似空间。$\forall\lambda\in[0,1]$, $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$, $Y\subseteq V$, 则Y关于(U,V,R,P)及阈值λ、α、β的下、上近似分别为

$$\underline{R}_{(\lambda,\alpha)}(Y)=\{x\in U|P(Y|R_\lambda(x))\geqslant\alpha,\ R_\lambda(x)\neq\varnothing\}$$

$$\overline{R}_{(\lambda,\beta)}(Y)=\{x\in U|P(Y|R_\lambda(x))>\beta, R_\lambda(x)\neq\varnothing\}\cup\{x\in U|R_\lambda(x)=\varnothing\}$$

称序对$\left(\underline{R}_{(\lambda,\alpha)}(Y),\overline{R}_{(\lambda,\beta)}(Y)\right)$为$Y$关于$(U,V,R,P)$及阈值$\lambda$、$\alpha$、$\beta$的模糊概率粗糙集。

根据上下近似, 很容易计算Y关于(U,V,R,P)及阈值λ、α、β的模糊概率正域、负域以及边界域, 即

$$\mathrm{POS}_{R_{(\lambda,\alpha)}}(Y)=\underline{R}_{(\lambda,\alpha)}(Y)=\{x\in U|P(Y|R_\lambda(x))\geqslant\alpha,R_\lambda(x)\neq\varnothing\}$$

$$\mathrm{NEG}_{R_{(\lambda,\beta)}}(Y)=U-\overline{R}_{(\lambda,\beta)}(Y)=\{x\in U|P(Y|R_\lambda(x))\leqslant\beta,R_\lambda(x)\neq\varnothing\}$$

$$\mathrm{BN}_{R_{(\lambda,\alpha,\beta)}}(Y)=\overline{R}_{(\lambda,\alpha)}(Y)-\underline{R}_{(\lambda,\alpha)}(Y)=\{x\in U|\beta<P(Y|R_\lambda(x))<\alpha,R_\lambda(x)\neq\varnothing\}\cup\{x\in U|R_\lambda(x)=\varnothing\}$$

若$\underline{R}_{(\lambda,\alpha)}(Y)=\overline{R}_{(\lambda,\beta)}(Y)$, 则称$Y$是关于$(U,V,R,P)$及阈值$\lambda$、$\alpha$、$\beta$的可定义集。否则, Y是关于(U,V,R,P)及阈值λ、α、β的不可定义集。

如果$P(Y|R_\lambda(x))=|Y\cap R_\lambda(x)|/|R_\lambda(x)|$, 其中$|R_\lambda(x)|$表示集合的$R_\lambda(x)$基数, R 是U到V上的经典等价二元关系, 令$\alpha=1$, $\beta=0$, 则定义 4 中模糊概率粗糙集将退化为经典粗糙集。

定义 5[24]　设U、V是两个非空有限论域, 称 IR 是U到V上的直觉模糊二元关系。$\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$, 称$\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$为IR关于$(\lambda_1,\lambda_2)$的截关系, 即$\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}=\{(x,y)\in U\times V|\mu_{\mathrm{IR}}(x,y)\geqslant\lambda_1,\nu_{\mathrm{IR}}(x,y)\leqslant\lambda_2\}$。$\forall x\in U$, $\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)$为对象$x$的截关系类, 其中 $\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)=\{y\in V|\mu_{\mathrm{IR}}(x,y)\geqslant\lambda_1,\nu_{\mathrm{IR}}(x,y)\leqslant\lambda_2\}$。

定义 6[24]　设U、V是两个非空有限论域, 称 IR 是U到V上的直觉模糊二元关系。P是定义在由V的子集构成的σ代数上的概率测度。称(U,V,IR,P)为U到V上的直觉模糊概率近似空间。$\forall\lambda_1$, $\lambda_2\in[0,1]$, $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$, $Y\subseteq V$, 则Y关于(U,V,IR,P)及阈值λ_1、λ_2、α、β的下、上近似分别为

$$\underline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)}(Y)=\{x\in U|P(Y|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x))\geqslant\alpha,\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\neq\varnothing\}$$

$$\overline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\beta)}(Y)=\{x\in U|P(Y|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x))>\beta,\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\neq\varnothing\}\cup\{x\in U|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)=\varnothing\}$$

称序对$\left(\underline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)}(Y),\overline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\beta)}(Y)\right)$为$Y$关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$及阈值$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\alpha$、$\beta$的直觉模糊概率粗糙集。

根据上、下近似, 很容易计算Y关于(U,V,IR,P)及阈值λ_1、λ_2、α、β的直觉模糊概率正域、负域、以及边界域, 即

$$\mathrm{POS}_{\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)}}(Y)=\underline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)}(Y)=\{x\in U|P(Y|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x))\geqslant\alpha,\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\neq\varnothing\}$$

$$\mathrm{NEG}_{\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2,\beta)}}(Y)=U-\overline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\beta)}(Y)=\{x\in U|P(Y|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x))\leqslant\beta,\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\neq\varnothing\}$$

$$\mathrm{BN}_{\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha,\beta)}}(Y)=\overline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\beta)}(Y)-\underline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)}(Y)=\left\{x\in U\middle|\beta<P\left(Y\middle|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right)<\alpha,\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\neq\varnothing\right\}\cup\{x\in U|\mathrm{IR}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)=\varnothing\}$$

若 $\underline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)}(Y)=\overline{\mathrm{IR}}_{(\lambda_1,\lambda_2,\beta)}(Y)$, 则称$Y$是关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$及阈值$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\alpha$、$\beta$的可定义集。否则, Y是关于(U,V,IR,P)及阈值λ_1、λ_2、α、β的不可定义集。

虽然上述直觉模糊概率粗糙集采用了直觉模糊关系, 但真正起作用的是直觉模糊关系的(λ_1,λ_2)截关系, 即将直觉模糊关系转化成经典二元关系后的经典概率粗糙集模型。若$Y\in\mathrm{IFS}(V)$为V上的直觉模糊集合, 条件概率公式$P(Y|IR_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x))$将无法计算, 直觉模糊集合$Y$的概率粗糙下、上近似也将无法计算。其次, 令$V=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, $\mathrm{IR}\in\mathrm{IFS}(V)$, 其中$\mathrm{IR}=\{\langle 0.7,0.21\rangle,\langle 0.8,0.1\rangle,\langle 0.69,0.2\rangle,\langle 0.71,0.21\rangle\}$。若取$(\lambda_1,\lambda_2)=(0.7,0.2)$, 则根据定义 5 有$\mathrm{IR}_{(0.7,0.2)}=\{y_2\}$。若取$(\lambda_1,\lambda_2)=(0.7,0.21)$, 则$\mathrm{IR}_{(0.7,0.21)}=\{y_1,y_2,y_4\}$。隶属度和非隶属的极小改变, 会导致截关系的结果出现很大差异, 即直觉模糊关系的(λ_1,λ_2)截关系不具有鲁棒性。文献 [24] 中指出, 同一疾病的不同症状表现强度是不同的, 因此选取一组(λ_1,λ_2)参数所得的结果也不近合理。

为了解决这一问题, 下面我们给出一种新的双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集模型。

3 双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集

一个直觉模糊集合可以看作一个直觉模糊事件, 根据文献 [25] 可以定义直觉模糊事件的概率。

定义 7[25]　设U是非空有限论域, P是定义在由U的子集构成的σ代数上的概率测度。对于任意直觉模糊集(直觉模糊事件)$A\in\mathrm{IFS}(U)$, A的直觉模糊概率$P^*(A)$定义如下:

$$P^*(A)=\sum_{x\in U}\left((1-\nu_A(x))^2-(1-\mu_A(x)-\nu_A(x))^2\right)P(x)$$

显然$0\leqslant P^*(A)\leqslant 1$, 且对于任意$A,B\in\mathrm{IFS}(U)$, 若$A\subseteq B$, 则$P^*(A)\leqslant P^*(B)$。若$\forall x\in U$, $P(x)=1/|U|$, 当A是一个经典集合时, 则$P^*(A)=P(A)=|A|/|U|$。

例 1　设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, 若对于任意$x\in U$, $P(x)=1/|U|$。A是U上的直觉模糊集合且$A=\{\langle 0.7,0.1\rangle,\langle 0.2,0.6\rangle,\langle 0.7,0.0\rangle,\langle 0.1,0.8\rangle\}$, 则根据定义 7 计算可知:

$$P^*(A)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left[(1-\nu_A(x_i))^2-(1-\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i))^2\right]$$
$$=0.46$$

如果两个直觉模糊事件 A、$B\in\mathrm{IFS}(U)$是相互独立的，则直觉模糊条件概率定义如定义 8。

定义 8　设U是非空有限论域，P 是定义在由U的子集构成的σ代数上的概率测度。对于任意直觉模糊集（直觉模糊事件）A、$B\in\mathrm{IFS}(U)$，若$P^*(B)\neq 0$，A关于B的直觉模糊条件概率$P^*(A|B)$定义为

$$P^*(A|B)=\frac{P^*(A\otimes B)}{P^*(B)}$$

例 2　设$A,B\in\mathrm{IFS}(U)$，其中$A=\{\langle 0.7,0.1\rangle,\langle 0.2,0.6\rangle,\langle 0.7,0.0\rangle,\langle 0.1,0.8\rangle\}$，$B=\{\langle 0.8,0.1\rangle,\langle 0.6,0.1\rangle,\langle 0.3,0.6\rangle,\langle 0.3,0.6\rangle\}$ 若$\forall x\in U$, $P(x)=1/|U|$，则

$$P^*(A|B)=\frac{P^*(A\otimes B)}{P^*(B)}=\frac{0.204}{0.458}=0.45$$

如果A和B退化成经典集合，那么上述直觉模糊条件概率则退化成经典集合的条件概率，即

$$P^*(A|B)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

性质 1　$\forall A,B,C\in\mathrm{IFS}(U)$，如果$P^*(A)\neq 0$，则：

1）$P^*(\varnothing|A)=0$, $P^*(U|A)=1$;

2）如果$B\subseteq C$，则$P^*(B|A)\leqslant P^*(C|A)$。

证明　根据定义 2、7，结论 1) 和 2) 显然成立。

定义 9　设(U,V,IR,P)为U到V上的直觉模糊概率近似空间。$A\in\mathrm{IFS}(V)$，令$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$，则$A$关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$及阈值$\alpha$、$\beta$的下、上近似分别为

$$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)=\{x\in U|P^*(A|\mathrm{IR}(x))\geqslant\alpha\}$$
$$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)=\{x\in U|P^*(A|\mathrm{IR}(x))>\beta\}$$

称序对$\left(\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A),\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)\right)$为$A$关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$的$(\alpha,\beta)$–广义直觉模糊概率粗糙集。

根据上、下近似，可以计算 A 关于(U,V,IR,P)及阈值α、β的直觉模糊概率正域、负域，以及边界域，即

$$\mathrm{POS}_{\mathrm{IR}_{\alpha}}(A)=\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)=\{x\in U|P(A|\mathrm{IR}(x))\geqslant\alpha\}$$
$$\mathrm{NEG}_{\mathrm{IR}_{\beta}}(A)=U-\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)=\{x\in U|P^*(A|\mathrm{IR}(\mathrm{x}))\leqslant\beta\}$$
$$\mathrm{BN}_{\mathrm{IR}_{(\alpha,\beta)}}(A)=\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)-\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)=$$
$$\{x\in U|\beta<P(A|\mathrm{IR}(x))<\alpha\}$$

若$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)=\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)$，则称 A 是关于(U,V,IR,P)及阈值α、β的可定义集。否则，A是关于(U,V,IR,P)及阈值α、β的不可定义集。

如果直觉模糊关系IR和直觉模糊集A分别退化成模糊关系和模糊集合，则(α,β)–广义直觉模糊概率粗糙集退化成文献 [21] 中(α,β)–模糊概率粗糙集；如果直觉模糊关系IR和直觉模糊集A分别退化成经典等价关系和经典集合，则(α,β)–广义直觉模糊概率粗糙集退化成文献 [8] 中(α,β)–概率粗糙集。

性质 2　设(U,V,IR,P)为U到V上的直觉模糊概率近似空间。对于$A,B\in\mathrm{IFS}(V)$, $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$，有下列结论成立：

1) $\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)$;

2) $\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(\varnothing)=\overline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(\varnothing)=\varnothing$，$\underline{\mathrm{IR}}_{\beta}(V)=\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(V)=U$;

3) 若$A\subseteq B$，则$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$，$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(B)$;

4）$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A\cap B)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\cap\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$，$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A\cap B)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)\cap\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(B)$;

5）$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A\cup B)\supseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\cup\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$，$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A\cup B)\supseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)\cup\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(B)$;

6) 若$0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$，则$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_2}(A)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_1}(A)$，$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta_2}(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta_1}(A)$。

证明　根据定义 8、9 易证结论 1）、2）。下面来证明结论 3）~6）。

结论 3) 证明。若$A\subseteq B$，由定义 2 可知$\forall y\in V$, $\mu_A(y)\leqslant\mu_B(y)$ 且 $\nu_A(y)\geqslant\nu_B(y)$。而 $A\otimes\mathrm{IR}(x)=\{\langle\mu_A(y)\mu_{\mathrm{IR}}(x,y),\nu_A(y)+\nu_{\mathrm{IR}}(x,y)-\nu_A(y)\nu_{\mathrm{IR}}(x,y)\rangle|y\in V\}\leqslant\{\langle\mu_B(y)\mu_{\mathrm{IR}}(x,y),\nu_B(y)+\nu_{\mathrm{IR}}(x,y)-\nu_B(y)\nu_{\mathrm{IR}}(x,y)\rangle|y\in V\}=B\otimes\mathrm{IR}(x)$，从而$P^*(A\otimes\mathrm{IR}(x))\leqslant P^*(B\otimes\mathrm{IR}(x))$。$\forall x\in\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)$，根据定义 9 有，$P^*(B|\mathrm{IR}(x))=\dfrac{P^*(B\otimes\mathrm{IR}(x))}{P^*(\mathrm{IR}(x))}\geqslant\dfrac{P^*(A\otimes\mathrm{IR}(x))}{P^*(\mathrm{IR}(x))}\geqslant\alpha$，则$x\in\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$，由此可知 $\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$。

类似的可以证明$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(B)$。

结论 4) 证明。由于$A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$，根据结论 3) 有 $\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A\cap B)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)$，$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A\cap B)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$，从而$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A\cap B)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\cap\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(B)$。类似的可以证明$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A\cap B)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(A)\cap\overline{\mathrm{IR}}_{\beta}(B)$。

结论 5) 证明过程和结论 4) 相同。

结论 6) 证明。$\forall x\in\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_2}(A)$，根据定义 9 有，$P^*(A|\mathrm{IR}(x))=\dfrac{P^*(A\otimes\mathrm{IR}(x))}{P^*(\mathrm{IR}(x))}\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_1$，则 $x\in\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_1}(A)$，即 $\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_2}(A)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_1}(A)$。同理$\overline{\mathrm{IR}}_{\beta_2}(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\beta_1}(A)$。

若$\beta=1-\alpha$，就得到了一种特殊的(α,β)–广义直觉模糊概率粗糙集，这时只需要确定参数α一个阈值。

定义 10　设(U,V,IR,P)为U到V上的直觉模糊概率近似空间。$\forall A\in\mathrm{IFS}(V)$，令$0.5<\alpha\leqslant 1$，则$A$关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$及阈值$\alpha$的下上近似分别为

$$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)=\{x\in U|P^*(A|\mathrm{IR}(x))\geqslant\alpha\}$$
$$\overline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)=\{x\in U|P^*(A|\mathrm{IR}(x))>1-\alpha\}$$

称序对$\left(\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A),\overline{\mathrm{IR}}_{\alpha}(A)\right)$为$A$关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$的$\alpha$–广义直觉模糊概率粗糙集。

根据上、下近似，可以计算 A 关于(U,V,IR,P)及阈值α的直觉模糊概率正域、负域，以及边界域，即

$$\mathrm{POS}_{\mathrm{IR}_\alpha}(A)=\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)=\{x\in U|P(A|\mathrm{IR}(x))\geqslant\alpha\}$$

$$\mathrm{NEG}_{\mathrm{IR}_\alpha}(A)=U-\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)=\{x\in U|P^*(A|\mathrm{IR}(x))\leqslant 1-\alpha\}$$

$$\mathrm{BN}_{\mathrm{IR}_{(\alpha,\beta)}}(A)=\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)-\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)=\{x\in U|1-\alpha<P(A|\mathrm{IR}(x))<\alpha\}$$

若$\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)=\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)$, 则称$A$是关于$(U,V,\mathrm{IR},P)$及阈值$\alpha$的可定义集。否则, A是关于(U,V,IR,P)及阈值α的不可定义集。

如果直觉模糊关系IR和直觉模糊集A分别退化成模糊关系和模糊集合, 则α–广义直觉模糊概率粗糙集退化成文献 [21] 中α–模糊概率粗糙集; 如果直觉模糊关系IR和直觉模糊集A分别退化成经典等价关系和经典集合, 则α–广义直觉模糊概率粗糙集退化成经典的α–概率粗糙集。

当只关心那些在一定程度上支持直觉模糊事件的对象时, 可以使用α–广义直觉模糊概率粗糙集。这时只需要确定一个阈值α。类似的, 也能得到性质 3。

性质 3　设(U,V,IR,P)为U到V上的直觉模糊概率近似空间。对于$A,B\in \mathrm{IFS}(V)$, $0.5<\alpha\leqslant 1$, 有下列结论成立:

1) $\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)$;

2) $\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(\varnothing)=\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(\varnothing)=\varnothing$, $\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(V)=\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(V)=U$;

3) 若$A\subseteq B$, 则$\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(B)$, $\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(B)$;

4) $\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A\cap B)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\cap\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(B)$, $\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A\cup B)\supseteq\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\cup\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(B)$;

5) $\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A\cup B)\supseteq\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\cup\underline{\mathrm{IR}}_\alpha(B)$, $\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A\cap B)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(A)\cap\overline{\mathrm{IR}}_\alpha(B)$;

6) 若$0.5<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$, 则$\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_2}(A)\subseteq\underline{\mathrm{IR}}_{\alpha_1}(A)$, $\overline{\mathrm{IR}}_{\alpha_2}(A)\subseteq\overline{\mathrm{IR}}_{\alpha_1}(A)$。

根据定义 8、10, 类似性质 2 易证性质 3, 这里就不再重复了。

4　实例应用

本节将讨论双论域上的广义直觉模糊概率粗糙集在医疗诊断上的应用。

例 3　有一个医疗诊断实例, 其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_9\}$为一组患者集合, $V=\{y_1,y_2,\cdots,y_5\}$为一组症状集合。每个患者$x\in U$关于症状$y\in V$的隶属度和非隶属度如表 1 所示。

假设A为某种疾病, 它的临床诊断表现为$A=\{\langle 0.7,0\rangle,\langle 0.2,0.6\rangle,\langle 0,0.9\rangle,\langle 0.7,0\rangle,\langle 0.1,0.8\rangle\}$设症状集合上的概率分布函数为$P(y)=1/|V|(\forall y\in V)$, 根据定义 8, 疾病$A$关于每个患者$x_i\in U$(即信息粒度$\mathrm{IR}(x_i),i=1,2,\cdots,9$)的直觉模糊条件概率分别为$P^*(A|\mathrm{IR}(x_1))=0.57$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_2))=0.06$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_3))=0.51$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_4))=0.52$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_5))=0.80$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_6))=0.74$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_7))=0.33$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_8))=0.09$, $P^*(A|\mathrm{IR}(x_9))=0.28$。

表 1　患者与症状之间的直觉模糊关系

Table 1　Intuitionistic fuzzy relationship between patients and symptoms

U	V				
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.1,0.6⟩
x_2	⟨0.0,0.8⟩	⟨0.4,0.4⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.8⟩
x_3	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.0,0.6⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.0,0.5⟩
x_4	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.3,0.4⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.3,0.4⟩
x_5	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.9⟩	⟨⟨0.6,0.1⟩	⟨0.0,0.9⟩
x_6	⟨0.6,0.0⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.0,0.8⟩	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.2,0.7⟩
x_7	⟨0.3,0.3⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.2,0.6⟩	⟨0.1,0.9⟩
x_8	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.2,0.4⟩	⟨0.8,0.0⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.2,0.7⟩
x_9	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.0,0.8⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.4,0.3⟩	⟨0.8,0.1⟩

令$\alpha=0.7,\beta=0.5$, 根据定义 9 有如下结果:

$$\mathrm{POS}_{\mathrm{IR}_{0.7}}(A)=\underline{\mathrm{IR}}_{0.7}(A)=\{x_5,x_6\}$$

$$\mathrm{NEG}_{\mathrm{IR}_{0.5}}(A)=U-\overline{\mathrm{IR}}_{0.5}(A)=\{x_2,x_7,x_8,x_9\}$$

$$\mathrm{BN}_{\mathrm{IR}_{(0.7,0.5)}}(A)=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}-\{x_5,x_6\}=\{x_1,x_3,x_4\}$$

因此可以得到以下结论: 在给定阈值$\alpha=0.7$, $\beta=0.5$的情况下, 患者x_5、x_6一定感染了疾病A, 需要立即进行治疗; 患者x_2、x_7、x_8、x_9一定没有感染疾病A, 暂时不需要进行治疗; 患者x_1、x_3、x_4可能感染了疾病A, 需要进一步检查确诊。

若令$\alpha=0.55$, 根据定义 10 有如下结果:

$$\mathrm{POS}_{\mathrm{IR}_{0.55}}(A)=\underline{\mathrm{IR}}_{0.55}(A)=\{x_1,x_5,x_6\}$$

$$\mathrm{NEG}_{\mathrm{IR}_{0.55}}(A)=U-\overline{\mathrm{IR}}_{0.55}(A)=\{x_2,x_7,x_8,x_9\}$$

$$\mathrm{BN}_{\mathrm{IR}_{0.55}}(A)=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}-\{x_1,x_5,x_6\}=\{x_3,x_4\}$$

此时, 可以得到以下结论: 在给定阈值$\alpha=0.55$的情况下, 患者x_1、x_5、x_6一定感染了疾病A, 需要立即进行治疗; 患者x_2、x_7、x_8、x_9一定没有感染了疾病A, 暂时不需要进行治疗; 患者x_3、x_4可能感染了疾病A, 需要进一步检查确诊。

另外, 还考虑下面一个医疗诊断问题, 数据来源于文献 [26]。

例 4　假设有四名患者, 记为$U=\{\mathrm{Al},\mathrm{Bob},\mathrm{Joe},\mathrm{Ted}\}$, 症状集合$V=\{\mathrm{T},\mathrm{H},\mathrm{S},\mathrm{C},\mathrm{CP}\}$, 其中 T 表示温度, H 表示头痛, S 表示胃痛, C 表示咳嗽, CP 表示胸痛。诊断结果集合$D=\{\mathrm{Vf},\mathrm{Ma},\mathrm{Ty},\mathrm{St},\mathrm{Ch}\}$, 其中 Vf 表示病毒性感冒, Ma 表示疟疾, Ty 表示伤寒, St 表示胃病, Ch 表示胸肺病。表 2 为患者与症状之间的直觉模糊关系, 表 3 为疾病与症状之间的直觉模糊关系。下面我们来确定每位患者的诊断结果。

表 2　患者与症状之间的直觉模糊关系

Table 2　Intuitionistic fuzzy relationship between patients and symptoms

患者	T	H	S	C	CP
Al	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.1,0.6⟩
Bob	⟨0.0,0.8⟩	⟨0.4,0.4⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.8⟩
Joe	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.0,0.6⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.0,0.5⟩
Ted	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.3,0.4⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.3,0.4⟩

表 3　疾病与症状之间的直觉模糊关系

Table 3　Intuitionistic fuzzy relationship between diseases and symptoms

疾病	T	H	S	C	CP
Vf	⟨0.4,0.0⟩	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.4,0.3⟩	⟨0.1,0.7⟩
Ma	⟨0.7,0.0⟩	⟨0.2,0.6⟩	⟨0.0,0.9⟩	⟨0.7,0.0⟩	⟨0.1,0.8⟩
Ty	⟨0.3,0.3⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.2,0.6⟩	⟨0.1,0.9⟩
St	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.2,0.4⟩	⟨0.8,0.0⟩	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.2,0.7⟩
Ch	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.0,0.8⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.8,0.1⟩

由于每种疾病的主要表现症状各不相同，根据这一特点，令 $P(y)=\mu_V(y)/\sum_{y\in V}\mu_V(y)$。表 2 中，用 Al={⟨0.8,0.1⟩,⟨0.6,0.1⟩,⟨0.2,0.8⟩,⟨0.6,0.1⟩,⟨0.1,0.6⟩}表示患者 Al 在每种症状下的直觉模糊集合；表 3 中，用 Vf = {⟨0.4,0.0⟩,⟨0.3,0.5⟩,⟨0.1,0.7⟩,⟨0.4,0.3⟩,⟨0.1,0.7⟩}表示疾病 Vf 在每种症状下的直觉模糊集合，其他以此类推。根据定义 8，计算诊断结果中病毒性感冒关于每位患者的直觉模糊条件概率：

$$P^*(\mathrm{Vf}|\mathrm{Al})=\frac{P^*(\mathrm{Vf}\otimes\mathrm{Al})}{P^*(\mathrm{Al})}=0.39$$

$$P^*(\mathrm{Vf}|\mathrm{Bob})=\frac{P^*(\mathrm{Vf}\otimes\mathrm{Bob})}{P^*(\mathrm{Bob})}=0.14$$

$$P^*(\mathrm{Vf}|\mathrm{Joe})=\frac{P^*(\mathrm{Vf}\otimes\mathrm{Joe})}{P^*(\mathrm{Joe})}=0.42$$

$$P^*(\mathrm{Vf}|\mathrm{Ted})=\frac{P^*(\mathrm{Vf}\otimes\mathrm{Ted})}{P^*(\mathrm{Ted})}=0.38$$

计算其他疾病关于每位患者的直觉模糊条件概率，结果如表 4 所示。

表 4　疾病关于患者的直觉模糊条件概率

Table 4　Intuitionistic fuzzy conditional probability of diseases about patients

患者	Vf	Ma	Ty	St	Ch
Al	0.39	0.75	0.43	0.17	0.17
Bob	0.14	0.32	0.38	0.79	0.14
Joe	0.42	0.71	0.55	0.13	0.03
Ted	0.38	0.76	0.34	0.40	0.36

设阈值 $\alpha=0.7,\beta=0.5$。据定义 9 可知，Vf 关于阈值 α、β 的下、上近似为 $\underline{\mathrm{IR}}_{0.7}(\mathrm{Vf})=\varnothing$，$\overline{\mathrm{IR}}_{0.5}(\mathrm{Vf})=\varnothing$。

根据上、下近似，Vf 关于阈值 α、β 的直觉模糊概率正域、负域，以及边界域分别为 $\mathrm{POS}_{0.7}(\mathrm{Vf})=\varnothing$，$\mathrm{NEG}_{0.5}(\mathrm{Vf})=U$，$\mathrm{BN}_{(0.7,0.5)}(\mathrm{Vf})=\varnothing$。也就是说，所有患者均都没有患有疾病 Vf（病毒性感冒）。类似的，计算其他疾病关于阈值 α、β 的直觉模糊概率正域、负域，以及边界域如下：

$\mathrm{POS}_{0.7}(\mathrm{Ma})=\{\mathrm{Al},\mathrm{Joe},\mathrm{Ted}\}$，$\mathrm{NEG}_{0.5}(\mathrm{Ma})=\{\mathrm{Bob}\}$，$\mathrm{BN}_{(0.7,0.5)}(\mathrm{Ma})=\varnothing$；

$\mathrm{POS}_{0.7}(\mathrm{Ty})=\varnothing$，$\mathrm{NEG}_{0.5}(\mathrm{Ty})=\{\mathrm{Al},\ \mathrm{Bob},\mathrm{Ted}\}$，$\mathrm{BN}_{(0.7,0.5)}(\mathrm{Ty})=\{\mathrm{Joe}\}$；

$\mathrm{POS}_{0.7}(\mathrm{St})=\{\mathrm{Bob}\}$，$\mathrm{NEG}_{0.5}(\mathrm{St})=\{\mathrm{Al},\mathrm{Joe},\mathrm{Ted}\}$，$\mathrm{BN}_{(0.7,0.5)}(\mathrm{St})=\varnothing$；

$\mathrm{POS}_{0.7}(\mathrm{Ch})=\varnothing$，$\mathrm{NEG}_{0.5}(\mathrm{Ch})=U$，$\mathrm{BN}_{(0.7,0.5)}(\mathrm{Ch})=\varnothing$

由上面的计算可知，Al 一定患有疾病 Ma（疟疾）；Bob 一定患有疾病 St（胃病）；Joe 一定患有疾病 Ma（疟疾），可能患有疾病 Ty（伤寒）；Ted 一定患有疾病 Ty（伤寒）。

将计算结果与其他文献进行比较，结果如表 5 所示。与其他方法不同的是，由于条件概率的加入，根据不同的阈值，患者 Joe 一定患有疾病 Ma（疟疾），可能患有疾病 Ty（伤寒）。这样的诊断结果更加符合实际，因为临床症状表现可能不是由单一疾病引起的。因此，需进一步检查，从而对症治疗。

表 5　不同方法的结果比较

Table 5　Comparison of results of different methods

方法	Al	Bob	Joe	Ted
文献[26]	Ma	St	Ty	Ma
文献[27]	Ma	St	Ty	Ma
文献[28]	Ma	St	Ma	Ma
文献[29]	Vf	St	Ty	Ma
文献[30]	Ma	St	Ty	Vf
本文结果	Ma	St	一定患有Ma 可能患有Ty	Ma

5　结束语

已有的双论域直觉模糊概率粗糙集模型通过设置两个阈值 λ_1、λ_2，讨论了经典集合的概率粗糙下、上近似。从概率角度出发，一个直觉模糊集合就是一个直觉模糊事件。本文首先给出了直觉模糊条件概率的定义。随后，在直觉模糊概率空间下构造了双论域广义直觉模糊概率粗糙集模型，讨论了模型的主要性质。最后，将模型应用到临床诊断系统中，并与已有文献中的结果进行比较。结果表明，所提出的概率粗糙集模型进一

步丰富了概率粗糙集理论，更加符合实际应用。下一步，考虑直觉模糊条件概率具有单调性，将讨论广义直觉模糊概率粗糙集中的属性约简问题。另外，由于直觉模糊集具有接受、拒绝和犹豫的语义，将该模型与三支决策模型相结合，继续拓展该模型在其他领域的应用也是我们未来的研究内容。

参考文献：

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International journal of computer & information sciences, 1982, 11(5): 341–356.

[2] DAI Jianhua, YAN Yuejun, LI Zhaowen, et al. Dominance-based fuzzy rough set approach for incomplete interval-valued data[J]. Journal of intelligent and fuzzy systems, 2018, 34(1): 423–436.

[3] TIWARI A K, SHREEVASTAVA S, SOM T, et al. Tolerance-based intuitionistic fuzzy-rough set approach for attribute reduction[J]. Expert systems with applications, 2018, 101: 205–212.

[4] ZHANG Xiao, MEI Changlin, CHEN Degang, et al. A fuzzy rough set-based feature selection method using representative instances[J]. Knowledge-based systems, 2018, 151: 216–229.

[5] FAN Xiaodong, ZHAO Weida, WANG Changzhong, et al. Attribute reduction based on max-decision neighborhood rough set model[J]. Knowledge-based systems, 2018, 151: 16–23.

[6] YAO Yiyu. Three-way decision with probabilistic rough sets[J]. Information sciences, 2010, 180(3): 341–353.

[7] SANG Binbin, ZHANG Xiaoyan. The approach to probabilistic decision-theoretic rough set in intuitionistic fuzzy information systems[J]. Intelligent information management, 2020, 12(1): 1–26.

[8] YANG Jilin, YAO Yiyu. A three-way decision based construction of shadowed sets from Atanassov intuitionistic fuzzy sets[J]. Information sciences, 2021, 577: 1–21.

[9] MA Weimin, SUN Bingzhen. On relationship between probabilistic rough set and Bayesian risk decision over two universes[J]. International journal of general systems, 2012, 41(3): 225–245.

[10] MA Weimin, SUN Bingzhen. Probabilistic rough set over two universes and rough entropy[J]. International journal of approximate reasoning, 2012, 53(4): 608–619.

[11] LIANG Meishe, MI Jusheng, FENG Tao. Optimal granulation selection for similarity measure-based multigranulation intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Journal of intelligent and fuzzy systems, 2019, 36(3): 2495–2509.

[12] YAO Yiyu. Probabilistic rough set approximations[J]. International journal of approximate reasoning, 2008, 49(2): 255–271.

[13] KHAN M A, ASHRAF S, ABDULLAH S, et al. Applications of probabilistic hesitant fuzzy rough set in decision support system[J]. Soft computing, 2020, 24(22): 16759–16774.

[14] FUJITA H, GAETA A, LOIA V, et al. Hypotheses analysis and assessment in counterterrorism activities: a method based on OWA and fuzzy probabilistic rough sets[J]. IEEE transactions on fuzzy systems, 2020, 28(5): 831–845.

[15] MALDONADO S, PETERS G, WEBER R. Credit scoring using three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information sciences, 2020, 507: 700–714.

[16] SUN Bingzhen, CHEN Xiangtang, ZHANG Liye, et al. Three-way decision making approach to conflict analysis and resolution using probabilistic rough set over two universes[J]. Information sciences, 2020, 507: 809–822.

[17] MA Xi'ao. Fuzzy entropies for class-specific and classification-based attribute reducts in three-way probabilistic rough set models[J]. International journal of machine learning and cybernetics, 2021, 12(2): 433–457.

[18] YANG Hailong, LIAO Xiuwu, WANG Shouyang, et al. Fuzzy probabilistic rough set model on two universes and its applications[J]. International journal of approximate reasoning, 2013, 54(9): 1410–1420.

[19] GUT A. Probability: a graduate course: a graduate course[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2013.

[20] ZADEH L A. Probability measures of Fuzzy events[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 1968, 23(2): 421–427.

[21] ZHAO Xuerong, HU Baoqing. Fuzzy probabilistic rough sets and their corresponding three-way decisions[J]. Knowledge-based systems, 2016, 91: 126–142.

[22] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems, 1986, 20(1): 87–96.

[23] ATANASSOV K T. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems, 1989, 33(1): 37–45.

[24] 郭智莲, 杨海龙, 王珏. 双论域上的直觉模糊概率粗糙集模型及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1828–1834.

GUO Zhilian, YANG Hailong, WANG Jue. Intuitionistic fuzzy probabilistic rough set model on two universes and its applications[J]. Systems engineering-theory and practice, 2014, 34(7): 1828–1834.

[25] FENG Tao, MI Jusheng, ZHANG Shaopu. Belief functions on general intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information sciences, 2014, 271: 143–158.
[26] LUO Minxia, ZHAO Ruirui. A distance measure between intuitionistic fuzzy sets and its application in medical diagnosis[J]. Artificial intelligence in medicine, 2018, 89: 34–39.
[27] OWN C M. Switching between type-2 fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets: an application in medical diagnosis[J]. Applied intelligence, 2009, 31(3): 283–291.
[28] DE S K, BISWAS R, ROY A R. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis[J]. Fuzzy sets and systems, 2001, 117(2): 209–213.
[29] SZMIDT E, KACPRZYK J. A similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in supporting medical diagnostic reasoning[C]//7th International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing. Berlin: Springer, 2004: 388−393.
[30] MONDAL K, PRAMANIK S. Intuitionistic fuzzy similarity measure based on tangent function and its application to multi-attribute decision making[J]. Global journal of advanced research, 2015, 2(2): 464–471.

作者简介：

梁美社，副教授，博士，主要研究方向为粗糙集理论、粒计算。发表学术论文 20 篇。

米据生，教授，博士生导师，博士，主要研究方向为粗糙集、概念格、近似推理。主持国家自然科学基金面上项目 4 项，获得省级自然科学奖 3 项。发表学术论文 150 余篇，多次入选爱思唯尔发布的中国高被引学者榜单（计算机科学领域）。

张少谱，教授，博士，主要研究方向为可靠性数学与数据挖掘。