



双向通信无人机集群领航顶点选取方法

戴丽

引用本文:

戴丽. 双向通信无人机集群领航顶点选取方法[J]. *智能系统学报*, 2021, 16(3): 484–492.

DAI Li. Leaders' selection for UAV swarm with two-way communication[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2021, 16(3): 484–492.

在线阅读 View online: <https://dx.doi.org/10.11992/tis.202006010>

您可能感兴趣的其他文章

多特征融合的异视角目标关联算法

Target association from different perspectives based on multi-feature fusion
智能系统学报. 2020, 15(5): 847–855 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.202006037>

基于力传感的系留无人机定位方法研究

Research on the positioning method of tethered UAV using force sensing
智能系统学报. 2020, 15(4): 672–678 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201907015>

面向环境探测的多智能体自组织目标搜索算法

Self-organizing target search algorithm of multi-agent system for environment detection
智能系统学报. 2020, 15(2): 289–295 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201908023>

基于拓扑结构和个体动态层面的多智能体系统可控性分析

Controllability analysis of multi-agent systems based on topological structure and individual dynamic level
智能系统学报. 2020, 15(2): 264–270 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201901006>

多移动机器人的领航-跟随编队避障控制

Piloting-following formation and obstacle avoidance control of multiple mobile robots
智能系统学报. 2017, 12(2): 202–212 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201507029>

联合连通拓扑下的二阶多自主系统有限时间包容控制

Finite-time containment control of second-order multi-agent systems with jointly connected topologies
智能系统学报. 2017, 12(2): 188–195 <https://dx.doi.org/10.11992/tis.201605013>

 微信公众平台



关注微信公众号，获取更多资讯信息

DOI: 10.11992/tis.202006010

双向通信无人机集群领航顶点选取方法

戴丽

(国防科技大学文理学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 领航顶点选取是关系到领航-跟随模式无人机集群等多智能体系统可控性的重要问题。以具有几十架个体的无人机集群为研究对象, 针对领航顶点选取问题, 基于 Laplace 矩阵的特征向量, 提出关键集概念。从理论上证明 2 关键集、3 关键集以及独立关键集的图特征。在此基础上, 给出求无向网络最小关键集的 CSA 算法, 通过数值仿真实验获得了不同规模、不同通信半径条件下无人机集群最小领航集的数值特征。

关键词: 领航顶点选取; 领航跟随模式; 无向图; Laplace 矩阵; 可控性; 关键集; 最小领航集; 算法

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2021)03-0484-09

中文引用格式: 戴丽. 双向通信无人机集群领航顶点选取方法 [J]. 智能系统学报, 2021, 16(3): 484-492.

英文引用格式: DAI Li. Leaders' selection for UAV swarm with two-way communication [J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2021, 16(3): 484-492.

Leaders' selection for UAV swarm with two-way communication

DAI Li

(College of Liberal Arts and Sciences, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Leaders' selection plays a vital role in the controllability of multiagent systems, such as the leader-follower framework of UAVs. Using the UAV swarm with dozens of individuals as the research object and aiming at the problem of leaders' selection, this paper proposes a critical set based on the eigenvector of a Laplace matrix. Theoretically, the graphical characteristics of two, three, and isolated critical sets are proved. Based on this, an algorithm named CSA for finding the minimum critical set of undirected communication networks is presented. Finally, numerical simulation is used to obtain the numerical features of the minimum leaders of UAVs of various sizes and communication radii.

Keywords: leader's selection; leader-follower framework; undirected network; Laplacian matrix; controllability; critical vertex set; minimum leader set; algorithm

多智能体系统控制技术是人工智能时代的研究热点之一^[1], 其成果可用于多个领域, 如智能交通、机器人编队, 甚至是军事用途, 如无人机蜂(狼)群作战等。无人机集群作为一种特殊的多智能体系统, 个体无需全局通信, 仅通过对其周围一定范围内个体间的通信、合作和协调等就可以表达集群整体结构和功能。它在自组织能力、推理能力, 以及对未知环境的适应性等方面有很多潜在应用。

无论是地面起飞式无人机集群, 还是空投式无人机集群, 其控制技术的难点都在于队形控制, 核心在于解决可行性和有效性两个问题^[2]: 可行性是研究无人机集群能不能全局可控, 使之形成所有预定队形; 有效性则回答了最少需要输入多少信号, 才能达到全局可控。最小领航集选取

与这 2 个问题密切相关。

对于通信网络拓扑结构图为有向图的领航跟随网络系统, 文献 [3] 通过引进匹配概念, 使有向网络的可控性问题已得到较好解决。但是, 对于无向领航跟随网络系统控制而言, 正如 Kumar 等^[4]于 2019 年所指出的那样: 如何选取领航顶点、如何选取最少个数的领航顶点都是尚待解决的难题。

目前, 无向网络控制技术已经引起人们的广泛关注。文献 [5] 是一篇较早关注无向网络可控性的文章, 该文通过 Kalman 秩条件给出了无向网络可控的充要条件。研究无向网络领航集常用的图结构有: 强制零点集 (zero forcing set, ZFS)^[4, 6-8]、约束匹配 (constraint matching, CM)^[8-11] 和非平凡等价划分 (nontrivial equitable partition, NEP)^[12-15] 等。已有的研究成果表明无向网络可控当且仅当领航集是推广的 ZFS, 且 Shima 等^[8, 10] 发现了网络中

收稿日期: 2020-06-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11872371).

通信作者: 戴丽. E-mail: daili@nudt.edu.cn.

ZFS 与 CM 之间具有等价关系。基于 NEP 概念人们给出了网络可控的必要条件,同时也证明了网络可控当且仅当它的每个连通分支可控。

Ji 等^[16-17]则是通过 Laplace 矩阵的特征向量研究无向网络的可控性,其中文献[16]给出了无向网络可控的充要条件,文献[17]则给出 DCD、TCD 等破坏网络可控性的顶点集图特征。文献[18-19]证明了高阶时不变系统的可控性等价于一阶(线性)时不变系统的可控性,通过 Laplace 矩阵的特征向量给出了无向网络可控的充要条件,同时指出了使网络可控的 2 个方法:增加领航顶点和修改网络权值。

这些研究关注重点在于从理论上给出领航集的代数特征或图论特征,所举算例规模较小。对于仅具有单特征值的无向网络系统,可以从代数角度给出领航集。理论研究表明,当网络中个体数量趋向无穷时,网络 Laplace 矩阵仅具有单特征值的概率趋向 1。但是,对于无人机集群系统,个体数量大多在几十至几百之间,这类系统的 Laplace 矩阵具有多重特征值的可能性很大。现有的研究很少涉及求解这种规模无向网络领航集的算法。

复杂网络的相关研究值得借鉴。Hamdan 等^[20-21]采用启发式算法求复杂网络的领航集,之所以采用启发式算法求领航集是因为这一问题是 NP 难问题。在无向复杂网络的可控性研究中,多采用携带更多信息的可控性 Gramian 矩阵^[22-23]。Katherine 等^[24]研究了平均可控性以及可控性与鲁棒性的关系,并给出使树图可控的领航集选取方法。2020 年,基于顶点分类文献[25]提出大规模动态系统的最小领航顶点选取问题的算法。

本文针对具有几十个个体的无向领航跟随模式无人机集群领航顶点选取问题,研究领航顶点的图特征,解决具有何种图特征的顶点必须成为领航顶点,以及如何求出最小领航集这 2 个问题;给出求领航集的算法并用数值仿真实验验证算法的有效性,分析无人机集群领航集的数值特征。

1 基本理论

1.1 无人机集群通信网络的图论模型

无人机个体间的通信关系可用图表示。设图 $G=(V,E)$, 其中顶点集 $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, v_i 表示第 i 个无人机个体,边 $v_i,v_j \in E$ 当且仅当第 i 个无人机与第 j 个无人机间可通信, G 称为通信网络拓扑结构图。若无人机个体间的通信关系是单向的,则 G 为有向图;若无人机个体间是双向通信的,则 G 为无向网络。

对于领航跟随模式的无人机集群,接收外界

输入控制信号的个体称为领航顶点,其余顶点则称为跟随顶点。本文考虑有 n 个无人机个体的线性时不变系统,个体的动力学方程描述为

$$x_i' = \begin{cases} \sum_{v_i,v_j \in E(G)} (x_j - x_i), & x_i \text{ 为跟随顶点} \\ \sum_{v_i,v_j \in E(G)} (x_j - x_i) + u_i, & x_i \text{ 为领航顶点} \end{cases} \quad (1)$$

式中: x_i 为第 i 个无人机的状态信息; u_i 为外界输入控制信息。如图 1,由 Kalman 秩条件^[5]知,取 v_1 或 v_3 作为领航顶点,则系统可控;若取 v_2 作为领航顶点,则系统不可控。

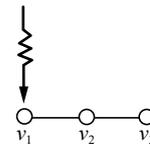


图 1 领航集的选取对系统可控性影响

Fig. 1 Influence of leader's selection on the controllability of the systems

1.2 预备理论

设 $x=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, 则式(1)为 $x'=-Lx$, 其中 $L=D-A$ 为通信网络拓扑结构图 G 的 Laplace 矩阵, D 为度对角矩阵, A 为邻接矩阵。不妨设 $F=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ 为跟随集, F 的补集 $\bar{F}=\{v_{m+1},v_{m+2},\dots,v_n\}$ 为领航集。记 $L_{S \rightarrow T}$ 为 L 中由顶点集 S 对应行与顶点集 T 对应列所组成的子矩阵。

研究表明,无向网络可控性与 Laplace 矩阵 L 的特征值和特征向量有关。

性质 1^[16-18] 设 F 为跟随集,则无向网络线性时不变系统式(1)可控,当且仅当 L 与 $L_{F \rightarrow F}$ 没有共同特征值。

性质 2 设 \bar{F} 为领航集, y 为 Laplace 矩阵 L 的任意特征向量,则无向网络线性时不变系统式(1)可控当且仅当 $y_F \neq 0$, 即 y 中领航顶点对应的分量不全为 0, 其中 y_F 表示 y 中对应于领航集 \bar{F} 分量构成的向量^[12,17]。

性质 2 给出领航集的代数特征。值得注意的是,性质 2 中的特征向量 y 是 Laplace 矩阵 L 的任意一个特征向量,因此,当 L 有多重特征值时,并不能仅通过考察它的所有线性无关的特征向量得到领航集,而应进一步验证全部具有零分量的特征向量。从数值计算角度而言,这种验证计算量大,难以实现。本文将从领航顶点的图特征出发,给出确保系统可控的领航集求解算法。

2 关键集和完美关键集

由性质 2 可知,对于非空顶点集 T ,若通信网络拓扑结构图 G 的 Laplace 矩阵 L 有一个特征向

量 y 使得 $y_T = \mathbf{0}$, 则该顶点集 T 不能作为领航集, 也就是说, 此时为使无人机集群可控, 必须将 T 的补集中某些顶点加入到领航集。基于此, 本文提出关键集的概念。

2.1 关键集

定义 1 关键集。设非空顶点集 $S \subset V$, L 为通信网络拓扑结构图 G 的 Laplace 矩阵, 若存在 L 的一个特征向量 y 使得 $y_S = \mathbf{0}$, 则称顶点集 S 为关键集 (critical set, CS)。若 $|S| = k$, 则称 S 为 k 关键集 (k critical set)。

定义 2 完美关键集。设 S 为关键集, 若存在 L 的一个特征向量 y 使得 $y_v \neq \mathbf{0} (\forall v \in S)$, 则称 S 为完美关键集 (perfect critical set, PCS)。若 $|S| = k$, 则称 S 为 k 完美关键集 (k perfect critical set)。

定义 3 最小完美关键集。设 S 为关键集, 若它的任何真子集都不再是关键集, 则称 S 为最小完美关键集 (minimal perfect critical set, MPCS)。若 $|S| = k$, 则称 S 为 k 最小完美关键集 (k minimal perfect critical set)。

若通信网络拓扑结构图为非连通图, 则考虑它的连通分支, 故不失一般性, 本节讨论的通信网络拓扑结构图均为连通图。连通图的 Laplace 矩阵的零特征值是单重特征值, 且其特征向量为 $\mathbf{1}_n^T$, ($\mathbf{1}_n$ 表示分量均为 1 的 n 维列向量), 该特征向量不能导出关键集, 因此, 若无特别声明, 本节中出现的特征值 λ 都不为 0。

由 k 关键集的定义可知, k 为正整数且 $k < n$, 定理 1 表明 $k \geq 2$ 。

定理 1 n 阶连通无向网络不存在 1 关键集。

证明 设 y 为图 G 的 Laplace 矩阵 L 的一个特征向量, 设其相应的特征值为 λ , 则有 $Ly = \lambda y$ 。于是有 $\mathbf{1}_n^T Ly = \lambda \mathbf{1}_n^T y$ 。由 $L = D - A$ 知 $\mathbf{1}_n^T L = \mathbf{0}_{1 \times n}$, 从而:

$$\mathbf{1}_n^T y = \sum_{i=1}^n y_i = 0 \tag{2}$$

若 S 为 1 关键集, 不妨设 $S = \{v_1\}$, 则由 $y_S = \mathbf{0}$ 及式 (2) 可知 $y_S = \mathbf{0}$, 于是 $y = \mathbf{0}$ 与 y 为特征向量矛盾。

由性质 2 及定理 1 知推论 1、2 成立。

推论 1 设 G 为 n 阶连通无向网络, $S \subset V$ 且 $|S| = n - 1$, 若取 S 为领航集, 则系统可控。

推论 2 设 n 阶无向网络 G 为非连通图, 则 G 有 1 关键集的充要条件是 G 中有孤立顶点。

由定理 1 可知, 对于 n 阶连通无向网络的 k 关键集, 必有 $2 \leq k \leq n - 1$ 。

定理 2 设顶点集 $S \subset V$ 且 $|S| \geq 2$, 若 $\forall v \in \bar{S}$, v 要么与 S 中所有顶点都相邻, 要么与 S 中所有顶点都不相邻, 则 S 为关键集。

证明 设 \bar{S} 中有 m 个顶点与 S 中所有顶点都相

邻。首先断言: 矩阵 $L_{S \rightarrow S}$ 有特征值 $\lambda (\lambda \neq m)$ 。事实上, 由于 \bar{S} 中有 m 个顶点与 S 中所有顶点都相邻且其余顶点都不与 S 中顶点相邻, 所以 $L_{S \rightarrow S} - mI_{|S|}$ 为顶点导出子图 $G[S]$ 的 Laplace 矩阵 (其中 $I_{|S|}$ 为 $|S|$ 阶单位矩阵), 故 $L_{S \rightarrow S} - mI_{|S|}$ 有特征值 0。

情况 1 若矩阵 $L_{S \rightarrow S} - mI_{|S|}$ 只有零特征值。

此时必有 $L_{S \rightarrow S} - mI_{|S|} = \mathbf{0}_{|S| \times |S|}$ 。注意到 $\forall v \in \bar{S}$, 若 v 与 S 中顶点都相邻, 则其在矩阵 $L_{S \rightarrow S}$ 中对应的行向量 $L_{v \rightarrow S}$ 分量全为 1; 若 v 与 S 中顶点都不相邻, 则其对应的行向量 $L_{v \rightarrow S}$ 分量全为 0。因此, 构造 n 阶列向量 $y = [1 - |S| \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$, 则易见 y 为 Laplace 矩阵 L 的特征向量。

情况 2 若矩阵 $L_{S \rightarrow S} - mI_{|S|}$ 有非零特征值。

此时取 $L_{S \rightarrow S} - mI_{|S|}$ 的特征值 $\lambda' \neq 0$, 令 $\lambda = \lambda' + m$, 则 λ 为 $L_{S \rightarrow S}$ 的特征值且 $\lambda \neq m$ 。

设 y_S 为矩阵 $L_{S \rightarrow S}$ 相应于特征值 $\lambda (\lambda \neq m)$ 的特征向量, 构造 n 阶列向量 $y = [y_S \ \mathbf{0}]$, 则有

$$Ly = \begin{bmatrix} L_{S \rightarrow S} & L_{\bar{S} \rightarrow S} \\ L_{S \rightarrow \bar{S}} & L_{\bar{S} \rightarrow \bar{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda y_S \\ L_{S \rightarrow \bar{S}} y_S \end{bmatrix} \tag{3}$$

由 $L_{S \rightarrow \bar{S}} y_S = \lambda y_S$ 知

$$\mathbf{1}_{|S|}^T L_{S \rightarrow \bar{S}} y_S = m \mathbf{1}_{|S|}^T y_S = \lambda \mathbf{1}_{|S|}^T y_S$$

再由 $\lambda \neq m$ 知 $\mathbf{1}_{|S|}^T y_S = \mathbf{0}$, 从而 $L_{S \rightarrow \bar{S}} y_S = \mathbf{0}$ 。于是由式 (3) 知 $Ly = \lambda y$, 即向量 y 为 L 的一个特征向量。

由定理 2 可知图 1 中的顶点集 $\{v_1, v_3\}$ 是关键集, 所以 v_2 不能作为领航顶点。

在一定条件下, 运用定理 2 判断一个顶点子集 S 是否为关键集时, 可以不考虑 \bar{S} 中那些与 S 中顶点都相邻或者都不相邻的顶点。

设特征向量 y 是与 k 完美关键集 S 对应的特征向量, 即 $y_S = \mathbf{0}$ 且 y 的非零分量恰有 k 个, 于是有引理 1。设 $[\{v\}, S]$ 表示一个端点为 v 另一个端点属于 S 的边集。

引理 1 设 S 为 k 完美关键顶点集, 则 $\forall v \in \bar{S}$, 有 $|\{v\}, S| \neq 1$ 且 $|\{v\}, S| \neq k - 1$ 。

证明 设 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 为 k 完美关键集, 存在 $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k \ 0 \ \dots \ 0]^T$ 为 Laplace 矩阵 L 的特征向量。由 S 为 k 完美关键集知 $y_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, k)$ 。

$\forall v \in \bar{S}$, 若 $|\{v\}, S| = 1$, 不妨设 $vv_1 \in E$, 则 $L_{\{v\} \rightarrow v} y = y_1 = 0$, 矛盾。

$\forall v \in \bar{S}$, 若 $|\{v\}, S| = k - 1$, 不妨设 v 与 v_1, v_2, \dots, v_{k-1} 都相邻, 则

$$L_{\{v\} \rightarrow v} y = \sum_{i=1}^{k-1} y_i$$

再由式 (2) 知 $y_k = 0$, 矛盾。

2.2 2 关键集和 3 关键集的图特性

由定理 1 知, 2 关键集是 2 完美关键集, 也是

2 最小完美关键集。

定理 3 设 $S \subset V$ 且 $|S|=2$, 则 S 为 2 关键集当且仅当对 $\forall v \in \bar{S}$, v 要么与 S 中所有顶点都相邻, 要么与 S 中所有顶点都不相邻。

证明 由定理 2 知充分性成立。只须证明必要性。

设 S 为 2 关键集, 由引理 1 知 $|\{v, S\}| \neq 1 (\forall v \in \bar{S})$, 因此, v $|\{v, S\}|=2$ 或 $|\{v, S\}|=0$, 即要么 v 与 S 中所有顶点都相邻, 要么 v 与 S 中所有顶点都不相邻。

定理 4 设 $S \subset V$ 且 $|S|=3$, 则 S 为 3 关键集当且仅当 $\forall v \in \bar{S}$, v 要么与 S 中所有顶点都相邻, 要么与 S 中所有顶点都不相邻。

证明 由定理 2 知充分性成立。只须证明必要性。

设 S 为 3 关键集, 由引理 1 知 $|\{v, S\}| \neq 1$ 且 $|\{v, S\}| \neq 2 (\forall v \in \bar{S})$, 因此, 要么 $|\{v, S\}|=3$, 要么 $|\{v, S\}|=0$, 即要么 v 与 S 中所有顶点都相邻, 要么 v 与 S 中所有顶点都不相邻。

由定理 3 可知, 2 关键集实际上就是文献 [26] 给出的 twins 顶点对, 由此可见, 2 关键集是 twins 顶点对的推广。但与文献 [17] 中所提出的 DCD 顶点对不同, DCD 顶点对考虑的是在跟随集中的 2 个顶点, 而 2 关键集考虑的对象则是所有顶点。

另外, 定理 3 和定理 4 表明顶点集 S 能否成为 2 关键集或 3 关键集与 S 中的顶点是否相邻无关。但是, 当 S 中顶点数更多时, 该结论不一定成立。如图 2 中 4 个深色顶点构成的顶点集 S , 当 S 中顶点的相邻关系如图 (a) 时, 它是 4 关键集; 但当 S 中顶点的相邻关系如图 (b) 时, 它不再是 4 关键集。

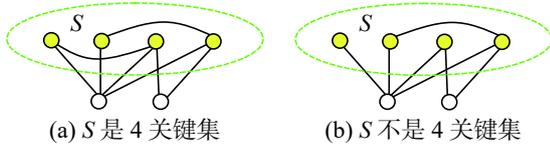


图 2 4 关键集与 $G[S]$ 的关系

Fig. 2 Relationship between four critical set an $G[S]$

2.3 独立关键集的图特征

对于顶点集 S , 按照定理 2, 删除 \bar{S} 中与 S 顶点都相邻或都不相邻的顶点, 同时也删除顶点导出子图 $G[\bar{S}]$ 中所有边, 称这样得到的图为关于顶点集 S 的简化图, 记作 G_S 。当 S 是独立集时, G_S 是二部图。记 \bar{S}_{G_S} 为 S 在简化图 G_S 中的补集。

若 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 为独立集且为 k 完美关键集, 则 Laplace 矩阵 L 有一个特征向量:

$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

$$y_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

由 S 为独立集知 $\forall v_i \in S$ 有:

$$L_{(v_i) \rightarrow v} y = d_G(v_i) y_i = \lambda y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

即 $d_G(v_1) = d_G(v_2) = \dots = d_G(v_k) = \lambda$ 。亦即当 S 为独立集时, 完美关键集 S 中顶点度均相等。基于此, 定理 5 给出了独立集成为关键集的一个充分条件。

定理 5 设 S 为独立集, G_S 为关于顶点集 S 的简化图。若 S 中所有顶点在图 G 中的度相等, 且 \bar{S}_{G_S} 中所有顶点在 G_S 中的度均为偶数, 则 S 为关键集。

证明 不妨设 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 且 S 中所有顶点在图 G 中的度均为 d 。若简化图 G_S 为空图, 则由定理 2 知结论成立, 下设 G_S 非空图。

$\forall v \in \bar{S}_{G_S}$, 由 v 在图 G_S 中的度为偶数知行向量 $L_{v \rightarrow S}$ 的所有分量求和为零 (模 2), 于是子矩阵 $L_{\bar{S}_{G_S} \rightarrow S}$ 的列向量组线性相关, 所以齐次线性方程组 $L_{S_{G_S} \rightarrow S} x = 0$ 有非零解 $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k]^T$ 。

我们断言 $\sum_{i=1}^k x_i = 0$, 事实上, 由 S 中所有顶点在图 G 中的度均为 d 及简化图 G_S 的构造过程可知顶点 $v_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 在简化图 G_S 中的度也相等, 设为 $d' \neq 0$ (因 G_S 非空图), 于是

$$\mathbf{1}_{1 \times |\bar{S}_{G_S}|} L_{S_{G_S} \rightarrow S} x = [d' \ d' \ \dots \ d'] x = d' \sum_{i=1}^k x_i = 0$$

即有 $\sum_{i=1}^k x_i = 0$ 。

取 $y = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k \ 0 \ \dots \ 0]^T$, $\lambda = d$, 则有

$$L_{S \rightarrow v} y = [L_{S \rightarrow S} \quad L_{S \rightarrow \bar{S}}] \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = L_{S \rightarrow S} x = [dx_1 \ dx_2 \ \dots \ dx_k]^T = \lambda x$$

对 $\forall v \in \bar{S}$, 若 v 与 S 中顶点都相邻, 则由

$\sum_{i=1}^k x_i = 0$ 知 $L_{(v) \rightarrow v} y = 0$; 若 v 与 S 中顶点都不相邻, 则有 $L_{(v) \rightarrow v} y = 0$; 若 $\forall v \in \bar{S}_{G_S}$, 则有

$$L_{(v) \rightarrow v} y = [L_{(v) \rightarrow S} \quad L_{(v) \rightarrow \bar{S}}] \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = L_{(v) \rightarrow S} x = 0$$

综上可知 $Ly = \lambda y$, 即向量 y 为 Laplace 矩阵的特征向量, 由于 $y_S = 0$, 故由定义 1 知 S 为关键集。

例如, 图 3 中的独立集 S , 考虑其简化图 G_S , 在 \bar{S}_{G_S} 中的所有顶点的度都为偶数 2, 由定理 5 知 S 为 4 关键集。

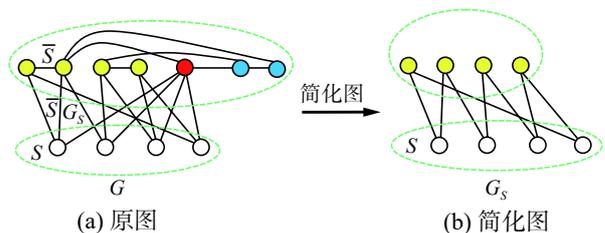


图 3 简化图及其关键集

Fig. 3 Simplification of graph G and its CS

3 最小领航集

基于关键集的概念, 本节讨论如何求出无人机集群最小领航集的算法。

3.1 算法理论基础

由性质 2 及关键集的定义知定理 6 成立。

定理 6 设 F 为跟随集, \bar{F} 为领航集, 则双向通信无人机集群线性时不变系统 (见式 (1)) 可控当且仅当 F 中不包含关键集。

证明 由性质 2 知系统 (见式 (1)) 可控当且仅当 $y_F \neq 0$, 其中 y 是任意一个特征向量。由定义 1 知, $y_F \neq 0$ 当且仅当 F 不是关键集且不包含任何关键集。

设 S_1, S_2, \dots, S_m 是无人机集群通信网络拓扑结构图的所有关键集, 构造二部图 $H = (U, V; E)$, 顶点集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, 其中 u_i 与 S_i 对应; $V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为无人机集群通信网络拓扑结构图 G 的顶点集, $v_i u_j \in E(H)$ 当且仅当 $v_i \in S_j$ 。若 $v_i u_j \in E(H)$ 则称顶点 v_i 覆盖关键集 S_j 。由定理 6 可知求最小领航集等价于求覆盖所有关键集的最小顶点集 $T (T \subseteq V)$ 。

3.2 最小领航集算法

基于定理 6, 本节给出求领航集的算法 (critical set algorithm, CSA):

- 1) 求出无人机集群通信网络拓扑结构图 G 的所有 k 关键集 $S_i (i = 1, 2, \dots, m)$;
- 2) 构造二部图 $H = (U, V; E)$;
- 3) 求最小顶点集 $T (T \subseteq V)$ 使 T 中的顶点覆盖所有关键集, 则 T 即为最小领航集。

例如, 图 4 中 G 来自文献 [15], 由定理 3 知它有 2 关键集 $S_1 = \{v_1, v_6\}$ 、 $S_2 = \{v_2, v_3\}$ 、 $S_3 = \{v_4, v_5\}$ 、 $S_4 = \{v_7, v_8\}$; 由定理 4 知该图没有 3 关键集; 由于 2 个悬挂点 v_4 、 v_5 都与 v_9 相邻, 故由引理 1 知 v_9 不属于任何完美关键集; 同理, 考虑 v_1 和 v_6 这 2 个顶点可知 v_{10} 也不属于任何关键集。从而, 容易知道图 4 中不存在 5 完美关键集; 对于 4 完美关键集只能是上述 4 个 $S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 中每个集合各取一个构成的集合, 容易验证它们都不是关键集。即上述 4 个 $S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是该网络的全部最小完美关键集。

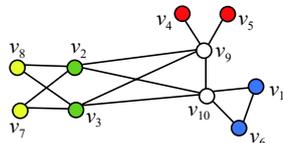


图 4 图 G 及其关键集
Fig. 4 Graph G it's critical set

于是可构造二部图 $H = (U, V; E)$ 如图 5 所示。从该二部图中可以看出每个顶点 v_i 只能覆盖一个 u_j , 于是从每个 u_j 的相邻顶点任取一个组成的集合就是图 G 的最小领航集, 比如可取 $T = \{v_1, v_2, v_4, v_7\}$ 为最小领航集。

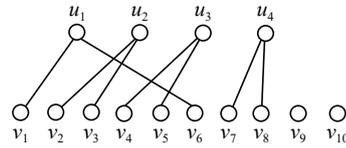


图 5 二部图
Fig. 5 Bipartite graph

本算例说明如何运用关键集求出无人机集群通信网络拓扑结构图的最小领航集。

3.3 CSA 算法复杂性分析

一般地, CSA 算法的 1) 和 3) 都不是多项式时间的算法。但是, 基于本文给出的定理, 求出相应特殊的关键集及领航集则是多项式时间算法, 具体的算法流程如图 6 所示。

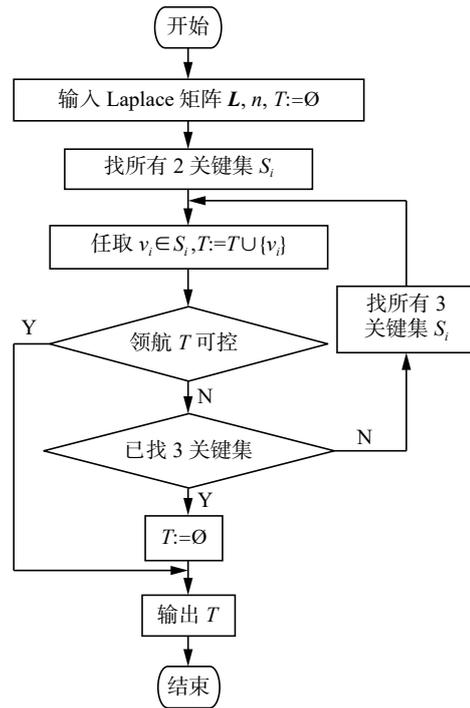


图 6 CSA 算法流程
Fig. 6 Flow chart of CSA

由定理 3 知, 在 CSA 算法流程图中找出所有 2 关键集的算法复杂性为 $O(n^3)$ 。由定理 4 知, 找出所有 3 关键集的算法复杂性为 $O(n^4)$, 因此, 图 6 所示的 CSA 算法复杂性为 $O(n^4)$ 。

3.4 数值实验及分析

在实验中, 设无人机集群的初始位置随机, 经过一段时间后形成稳定的通信网络拓扑结构图, 并在后续保持通信关系不变。在具体的数值实验

中, 程序将在 10×10 平面区域内随机生成 n 个顶点, 代表 n 个无人机个体的初始位置, 设无人机个体的通信半径为参数 d 。图 7 是实验中随机生成的 3 个通信网络拓扑结构图 G 。

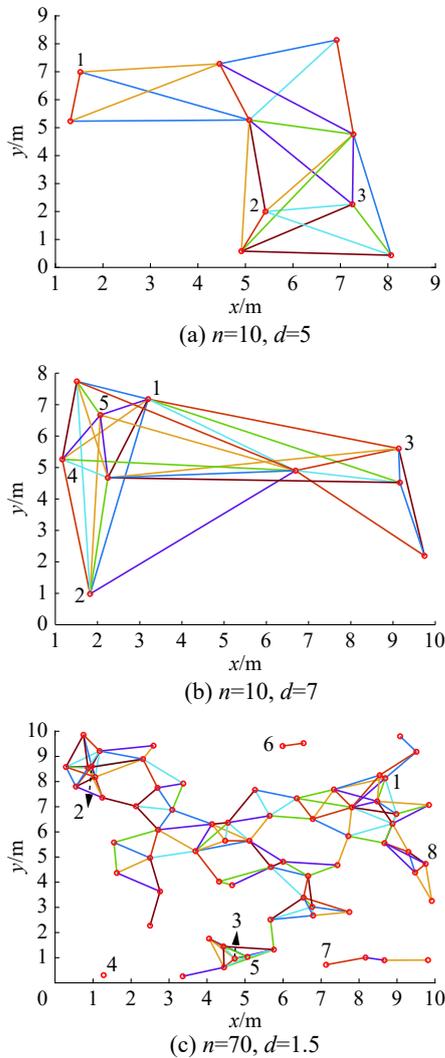


图 7 无人机集群的通信网络拓扑结构
Fig. 7 Topology of communication network for UAVs

其中, 图 7(a) 是通信半径为 5 时随机生成的具有 10 个无人机个体的通信网络拓扑结构图, CSA 算法求出的领航集为 {1,2,3}; 图 7(b) 是通信半径为 7 时随机生成的具有 10 个无人机个体的通信网络拓扑结构图, CSA 算法求出的领航集为 {1,2,3,4,5}; 图 7(c) 是 70 个无人机个体通信半径为 1.5 时生成的通信网络拓扑结构图, CSA 算法求出的领航集为 {1,2,⋯,8}。

实验 1 代数方法、图论方法及 CSA 算法的对比实验。

在代数方法中, 首先对于单重特征值, 先求它的 1 个特征向量, 若该特征向量的非零分量对应的顶点集不是顶点集 V , 由定义 1 知, 这些非零分量对应的顶点集是 1 个关键集, 在该关键集中任

取 1 个顶点放入领航顶点集; 其次, 对于多重特征值, 设它的重数为 $m(m \geq 2)$, 由于这种特征值对应的特征向量可能具有不同的非零分量集合, 因此, 这种特征值可能对应多个不同的 MPCs, 程序对具有相同非零分量的特征向量进行识别并重新认定该特征值的重数 $m_1(m_1 \leq m)$ 。在特征向量的非零分量中任取 m_1 个对应顶点放入领航顶点集。

在图论方法中, 程序基于本文给出的定理 2~5, 求出 2 关键集、3 关键集和孤立关键集等一些特殊的关键集。然后, 在每个关键集中任取一个顶点放入领航顶点集。

CSA 算法则是将代数方法和图论方法相结合求关键集。对于单重特征值, 程序用代数方法求它的关键集; 对于多重特征值, 则用图论方法求出 2 关键集、3 关键集。实验结果如图 8 所示。

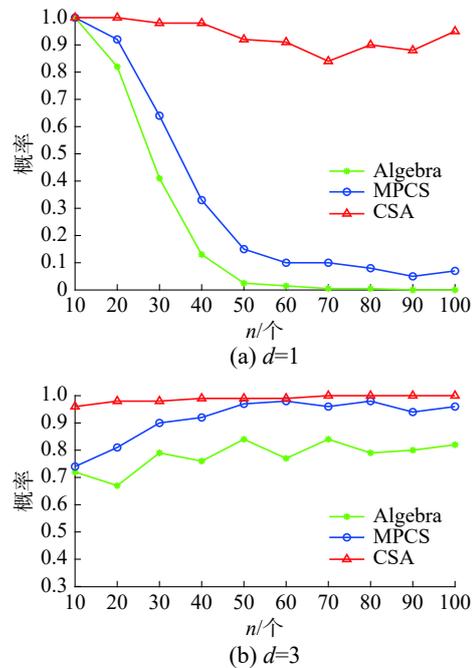


图 8 对比实验
Fig. 8 Comparison of experimental results

从图 8 中可以看出, 通过引入图论理论求关键集, 使得求解效率得到大幅度提高, 特别是当通信半径 $d = 1$ 时, 单纯的代数方法或图论方法都难以搜索到领航集, 但将两者相结合的 CSA 算法仍然使得求解效率在 80% 以上。实验表明, 代数方法能找到一部分领航顶点, 而图论方法则可以找出另一部分领航顶点, CSA 正是借助关键集概念, 将代数方法和图论方法统一用于构建最小领航顶点集。

实验 2 CSA 算法的求解效率与无人机个体通信半径间关系。

在本实验中, 针对不同的无人机个体数目, 测

试 CSA 算法在不同通信半径条件下的求解效率, 实验结果如图 9 所示。

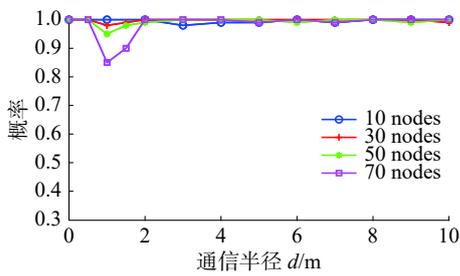


图 9 CSA 算法求解效率与通信半径的关系

Fig. 9 Relationship between the efficiency of CSA and communication radius of UAV

从图 9 中可以看出, 尽管 CSA 算法在求解过程有一定程度的抖动, 但当顶点个数小于 30 时, 求解效率在 95% 上。一个有趣的现象是, 当顶点个数大于 30 时, 若其通信半径介于 3~9, 则 CSA 算法几乎 100% 可以找到领航集; 若通信半径小于 3 或大于 9, 则 CSA 算法都出现了不同程度的抖动, 特别是当通信半径介于 0.5~3 时, 算法求解效率较差。出现这一现象的原因在于, 此时图中单重特征值减少而多重特征值增加, 这使得同一特征值对应的关键集增加, 而基于本文给出的定理 2~5, CSA 算法只求出 2 关键集、3 关键集和孤立关键集等一些特殊的关键集, 从而使得算法难以找到领航集。例如, 见图 10, 该无向网络的特征值中, 除单重特征值外, 还有 1 个 3 重特征值、1 个 4 重特征值和 1 个 5 重特征值, CSA 算法难以找到它的领航集。这说明, 当顶点个数多且通信半径较小时, 图中的关键集情况较复杂, 需要进一步从理论上研究 k 关键集的图特征。

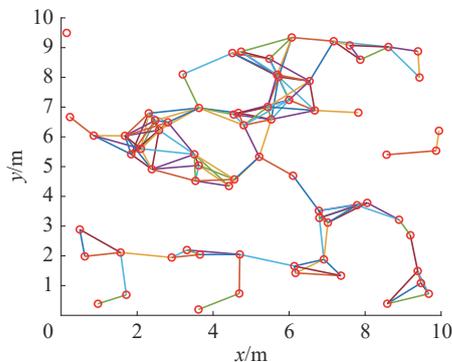


图 10 复杂特征值情况的网络结构

Fig. 10 Description of networks with multiple eigenvalues

实验 3 领航顶点个数与边数关系。

随着无人机个体和边数的变化, 领航顶点的个数也会相应地变化, 因此, 本实验不考虑领航顶点个数的绝对值, 而是考虑“领航顶点个数/无

人机个体数量 n ”与“边数/总边数 (即完全图中的边数 $n(n-1)/2$)”间的关系。

实验结果如图 11 所示。从图 11 中可以看出, 随着边数占比趋于 1, 领航顶点占比趋于 $(n-1)/n$; 随着边数占比趋于 0, 领航顶点占比趋于 1; 特别是, 领航顶点占比达最小。从图 11 中可以看出, 当无人机个体数量为 10 时, 领航顶点占比达最小的情况出现在边数占比为 0.6~0.7; 当无人机个体的数量为 30 时, 领航顶点占比达最小的情况出现在边数占比为 0.4~0.6; 当无人机个体的数量为 50(70) 时, 领航顶点占比达最小的情况出现在边数占比为 0.1~0.3。也就是说, 从整体上看, 所有“领航顶点占比与边数占比”曲线都是下凸曲线, 无人机个体数越多, 曲线越向下凸且极小值点越向“左”偏。这一现象说明, 若用较少个数的无人机个体控制整个无人机集群, 则通信网络拓扑结构图中的边数应取值于适当范围, 实验 3 从统计意义上给出了这个范围。

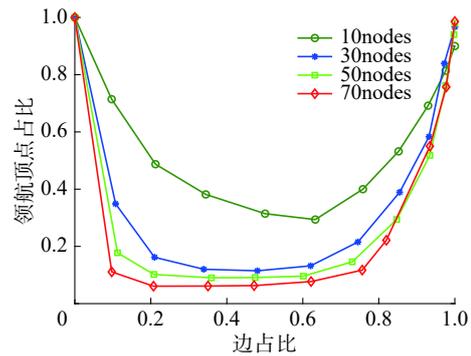


图 11 领航顶点个数与边数的关系

Fig. 11 Relationship between the number of leaders and edges

4 结束语

本文以几十架无人机构成的无人机集群为应用背景, 利用 Laplace 矩阵的特征向量提出关键集概念, 指出领航集所必须具备的图特征, 即领航集需覆盖所有关键集。给出了 2 关键集和 3 关键集的图特征, 从图论角度给出独立集成为关键集的一个充分条件。数值实验表明, 基于关键集, CSA 算法在大多数情况下能以 90% 以上的概率搜索到领航集。

如何刻画 $k(k \geq 4)$ 关键集的图特征是需进一步研究的内容。这是十分难以解决的问题, 比如由图 2 知 4 关键集与这 4 个顶点的相邻关系有关, 全体 4 阶互不同构的简单图有 11 个, 其中边数为 0、1、2、3、4、5、6 的图的个数分别为 1、1、2、3、2、1、1。而全体 5 阶互不同构的简单图有

34个。随着 k 的增加, $k(k \geq 4)$ 关键集的情况异常复杂。但是,这又是一个十分有意义的问题。比如,从数值实验可以看出,仅依据本文给出的定理2~5求出有限特殊的关键集,CSA算法就能在大多数情况下以90%以上的概率搜索到领航集。

另外,从图论角度给出领航集的充要条件,最小领航顶点数的上、下界等也都是值得进一步研究的问题。

参考文献:

- [1] DORRI A, KANHERE S S, JURDAK R. Multi-agent systems: a survey[J]. *IEEE access*, 2018, 6: 28573–28593.
- [2] 肖延东, 老松杨, 侯绿林, 等. 基于节点负荷失效的网络可控性研究[J]. *物理学报*, 2013, 62(18): 180201.
XIAO Yandong, LAO Songyang, HOU Lulin, et al. Network controllability based on node overloaded failure[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(18): 180201.
- [3] LIU Yangyu, SLOTINE J J, BARABÁSI A L. Controllability of complex networks[J]. *Nature*, 2011, 473(7346): 167–173.
- [4] KUMAR Y, SHARA M, PRASANNA C. Minimizing inputs for strong structural controllability[C]//Proceedings of 2019 American Control Conference. Philadelphia, PA, USA, 2019: 2048–2053.
- [5] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections[C]//Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No. 04CH37601). Nassau, Bahamas, 2004: 2467–2472.
- [6] MONSHIZADEH N, ZHANG Shou, CAMLIBEL M K. Zero forcing sets and controllability of dynamical systems defined on graphs[J]. *IEEE transactions on automatic control*, 2014, 59(9): 2562–2567.
- [7] MOUSAVI S S, CHAPMAN A, HAERI M, et al. Null space strong structural controllability via skew zero forcing sets[C]//Proceedings of 2018 European Control Conference. Limassol, Cyprus, 2018: 1845–1850.
- [8] MOUSAVI S S, HAERI M, MESBAHI M. On the structural and strong structural controllability of undirected networks[J]. *IEEE transactions on automatic control*, 2018, 63(7): 2234–2241.
- [9] CHAPMAN A, MESBAHI M. On strong structural controllability of networked systems: a constrained matching approach[C]//Proceedings of 2013 American Control Conference. Washington, DC, USA, 2013: 6126–6131.
- [10] TREFOIS M, DELVENNE J C. Zero forcing number, constrained matchings and strong structural controllability[J]. *Linear algebra and its applications*, 2015, 484: 199–218.
- [11] OLESKY D D, TSATSOMEROS M, VAN DEN DRIESSCHE P. Qualitative controllability and uncontrollability by a single entry[J]. *Linear algebra and its applications*, 1993, 187: 183–194.
- [12] JI Meng, EGERSTEDT M. A graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems[C]//Proceedings of 2007 American Control Conference. New York, NY, USA, 2007: 4588–4593.
- [13] RAHMANI A, JI Meng, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective[J]. *SIAM journal on control and optimization*, 2009, 48(1): 162–186.
- [14] MARTINI S, EGERSTEDT M, BICCHI A. Controllability analysis of multi-agent systems using relaxed equitable partitions[J]. *International journal of systems, control and communications*, 2010, 2(1/2/3): 100–121.
- [15] AGUILAR C O, GHARESIFARD B. Almost equitable partitions and new necessary conditions for network controllability[J]. *Automatica*, 2017, 80: 25–31.
- [16] JI Zhijian, WANG Zidong, LIN Hai, et al. Interconnection topologies for multi-agent coordination under leader-follower framework[J]. *Automatica*, 2009, 45(12): 2857–2863.
- [17] JI Zhijian, YU Haisheng. A new perspective to graphical characterization of multiagent controllability[J]. *IEEE transactions on cybernetics*, 2017, 47(6): 1471–1483.
- [18] WANG Long, JIANG Fangcui, XIE Guangming, et al. Controllability of multi-agent systems based on agreement protocols[J]. *Science in China series F: information sciences*, 2009, 52(11): 2074–2088.
- [19] JIANG Fangcui, WANG Long, XIE Guangming, et al. On the controllability of multiple dynamic agents with fixed topology[C]//Proceedings of the 2009 Conference on American Control Conference. St. Louis, Missouri, USA, 2009: 5665–5670.
- [20] HAMDAN A M A, NAYFEH A H. Measures of modal controllability and observability for first-and second-order linear systems[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 1989, 12(3): 421–428.
- [21] OLSHEVSKY A. Minimal controllability problems[J]. *IEEE transactions on control of network systems*, 2014, 3(1): 249–258.
- [22] PASQUALETTI F, ZAMPIERI S, BULLO F. Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks[J]. *IEEE transactions on control of network systems*, 2014, 1(1): 40–52.
- [23] SUMMERS T H, CORTESI F L, LYGEROS J. On submodularity and controllability in complex dynamical networks[J]. *IEEE transactions on control of network systems*

tems, 2016, 3(1): 91–101.

[24] FITCH K, LEONARD N E. Optimal leader selection for controllability and robustness in multi-agent networks[C]// Proceedings of 2016 European Control Conference. Aalborg, Denmark, 2016: 1550–1555.

[25] MOHAMMADREZA D. Minimal driver nodes for structural controllability of large-scale dynamical systems: node classification[J]. IEEE systems journal, 2020, 14(3): 4209–4216.

[26] BIYIKOĞU T, LEYDOLD J, STADLER P F. Laplacian

eigenvectors of graphs: perron-frobenius and faber-krahn type theorems[M]. New York: Springer, 2007.

作者简介:



戴丽, 副教授, 博士, 主要研究方向为图论、博弈论和网络优化算法等。主持校预研项目 1 项, 参与国家自然科学基金 2 项。发表学术论文 10 余篇。

第四届模式识别与计算机视觉大会

The 4th Chinese Conference on Pattern Recognition and Computer Vision

第四届中国模式识别与计算机视觉大会将于 2021 年 10 月 29 日至 11 月 1 日在北京举行。会议由中国图象图形学学会(CSIG)、中国人工智能学会(CAAI)、中国计算机学会(CCF)和中国自动化学会(CAA)联合主办; 由北京科技大学、北京交通大学和北京邮电大学共同承办, 中山大学和清华大学协办, 是国内顶级的模式识别和计算机视觉领域学术盛会。本届会议将主要汇聚国内国外模式识别和计算机视觉理论与应用研究的广大科研工作者及工业界同行, 共同分享我国模式识别与计算机视觉领域的最新理论和技术成果, 提供精彩的学术盛宴。现向广大科技工作者公开征集高质量、原创性的优秀英文学术论文。大会录用的稿件将在会上展示, 会议论文集将由 Springer 出版社出版, 并被 EI 和 ISTP 检索; 优秀的论文将推荐到国内外高质量期刊发表。

1. 征文范围(包括但不限于)

模式分类与聚类分析、结构模式识别、机器学习、神经网络与深度学习、特征提取与特征选择、计算机视觉基础理论、底层视觉理解、图像处理、三维视觉与重构、文档分析与识别、字符识别、人脸识别与姿态识别、目标检测、跟踪与识别、行为识别、多媒体分析与推理、医学图像处理与分析、生物特征识别、遥感影像解译优化及学习方法、多模态信息处理、性能评测和基准数据库、视频分析与理解、视觉应用与系统、机器人、自动驾驶中的视觉问题。

2. 重要日期

投稿截止日期: 2021 年 4 月 30 日

录用通知日期: 2021 年 6 月 30 日

终稿提交日期: 2021 年 8 月 15 日

会议举办日期: 2021 年 10 月 29 日至 2021 年 11 月 1 日

3. 会议投稿

<https://cmt3.research.microsoft.com/PRCV2021/>