一种参照模糊集的云模型集合论方法研究

王洪利

引用本文:
王洪利. 一种参照模糊集的云模型集合论方法研究[J]. 智能系统学报, 2020, 15(3): 507–513.
WANG Hongli. A method of cloud model set theory referring to fuzzy sets[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2020, 15(3): 507–513.

在线阅读 View online: https://dx.doi.org/10.11992/tis.201810030

DOI: 10.11992/tis.201810030

一种参照模糊集的云模型集合论方法研究

王洪利

（福建江夏学院 经济贸易学院，福建 福州 350108）

摘　要：参照模糊集构建云模型的集合论方法能够很好地扩展云模型的应用领域。本文提出了一种参照模糊集的云模型集合论方法。对云模型及其组成元素进行了阐述，提出了云集合元素的 I 运算和 P 运算，在此基础上给出了云集合的基础运算方法，研究了云集合的截集和分解定理。本文研究对云模型在集合理论方面的拓展具有较好的参考意义。

关键词：集合论；云模型；云集合；模糊集；截集；云分定理；I 运算；P 运算

中图分类号：TP18;O144　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673−4785(2020)03−0507−07

中文引用格式：王洪利. 一种参照模糊集的云模型集合论方法研究 [J]. 智能系统学报, 2020, 15(3): 507–513.

英文引用格式：WANG Hongli. A method of cloud model set theory referring to fuzzy sets[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2020, 15(3): 507–513.

A method of cloud model set theory referring to fuzzy sets

WANG Hongli

(School of Economic and Trade, Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Fuzzy sets have been extensively and deeply studied and applied. The set theory method of building cloud models with reference to fuzzy sets can well extend the application field of cloud models. In this paper, a cloud model theory based on fuzzy sets is proposed. First, the cloud model and its constituent elements are described. Afterward, the I and P operations of the cloud set elements are proposed. Then, the basic operation method of the cloud set is given. Finally, the cut set and the theorem of decomposition of the cloud set are studied. The research has significance as a good reference for extension of cloud models in the set theory.

Keywords: set theory; cloud model; cloud set; fuzzy set; cut set; cloud fraction theorem; I operation; P operation

云模型是李德毅院士创立的定性与定量相互转换的不确定性模型[1-2]。云模型在空间数据挖掘[3]、粒度计算[4]、图像分割[5]、控制[6] 等领域有着广泛的深入应用。集合论是现代数学的基础，创立至今已有百年之久[7]。集合论的观点和方法渗透在现代数学的各个分支以及科学技术的许多领域之中，也是目前对系统进行数学描述的主要工具[8]，集合论在电力系统[9]、指挥信息系统[10] 和计算机科学[11] 等领域均有应用。1965 年 Zadeh[12] 提出了模糊集合理论，集合与模糊集合均是人工智能的基础理论。模糊数学在金融[13]、故障分析[14]、物资需求分析[15]、控制优化[16-17]、聚类算法[18] 等方面均有应用。模糊集合中给出了交、并、补等基本运算，研究了截集及其运算，给出了分解定理，这些基本运算和定理是模糊数学进一步应用的基础。云模型表示的半定性半定量概念的运算，有赖于云模型的集合视角的理论扩展。如果能够从集合论的角度建立云模型的集合基础理论与方法，即云集合理论，并建立云集合与模糊集合、经典集合的转换桥梁，则可以进一步应用集合理论与方法拓展云模型的应用范围和领域，将来的进一步研究则有可能将云模型扩展到函数、关系、基数、有序集和序数等方面。因此构建云模型的集合论基础理论和方法具有十分重要的理论和实际意义。参照模糊集合，本文对云集合定义及其集合基础运算方法、云集合的截集与

收稿日期：2018−10−25.
基金项目：福建省自然科学基金面上项目 (2019J01881).
通信作者：王洪利. E-mail: graduated852@163.com.

分解定理进行了研究。

1　云集合及其组成元素

1.1　云集合

定义 1　云集合。设 U 是一论域，U 中的部分元素组成的集合称为 U 的子集合，若子集合 $\underset{\wp}{A}=\{\overset{\wp}{x}_1,\overset{\wp}{x}_2,\cdots,\overset{\wp}{x}_n\}$ 是其元素 $\overset{\wp}{x}$ 的隶属度基于云模型 $C(\mathrm{E}x,\mathrm{E}n,He)$ 表示的集合，则称其为云集合，$\overset{\wp}{x}$ 的隶属度函数记作 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$，当 C 为正态云模型时，称其为正态云集合。其中 $\mathrm{E}x$、$\mathrm{E}n$ 和 He 分别为云模型 $C(\mathrm{E}x,\mathrm{E}n,He)$ 的期望、熵和超熵，论域 U 称为云全集。

1.2　云集合与模糊集的关系

云集合和模糊集的关系：一个云集合对应多个模糊集，理论上对应无限个模糊集，因此云集合是一个无限集合；同时由于元素隶属度的随机性，云集合可看作包含多个模糊集的随机集合，所以云集合又是一个随机隶属度集合。模糊集可以看作是云集合的一次具体实现。云集合与模糊集之间的转化关系：设 $\underset{\wp}{A}$ 为正态云模型 $C(\mathrm{E}x,\mathrm{E}n,He)$ 表示的云集合，则其基于隶属度的云集合表示为

$$\underset{\wp}{A}=\left\{\overset{\wp}{x}\middle|u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})=\mathrm{e}^{-\frac{(\overset{\wp}{x}-\mathrm{E}x)^2}{2{\mathrm{E}n'_j}^2}},\mathrm{E}n'_j=\mathrm{Nor}(\mathrm{E}n,He)\right\}$$

式中：$j=1,2,\cdots,m$；$\mathrm{Nor}(\mathrm{E}n,He)$ 是正态随机数生成函数，其表示生成以 $\mathrm{E}n$ 为均值，He 为标准差的正态随机数；$u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$ 表示隶属度。

对集合内的所有 $\overset{\wp}{x}\in\underset{\wp}{A}$，当 $\mathrm{E}n'_j$ 每一次随机取值后，所产生的集合称为云集合的一次实现，其集合表示为

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\tilde{x}\middle|u_{\underset{\sim}{A}}(\tilde{x})=\mathrm{e}^{-\frac{(\tilde{x}-\mathrm{E}x)^2}{2(\mathrm{Cer}(\mathrm{E}n'_j))^2}}\right\}$$

式中 $\mathrm{Cer}(\mathrm{E}n'_j)$ 表示 $\mathrm{E}n'_j$ 的一次取值实现，此时 $\underset{\sim}{A}$ 即为模糊集。

1.3　云集合的组成元素

定义 2　云集合元素。云集合元素定义为云集合中具有随机隶属度的数 (元素)。当 x 为云集合中一个组成元素，记作 $\overset{\wp}{x}$，与模糊集合不同的是，$u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$ 不是 $[0,1]$ 区间确定的数值，而是 $[0,1]$ 区间的随机数。在隶属度基于云模型 $C_j(\mathrm{E}x_j,\mathrm{E}n_j,He_j)$ 的正态云集合中，参照云模型的隶属度生成方法[1]，正态云集合元素 $\overset{\wp}{x}$ 的随机数隶属度 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$ 的计算步骤如下：

1) 首先生成以 $\mathrm{E}n_j$ 为期望、He_j 为标准差的随机数 $\mathrm{E}n'_j$；

2) 令 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})=\mathrm{e}^{-\frac{(\overset{\wp}{x}-\mathrm{E}x)^2}{2{\mathrm{E}n'_j}^2}}$ 为云集合元素 $\overset{\wp}{x}$ 的随机隶属度。

因为在 1) 中生成的随机数有多种可能的值，所以 2) 中 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$ 是有多种可能值的随机数。图 1 为正态云集合中元素 55 的随机隶属度图形，其中对应正态云模型的期望、熵和超熵分别为 50、8 和 1。

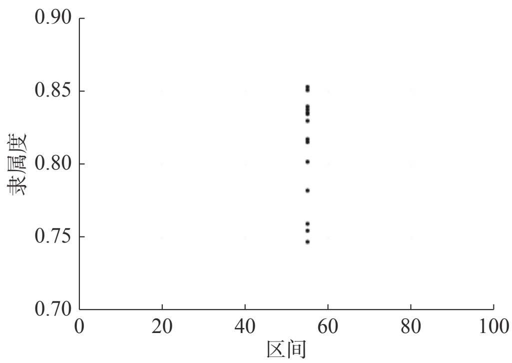


图 1　具有随机隶属度的云集合元素

Fig. 1　Element of cloud set with random subjection degree

2　云集合的基础运算方法

2.1　云集合元素的 I 运算和 P 运算

2.1.1　云集合元素 $\overset{\wp}{x}$ 的 I 运算

I 运算是求随机隶属度取值区间的运算，即求云集合元素 $\overset{\wp}{x}$ 的随机隶属度 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$ 的取值区间，记为 $I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))$。对于正态云集合，集合元素 $\overset{\wp}{x}$ 的 I 运算的方法为

$$I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))=\left[\mathrm{e}^{-\frac{(\overset{\wp}{x}-\mathrm{E}x_A)^2}{2(\mathrm{E}n_A-3He_A)^2}},\ \mathrm{e}^{-\frac{(\overset{\wp}{x}-\mathrm{E}x_A)^2}{2(\mathrm{E}n_A+3He_A)^2}}\right],\quad\forall\overset{\wp}{x}\in\underset{\wp}{A}\tag{1}$$

式 (1) 主要依据正态分布的 3σ 原则 (拉依达准则)，设在正态分布中 σ 代表标准差，μ 代表均值，3σ 原则指出元素数值分布：有 99.73% 的概率落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 界限范围内[19]。元素取值几乎全部集中在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 区间内，因此近似认为数值分布在此区间的概率为 1。据此由式 (1) 得到以 He_j 为标准差，$\mathrm{E}n_j$ 为期望的随机数 $\mathrm{E}n'_j$ 的区间 ($\mathrm{E}n'_j$ 计算的隶属度随机数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$ 的区间) 为

$$I(\mathrm{E}n'_j)=[\mathrm{E}n-3He,\mathrm{E}n+3He]$$

2.1.2　云集合元素 $\overset{\wp}{x}$ 的 P 运算

P 运算是计算一个取值区间大于另一个取值区间的可能性的运算，记作 $P(I_1\geqslant I_2)$。$\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 是

论域 U 上的云子集，$P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))\geqslant I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))$ 表示区间 $I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))$ 不小于区间 $I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}))$ 的可能性，计算方法为：设 $I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))$、$I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}))$ 使用区间表示为 $[a^l,a^r]$，$[b^l,b^r]$，则

$$P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))\geqslant I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))=P([a^l,b^r]\geqslant[a^l,b^r])=$$

$$\begin{cases}1, & a^l\geqslant b^r\\ \dfrac{a^r-b^r}{a^r-b^l}+\dfrac{b^r-a^l}{2(a^r-b^l)}, & b^l<a^l<b^r<a^r\\ \dfrac{1}{2}, & a^l=b^l,a^r=b^r\\ \dfrac{a^r-b^l}{2(b^r-a^l)}, & a^l<b^l<a^r<b^r\\ \dfrac{a^r-b^r}{a^r-a^l}+\dfrac{b^r-b^l}{2(a^r-a^l)}, & a^l<b^l<b^r<a^r\\ \dfrac{a^r-a^l}{2(b^r-b^l)}, & b^l<a^l<a^r<b^r\\ 0, & b^l\geqslant a^r\end{cases}$$

2.2　云集合的基础运算

设 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 是论域 U 上的云子集，其隶属函数的云模型数字特征分别为 $C_A(\mathrm{E}x_A,\mathrm{E}n_A,He_A)$ 和 $C_B(\mathrm{E}x_B,\mathrm{E}n_B,He_B)$，$U$ 的全体云子集构成一个集合族，称为U的云幂集，记为 $\prod(U)$。若 $\underset{\wp}{A},\underset{\wp}{B}\in\prod(U)$，$\underset{\wp}{A}\cap\underset{\wp}{B}$，$\underset{\wp}{A}\cup\underset{\wp}{B}$，$\underset{\wp}{A}^{\mathrm{c}}$ 分别表示 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 的并集、交集和 $\underset{\wp}{A}$ 的余(补)集，则云集合的相等关系、包含关系和并集、交集、余集运算方法分别如下。

2.2.1　相等关系

云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 相等的表达式为

$$\underset{\wp}{A}=\underset{\wp}{B}\Leftrightarrow C_A(\mathrm{E}x_A,\mathrm{E}n_A,He_A)=$$

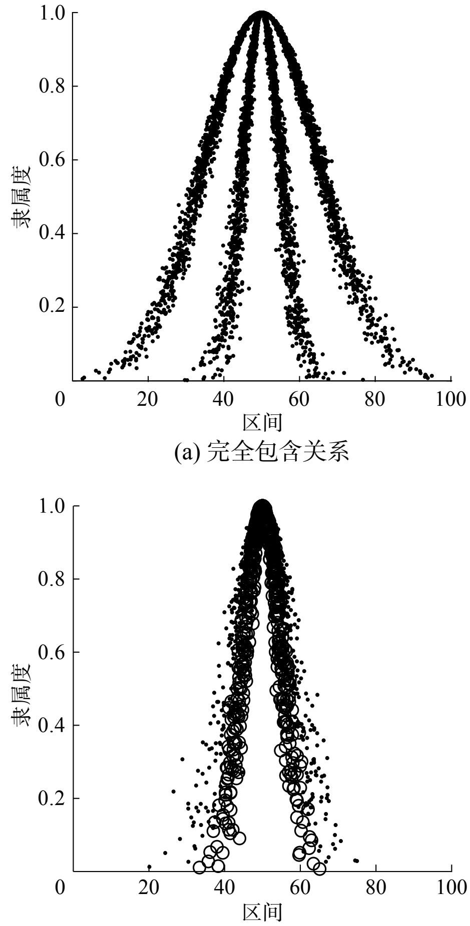
$$C_B(\mathrm{E}x_B,\mathrm{E}n_B,He_B)\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{E}x_A=\mathrm{E}x_B\\ \mathrm{E}n_\mathrm{A}=\mathrm{E}n_\mathrm{B}\\ He_A=He_B\end{cases}$$

从集合运算的角度，对于 $\forall\overset{\wp}{x}\in A,\forall\overset{\wp}{x}\in B$，当 $I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))$、$I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}))$ 区间表示为 $[a^l,a^r]$、$[b^l,b^r]$ 时，云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 相等的表达式为

$$\begin{cases}\underset{\wp}{A}=\underset{\wp}{B}\Leftrightarrow P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))=\dfrac{1}{2}\\ a^l=b^l,a^r=b^r\end{cases}$$

2.2.2　包含关系

云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 的包含关系包括完全包含关系、不完全包含关系，见图 2。



(a) 完全包含关系

(b) 不完全包含关系

图 2　完全包含与不完全包含关系

Fig. 2　Relations between complete and incomplete inclusion

对于 $\forall\overset{\wp}{x}\in A,\forall\overset{\wp}{x}\in B$(不包括合理忽略的具有相同期望的正态云集合的期望值附近点)，云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 的完全包含关系表示为

$$\underset{\wp}{A}\supset\underset{\wp}{B}\Leftrightarrow P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))=1\Leftrightarrow$$

$$P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))=0$$

对于论域内 $\forall\overset{\wp}{x}\in A,\forall\overset{\wp}{x}\in B$，云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 的不完全包含关系表示为

$$\underset{\wp}{A}\overset{p}{\supseteq}\underset{\wp}{B}\Leftrightarrow\frac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}\geqslant 1$$

2.2.3　并集

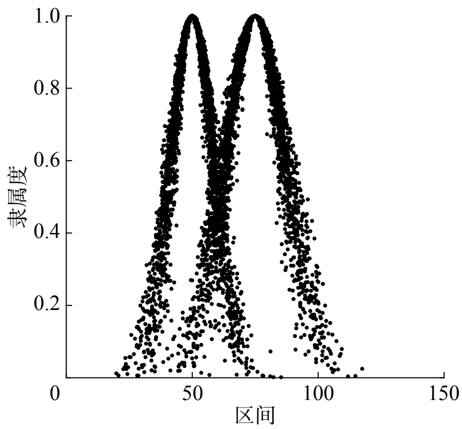
云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 的并集表示为

$$u_{\underset{\wp}{A}\cup\underset{\wp}{B}}\left(\overset{\wp}{x}\right)=u_{\underset{\wp}{A}}\left(\overset{\wp}{x}\right)\vee u_{\underset{\wp}{B}}\left(\overset{\wp}{x}\right)$$

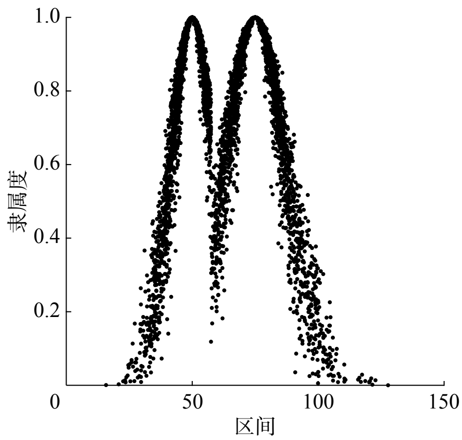
符号“$\vee$”表示“取大”运算，即对任意 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})\subseteq[0,1]$，$u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})\subseteq[0,1]$，基于云数的 I 运算和 P 运算将云集合中“取大”运算定义为

$$u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}) \vee u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}) = \begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}\left(\overset{\wp}{x}\right), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} > 1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} = 1 \\ u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} < 1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}\left(\overset{\wp}{x}\right), & P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

对于在论域 U 上隶属函数有交叉的云集合，分段应用式 (2) 运算。云集合的并集隶属函数如图 3 所示。



(a) 两个云集合



(b) 两个云集合并集的隶属函数

图 3　两个云集合及其并集隶属函数

Fig. 3　Two cloud sets and the subjection degree function of their union

2.2.4　交集

云集合 $\underset{\wp}{A}$ 和 $\underset{\wp}{B}$ 的交集表示为

$$u_{\underset{\wp}{A}\cap\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}) = u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}) \wedge u_{\underset{\wp}{B}}\left(\overset{\wp}{x}\right)$$

符号“$\wedge$”表示“取小”运算，即对任意 $u_{\underset{\wp}{A}}(x) \subseteq [0,1], u_{\underset{\wp}{B}}(x) \subseteq [0,1]$，基于云数的 I 运算和 P 运算将云集合的“取小”运算定义为

$$u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}) \wedge u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}) = \begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}\left(\overset{\wp}{x}\right), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} < 1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} = 1 \\ u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} > 1 \\ u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}), & P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

对于在论域 U 上隶属函数有交叉的云集合，分段应用式 (3) 运算。两个云集合的交集隶属函数如图 4 所示。

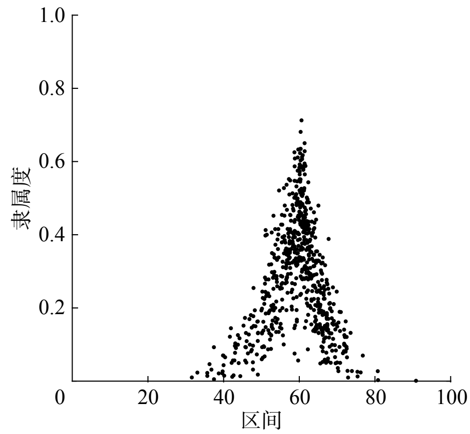


图 4　两个云集合的交集隶属函数

Fig. 4　Subjection degree function of the intersection of two cloud sets

2.2.5　余 (补) 集

云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的余 (补) 集 $\underset{\wp}{A^c}$ 表示为

$$u_{\underset{\wp}{A^c}}(\overset{\wp}{x}) = 1 - u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$$

云集合的余 (补) 集隶属函数如图 5 所示。

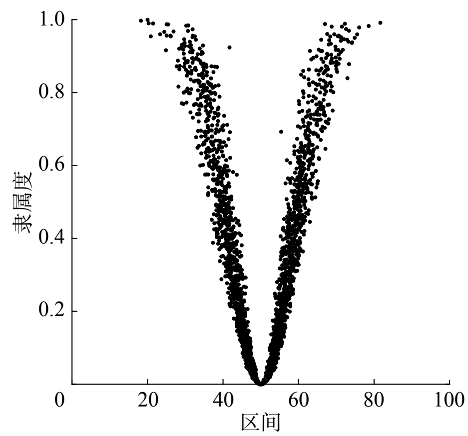


图 5　云集合的补集

Fig. 5　Complement set of cloud set

2.2.6 云集合的直积

参照经典集合与模糊集合中直积的定义[20]，设云集合 $\underset{\wp}{A}(X)$、$\underset{\wp}{B}(Y), x_i \in X, y_i \in Y$，$\forall (x_i, y_j) \in (X \times Y)$ 称 $\underset{\wp}{A}(X) \times \underset{\wp}{B}(Y) = \underset{\wp}{C}(X \times Y)$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}(X)$、$\underset{\wp}{B}(Y)$ 的直积，其随机隶属度为

$$u_{\underset{\wp}{A}(X)\times \underset{\wp}{B}(Y)} = u_{\underset{\wp}{A}(X)} \wedge u_{\underset{\wp}{B}(Y)}$$

3 云集合的截集与分解定理

3.1 云集合的截集

3.1.1 云集合的 λ 截集

设 $\underset{\wp}{A}$ 为论域 U 上的云子集，具有云模型 $C(\mathrm{E}x, \mathrm{E}n, He)$ 表示的隶属函数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$，对于任意实数 $\lambda \in [0,1]$，则云集合的 λ 云截集为

$$(\underset{\wp}{A}_{\lambda})(\overset{\wp}{x}) = \begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) \overset{\mathrm{L}}{\geqslant} \lambda \\ 0, & I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) \neg\overset{\mathrm{L}}{\geqslant} \lambda \end{cases}$$

云集合的 λ 经典截集为

$$(A_{\lambda})(\overset{\wp}{x}) = \begin{cases} 1, & I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) \overset{\mathrm{L}}{\geqslant} \lambda \\ 0, & I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) \neg\overset{\mathrm{L}}{\geqslant} \lambda \end{cases}$$

云集合的 λ 模糊截集为

$$(\underset{\sim}{A}_{\lambda})(\tilde{x}) = \begin{cases} u_{\underset{\sim}{A}}(\tilde{x}), & I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) \overset{\mathrm{L}}{\geqslant} \lambda \\ 0, & I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) \neg\overset{\mathrm{L}}{\geqslant} \lambda \end{cases}$$

定义区间 I“左大于”λ 为区间的左端点大于 λ，否则为“非左大于”，“左大于”记做 $\overset{\mathrm{L}}{\geqslant}$，“非左大于”记做 $\neg\overset{\mathrm{L}}{\geqslant}$。同理，定义区间 I“中心大于”λ 为区间的中点大于 λ，否则为“非中心大于”，“中心大于”记做 $\overset{\mathrm{C}}{\geqslant}$，“非中心大于”记做 $\neg\overset{\mathrm{C}}{\geqslant}$；定义区间 I“右小于”λ 为区间的右端点小于 λ，否则为“非右小于”，“右小于”记做 $\overset{\mathrm{R}}{\leqslant}$，“非右小于”记做 $\neg\overset{\mathrm{R}}{\leqslant}$；定义区间 I“中心小于”λ 为区间的中点小于 λ，否则为“非中心小于”，“中心小于”记做 $\overset{\mathrm{C}}{\leqslant}$，“非中心小于”记做 $\neg\overset{\mathrm{C}}{\leqslant}$。

对于正态云集合，根据隶属度函数有

$$\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mathrm{E}x)^2}{2(\mathrm{E}n')^2}} \geqslant \lambda$$

因此，对于正态云模型，云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的 λ 水平随机边界截集 A_λ 可表示为

$$A_\lambda = \left\{ x \middle| \mathrm{E}x - \sqrt{-2\mathrm{E}n'^2 \ln\lambda} \leqslant x \leqslant \mathrm{E}x + \sqrt{-2\mathrm{E}n'^2 \ln\lambda} \right\}$$

式中：$\mathrm{E}n'$ 为以 He 为标准差，$\mathrm{E}n$ 为期望的正态随机数。

$(\underset{\sim}{A}_{\lambda})(x)$ 与 $(A_\lambda)(x)$ 体现了云集合与模糊集、经典集合之间的关系，$(\underset{\sim}{A}_{\lambda})(x)$ 模糊截集是沟通云集合与模糊集的桥梁，能够实现云集合与模糊集之间的转化；$(A_\lambda)(x)$ 经典截集是沟通云集合与经典集合的桥梁，能够实现云集合与经典集之间的转换。

3.1.2 云集合的元素截集

设 $\underset{\wp}{A}$ 为论域 U 上的云子集，具有云模型 $C(\mathrm{E}x, \mathrm{E}n, He)$ 表示的隶属函数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$，对于任意集合元素 $\overset{\wp}{x}_i \in U$，记：

$$(\underset{\wp}{A}_{\overset{\wp}{x}_i})(\overset{\wp}{x}) = \begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} \geqslant 1 \\ 0, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(x_i)) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} < 1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))) = 0 \end{cases}$$

$$(A_{\overset{\wp}{x}_i})(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} \geqslant 1 \\ 0, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} < 1 \\ 1, & P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

称集合 $(\underset{\wp}{A}_{\overset{\wp}{x}_i})(\overset{\wp}{x})$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的元素 $\overset{\wp}{x}_i$ 的云截集，称集合 $(A_{x_i})(x)$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的元素 $\overset{\wp}{x}_i$ 的经典截集。

3.1.3 云集合的区间截集

设 $\underset{\wp}{A}$ 为论域 U 上的云子集，具有云模型 $C(\mathrm{E}x, \mathrm{E}n, He)$ 表示的隶属函数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$，对于给定的区间 $\forall [a,b] \subseteq [0,1]$，记：

$$\underset{\wp}{A}_{[a,b]}\left(\overset{\wp}{x}\right) = \begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I([a,b]))}{P(I([a,b])) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} \geqslant 1 \\ 0, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I([a,b]))}{P(I([a,b])) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} < 1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & P(I([a,b]) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))) = 0 \end{cases}$$

$$A_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I([a,b]))}{P(I([a,b])) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} \geqslant 1 \\ 0, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})) > I([a,b])}{P(I([a,b])) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))} < 1 \\ 1, & P(I([a,b]) > I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))) = 0 \end{cases}$$

称集合 $\underset{\wp}{A}_{[a,b]}$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的区间 $[a,b]$ 云截集，称集合 $A_{[a,b]}$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的区间 $[a,b]$ 经典截集。

3.1.4 云集合的随机隶属度截集

设 $\underset{\wp}{A}$、$\underset{\wp}{B}$ 为论域 U 上的云子集，具有云模型 $C_A(\mathrm{E}x, \mathrm{E}n, He)$、$C_B(\mathrm{E}x, \mathrm{E}n, He)$ 表示的隶属函数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$、

$u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})$, 对于任意随机隶属度 $u_{BA}(\overset{\wp}{x}_i)(\overset{\wp}{x}_i\in U)$ 有

$$\underset{\wp}{A}_{u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)}\left(\overset{\wp}{x}\right)=\begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}\geqslant 1 \\ 0, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}<1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}), & P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))=0 \end{cases}$$

$$A_{u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)=\begin{cases} 1, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}\geqslant 1 \\ 0, & \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}<1 \\ 1, & P(I(u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))=0 \end{cases} \tag{5}$$

称 $\underset{\wp}{A}_{u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)}\left(\overset{\wp}{x}\right)$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的随机隶属度 $u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})$ 云截集，称 $A_{u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)$ 为云集合 $\underset{\wp}{A}$ 的随机隶属度 $u_{\underset{\wp}{B}}(\overset{\wp}{x})$ 经典截集。特殊情况下 $\underset{\wp}{A}$、$\underset{\wp}{B}$ 可以是同一集合。元素截集与随机隶属度截集本质上是相同的。

3.2 云集合的分解定理

定理 1　设 $\underset{\wp}{A}$ 为论域 U 上的云子集，具有云模型 $C(\mathrm{E}x,\mathrm{E}n,He)$ 表示的隶属函数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$, $\overset{\wp}{x}_i\in U$, 则称式 (6) 为云集合的分解定理 1，简称云分定理 1：

$$\underset{\wp}{A}=\bigcup_{x\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x) \tag{6}$$

式中：$u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)$ 为随机隶属度 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)$ 与经典截集集合的相乘运算，构成一个新的云集合，定义 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)$ 与经典集合 A 的相乘运算为

$$u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A=\begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i), & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

证明　根据随机隶属度 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)$ 与经典集合 A 的相乘运算有

$$\left(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{\underset{\wp}{A}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)\right)\left(\overset{\wp}{x}\right)=$$

$$\begin{cases} u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i), & \overset{\wp}{x}\in A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}, \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}\geqslant 1 \\ 0, & \overset{\wp}{x}\notin A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}, \dfrac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}<1 \\ u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i), & \overset{\wp}{x}\in A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}, P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))=0 \end{cases} \tag{7}$$

由式 (7) 可进一步得

$$\underset{\wp}{A}=\bigcup_{\overset{\wp}{x}\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)=\bigvee_{\overset{\wp}{x}\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)=[\bigvee_{\substack{\overset{\wp}{x}\in U\\ \frac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}\geqslant 1}}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)]\vee[\bigvee_{\substack{\overset{\wp}{x}\in U\\ \frac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}<1}}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)]\vee$$

$$[\bigvee_{\substack{\overset{\wp}{x}\in U\\ P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))=0}}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)]=[\bigvee_{\substack{\overset{\wp}{x}\in U\\ \frac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}\geqslant 1}}[u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)]]\vee[\bigvee_{\substack{\overset{\wp}{x}\in U\\ \frac{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)))}{P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))}<1}}[0]]\vee[\bigvee_{\substack{\overset{\wp}{x}\in U\\ P(I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i))>I(u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})))=0}}[u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)]]=u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)$$

定理 2　设 $\underset{\wp}{A}$ 为论域 U 上的云子集，具有云模型 $C(\mathrm{E}x,\mathrm{E}n,He)$ 表示的隶属函数 $u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x})$, $\overset{\wp}{x}_i\in U$, 则称式 (8) 为云集合的分解定理 2，简称云分定理 2：

$$\underset{\wp}{A}=\bigcup_{\overset{\wp}{x}_i\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{\overset{\wp}{x}_i}(x) \tag{8}$$

证明　根据式 (4) 和式 (5)，易知：

$$A_{\overset{\wp}{x}_i}(x)=A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)$$

于是有

$$\bigcup_{\overset{\wp}{x}_i\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{\overset{\wp}{x}_i}(x)=\bigcup_{\overset{\wp}{x}_i\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)}(x)$$

根据云分定理 1 得到：

$$\bigcup_{\overset{\wp}{x}_i\in U}u_{\underset{\wp}{A}}(\overset{\wp}{x}_i)A_{\overset{\wp}{x}_i}(x)=\underset{\wp}{A}$$

4 结束语

本文参照模糊集，提出一种云模型的集合理论与方法。提出 I 运算和 P 运算有效解决了云集合基础运算中的“取大”和“取小”运算，并在此基础上给出了云集合基础运算方法，提出了云集合的截集和分解定理，并对分解定理进行了证明。进一步的研究工作是应用本文提出的理论方法解决相关问题。

参考文献:

[1] 李德毅, 孟海军, 史雪梅. 隶属云和隶属云发生器 [J]. 计算机研究与发展, 1995, 32(6): 15–20.
LI Deyi, MENG Haijun, SHI Xuemei. Membership clouds and Membership cloud generators[J]. Computer R&D, 1995, 32(6): 15–20.

[2] LI Deyi, LIU Changyu, GAN Wenyan. A new cognitive model: cloud model[J]. International journal of intelligent systems, 2009, 24(3): 357–375.

[3] WANG Shuliang, LI Deren, SHI Wenzhong, et al. Cloud model-based spatial data mining[J]. Geographic information sciences, 2003, 9(1/2): 60–70.

[4] LIU Yuchao, LI Deyi, HE Wen, et al. Granular computing based on Gaussian cloud transformation[J]. Fundamenta informaticae, 2013, 127(1/2/3/4): 385–398.
[5] QIN Kun, XU Kai, LIU Feilong, et al. Image segmentation based on histogram analysis utilizing the cloud model[J]. Computers & mathematics with applications, 2011, 62(7): 2824–2833.
[6] GAO Hongbo, ZHANG Xinyu, LIU Yuchao, et al. Longitudinal control for mengshi autonomous vehicle via Gauss cloud model[J]. Sustainability, 2017, 9(12): 2259.
[7] 孙文植, 王元元. 集合论——简史与近况 [J]. 自然杂志, 1983(03): 184–190, 240.
SUN Wenzhi,WANG Yuanyuan. Set theory: a brief history and current situation[J]. Journal of nature, 1983(03): 184–190, 240.
[8] 李维岳. 系统论与集合论 [J]. 系统辩证学学报, 1996, 4(1): 49–52.
LI Weiyue. System theory and set theory[J]. Journal of system dialectics, 1996, 4(1): 49–52.
[9] 马爽, 徐震, 王利明. 基于集合论的电网信息物理系统模型构建方法 [J]. 电力系统自动化, 2017, 41(6): 1–5.
MA Shuang, XU Zhen, WANG Liming. Set theory based modeling method of cyber physical system for power grid[J]. Automation of electric power system, 2017, 41(6): 1–5.
[10] 周文君, 张远华, 徐帆, 等. 基于集合论的战术通信网络重构 [J]. 指挥信息系统与技术, 2014, 5(4): 26–30.
ZHOU Wenjun, ZHANG Yuanhua, XU Fan, et al. Tactical communication network reconstruction based on set theory[J]. Command information system and technology, 2014, 5(4): 26–30.
[11] 苗夺谦, 徐菲菲, 姚一豫, 等. 粒计算的集合论描述 [J]. 计算机学报, 2012, 35(2): 351–363.
MIAO Duoqian, XU Feifei, YAO Yiyu, et al. Set-theoretic formulation of granular computing[J]. Chinese journal of computers, 2012, 35(2): 351–363.
[12] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338–353.
[13] 许金兰, 刘娟, 淡志强. 模糊集合论在信贷融资风险评价中的应用 [J]. 中国注册会计师, 2018(04): 105–109.
XU Jinlan, LIU Juan, DAN Zhiqiang. Application of fuzzy set theory in credit financing risk assessment[J]. Chinese certified public accountant, 2018(04): 105–109.
[14] 赵海鸣, 熊志宏, 曾雷, 等. 基于模糊集合理论的液压缸故障树分析方法研究 [J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2016, 39(2): 150–155.
ZHAO Haiming, XIONG Zhihong, ZENG Lei, et al. Research on fault tree analysis method for hydraulic cylinder based on fuzzy set theory[J]. Journal of Hefei University of Technology (nature science edition), 2016, 39(2): 150–155.
[15] 蔡玫, 曹杰. 应急物资需求量的二型模糊集合预测方法 [J]. 中国安全科学学报, 2015, 25(9): 165–170.
CAI Mei, CAO Jie. A type-2 fuzzy set based approach to predicting emergency material demand[J]. China safety science journal, 2015, 25(9): 165–170.
[16] 唐小涛, 陶建峰, 李志腾, 等. 自动导航插秧机路径跟踪系统稳定性模糊控制优化方法 [J]. 农业机械学报, 2018, 49(1): 29–34.
TANG Xiaotao, TAO Jianfeng, LI Zhiteng, et al. Fuzzy control optimization method for stability of path tracking system of automatic transplanter[J]. Transactions of the Chinese society for agricultural machinery, 2018, 49(1): 29–34.
[17] 朱丽燕, 李铁山, 单麒赫. 船舶航向非线性离散系统自适应模糊最优控制 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2019, 40(9): 1576–1581.
ZHU Liyan, LI Tieshan, SHAN Qihe. Optimal adaptive fuzzy control for ship course discrete-time systems[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2019, 40(9): 1576–1581.
[18] 李凯, 高岩, 曹喆. 自动调整样本和特征权值的模糊聚类算法 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2018, 39(9): 1554–1560.
LI Kai, GAO Yan, CAO Zhe. Fuzzy clustering algorithm based on the automatic variable weights of samples and features[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2018, 39(9): 1554–1560.
[19] 许修国, 乔君辉, 王文龙, 等. 基于 3σ 法整车制动距离试验方法研究 [J]. 汽车零部件, 2017(7): 54–56.
XU Xiuguo, QIAO Junhui, WANG Wenlong, et al. Braking distance test based on 3σ method[J]. Automobile parts, 2017(7): 54–56.
[20] 谢季坚, 刘承平. 模糊数学方法及其应用 [M]. 3 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006: 16−17.

作者简介：

王洪利，教授，博士后，主要研究方向为电子商务、复杂经济管理系统仿真、智能决策支持系统。主持完成省级项目 3 项。发表学术论文 50 余篇，出版专著 2 部。