DOI: 10.11992/tis.201810022
网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20190530.1036.002.html

偏联系数的计算与应用研究

杨红梅[1], 赵克勤[2]

（1. 山西广播电视大学 成人教育学院，山西 太原 030027; 2. 诸暨市联系数学研究所，浙江 诸暨 311800）

摘　要：偏联系数是联系数的一种伴随函数，其计算过程反映出联系数的联系分量在各个微观层次上的“矛盾运动”，计算结果指示出这种“矛盾运动”的阶段性结果，是“系统宏观状态与微观趋势多层分析法”的主要数学工具。本文系统阐述常用的二元至五元联系数的偏联系数算法和若干新思路，并从智能技术创新和信息能开发利用等角度指出偏联系数算法是一种新的智能算法。

关键词：集对分析；联系数；多元联系数；偏联系数；全偏联系数；系统微观运动；多层分析法；信息能

中图分类号：TP311　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673−4785(2019)05−0865−12

中文引用格式：杨红梅，赵克勤. 偏联系数的计算与应用研究 [J]. 智能系统学报，2019，14(5)：865–876.

英文引用格式：YANG Hongmei, ZHAO Keqin. The calculation and application of partial connection numbers[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(5): 865–876.

The calculation and application of partial connection numbers

YANG Hongmei[1], ZHAO Keqin[2]

(1. Adult Education College, Shanxi Radio and TV University, Taiyuan 030027, China; 2. Institut of Zhuji Connection Mathematics, Zhuji 311800, China)

Abstract: Partial connection numbers (PCNs) are a kind of adjoint function of connection numbers. Their computational process reflects a paradoxical movement on the micro level, and the result indicates that the phase result of such paradoxical movement is the main mathematical tool of the multi-layer approximation method of macro-state and micro-trend. This paper also systematically expounds the commonly used PCN algorithms from 2- to 5-element connection numbers and some ideas and establishes that the PCN algorithm is an intelligent algorithm from the aspects of intelligent technology innovation and information energy development and utilization.

Keywords: set pair analysis; connection number; multi-connection number; partial connection number; full partial connection number; micro motion of system; multi-layer analysis method; information energy

联系数是赵克勤在集对分析理论中给出的一种新颖结构函数，具有“数与系统合一”特点。借助联系数进行数学建模，结合系统的不确定性分析，使集对分析在处理不确定性问题中得到广泛应用[1−41]。偏联系数是联系数的一种伴随函数，也是基于集对分析的“系统状态–趋势分析法”的主要数学工具，自赵克勤于 2005 年提出以来[42]，已在飞机维修[43]、地铁施工[44]、隧道施工[45]、矿山过程安全[32]、火灾预防[46]、水文水资源[47]、区域创新[48]、技术预警[49]、教育评估[50]、网络舆情传播[51]、建筑供应链风险管理[52]、卫生统计[53]、系统风险分析[54]、隐私保护[55] 等领域得到应用。最近，文献 [56] 建立一种融合偏联系数模糊聚类 (PCFCM) 算法和教与学随机森林 (TLRF) 算法的雷达调制信号分选新模型 (PCFCM-TLRF)，仿真实验结果显示，与其他分选模型相比，PCFCM-TLRF 模型具有更高的分选准确度，能够有效地实现雷达调制信号的分选。

但由于文献 [42] 所在出版物不是学术期刊，传播上有一定局限，致使相当一部分应用偏联系数的学者看不到文献 [42]。为此，本文对偏联系

收稿日期：2018−10−19.　**网络出版日期**：2019−06−04.
基金项目：山西省高等学校科技创新项目 (201804044).
通信作者：赵克勤. E-mail: zjzhaok@sohu.com.

数的计算与应用研究作一梳理，以促进集对分析和偏联系数在人工智能等领域中的进一步应用。

1 联系数及其联系分量的示性系数

由文献 [19] 知，联系数最早由赵克勤在解读集合论罗素悖论时给出，至今已有不同的表达形式，其中常用的二元到五元归一化联系数为

$$\mu = a + bi \tag{1}$$

$$\mu = a + bi + cj \tag{2}$$

$$\mu = a + bi + cj + d \tag{3}$$

$$\mu = a + bi + cj + dk + el \tag{4}$$

式中：a、b、c、d、e 统称为联系数 μ 的联系分量，$a,b,c,d,e \in [0,1]$，且对式 (1) 有 $a+b=1$，对式 (2) 有 $a+b+c=1$，对式 (3) 有 $a+b+c+d=1$，对式 (4) 有 $a+b+c+d+e=1$ 的归一化约束。每一个联系分量的系数称为该联系分量的示性系数，显然联系数 μ 中第一个联系分量 (首项) 的示性系数是+1，同时规定联系数 μ 中最末一个联系分量 (末项) 的示性系数是−1，位于首项与末项之间的其他联系分量都具有不确定性，这些联系分量的不确定性通过它们的示性系数 i 等在给定区间取不同数值加以体现，见式 (5)：

$$\begin{bmatrix} 1 & i & j & k & l \\ 1 & [-1,1] & & & \\ 1 & [-1,1] & [-1] & & \\ 1 & [0,1] & [-1,0] & [-1] & \\ 1 & [0.33,1] & [-0.33,0.33] & [-1,-0.33] & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

但式 (5) 给出的是式 (1) ~ (4) 中联系分量示性系数 i、j、k 在 [−1, 1] 大区间取值作均匀分布假定条件下的值域，这些 i、j、k 在给定小区间中取何值仍要根据联系分量本身的不同情况才能确定，这是联系数的一个重要特点，也是对联系数开展系统分析的一个难点，如何消去这些不确定取值的示性系数，得出联系数系统在微观层次上的演化趋势，已成为集对分析理论研究中的一个热点，后面要讨论的偏联系数算法就是针对这一难点作出的探索。

2 偏联系数

2.1 基本原理

偏联系数主要依据联系数的假定提出：假定联系数中当前处在较低 (负、偏负、正负不定) 层次和较高 (正、偏正) 层次的联系分量存在由低 (负、偏负、正负不定) 到高 (正、偏正) 的正向层次迁移，同时又存在由高 (正、偏正) 到低 (负、偏负、正负不定) 的负向层次迁移，这些联系分量之间相互对立的层次及其迁移构成联系数的系统结构 (由联系分量组成的结构) 在微观层次上的矛盾运动，运动结果决定这个联系数的系统结构在微观层次上的演化趋势，该演化趋势与同一联系数的联系分量在宏观层次上的演化态势可能相同，可能相异，可能相反。

显然，以上假定符合哲学关于事物处于运动和变化之中的思想，也是不少文献中的实例验证，因此也称为联系数中联系分量的微观运动原理或矛盾运动原理，不致误解时，简称联系数微观运动原理。研究表明，联系数的微观运动原理就是偏联系数原理。

2.2 二元联系数的偏联系数

由式 (1) 知，二元联系数 $\mu=a+bi$ 中的 a 处在+1 层次，b 处在具有不确定性的 [−1,1] 层次，根据联系数中联系分量的运动原理，可以假定当前的 a 原本也处在 b 层次，是从 b 层次朝正向提高而来，为此用 $a+b$ 作分母，a 作分子，$a/(a+b)$ 作为正向演化率，记

$$\partial^{+}a = a/(a+b) \tag{6}$$

则称式 (6) 为二元联系数 $\mu=a+bi$ 中联系分量 a 的一阶偏正联系数；由于二元联系数只有 2 个联系分量，所以 $\partial^{+}a$ 同时又是二元联系数 μ 的一阶偏正联系数，若记 μ 的一阶偏正联系数为 $\partial^{+}\mu$，则

$$\partial^{+}\mu = \partial^{+}a \tag{7}$$

也就是：

$$\partial^{+}\mu = \partial^{+}(a+bi) = a/(a+b) = \partial^{+}a \tag{8}$$

因此有定义 1：

定义 1 设有二元联系数 $\mu=a+bi$，$a\in[0,1]$，$b\in[0,1]$，$a+b=1$，$i\in[-1,1]$，则记

$$\partial^{+}\mu = \partial^{+}(a+bi) = a/(a+b) \tag{9}$$

式 (9) 为二元联系数 $\mu=a+bi$ 的一阶偏正联系数。

另一方面，根据集对分析的“成对原理”(事物或概念都是成对存在) 和联系数中联系分量的微观运动原理，可以假定当前的 b 原本也处在 a 层次，是从 a 层次朝正负不定 (相对于完全确定的+1 层偏负) 演化而来，为此用 $a+b$ 作分母，用 b 作分子，用 $b/(a+b)$ 作为演化率，记

$$\partial^{-}b = b/(a+b) \tag{10}$$

则称式 (10) 为二元联系数 $\mu=a+bi$ 中联系分量 b 的一阶偏负联系数；由于二元联系数只有 2 个联系分量，所以这个 $\partial^{-}b$ 同时又是二元联系数 μ 的一阶偏负联系数，若记 μ 的一阶偏负联系数为 $\partial^{-}\mu$，并考虑到式 (10) 中作为分子的 b 是当前的 b，具有不确定性，按式 (1) 做法，应当用一个 $i\in[-1,1]$ 作为 b 的示性系数以说明其不确定性，式 (10) 分母中的 b 因在 a 层次，应当与 a 同等看待，没有不确定性，所以有：

$$\partial^{-}\mu = i\partial^{-}b \tag{11}$$

也就是：

$$\partial^- \mu = \partial^- (a + bi) = i[b/(a + b)] = i\partial^- b \tag{12}$$

因此有定义 2:

定义 2　设有二元联系数 $\mu = a + bi$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $a + b = 1$, $i \in [-1,1]$, 则记

$$\partial^- \mu = \partial^- (a + bi) = i[b/(a + b)] = i\partial^- b \tag{13}$$

称式 (13) 为二元联系数 $\mu = a + bi$ 的一阶偏负联系数。

进一步有二元联系数 μ 的一阶全偏联系数定义 3:

定义 3　设有二元联系数 $\mu = a + bi$, ($a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$), $a + b = 1$, $i \in [-1,1]$, 则记

$$\partial^\pm \mu = \partial^+ \mu + \partial^- \mu \tag{14}$$

称式 (14) 为二元联系数 $\mu = a + bi$ 的一阶全偏联系数, 其中 $\partial^\pm \mu$ 是 μ 的一阶全偏联系数记号, $\partial^\pm \mu$ 也读作 μ 的一阶正负全偏联系数。

根据定义 3 可知:

$$\partial^\pm \mu = \partial^+ \mu + \partial^- \mu = \partial^+ a + i\partial^- b = \frac{a}{a+b} + \frac{bi}{a+b} = a + bi \tag{15}$$

式 (15) 表明二元联系数的一阶全偏联系数是二元联系数自身, 计算结果中仍然存在二元联系数中表示不确定性的示性系数 i, 为此, 在实际应用时需要对 i 作出解析才能确定二元联系数所确定的演化趋势。

例 1　试求二元联系数 $\mu = 0.6 + 0.4i$ 的偏正联系数 $\partial^+ \mu$、偏负联系数 $\partial^- \mu$、全偏联系数 $\partial^\pm \mu$, 并判别其在微观层次上的演化趋势。

解　根据定义 1 和式 (15) 得 μ 的偏正联系数:

$$\partial^+ \mu = \partial^+ (a + bi) = \partial^+ (0.6 + 0.4i) = \frac{0.6}{0.4 + 0.6} = 0.6$$

根据定义 1 和式 (13) 得 μ 的偏负联系数:

$$\partial^- \mu = \partial^- (a + bi) = \partial^- (0.6 + 0.4i) = \frac{0.4i}{0.6 + 0.4} = 0.4i$$

根据定义 3 和式 (14) 得 μ 的全偏联系数:

$$\partial^\pm \mu = \partial^+ \mu + \partial^- \mu = \partial^+ a + \partial^- b = 0.6 + 0.4i$$

当 i 遍历 $[-1, 1]$ 时, $\partial^\pm \mu$ 遍历 $[0.2, 1]$, 即当 $i = -1$ 时, $\partial^\pm \mu = 0.2$; 当 $i = 1$ 时, $\partial^\pm \mu = 1$; 由于 i 遍历 $[-1,1]$ 时, 均有 $\partial^\pm \mu \geqslant 0$, 所以二元联系数 $\mu = 0.6 + 0.4i$ 时系统在微观层上的演化趋势为正向趋势。

2.3　三元联系数的偏联系数

式 (2) 所示三元联系数的偏联系数计算原理同二元联系数, 但内容较多; 为节约篇幅, 以下直接给出三元联系数中各阶偏联系数的定义 (见定义 4)。

定义 4　设有三元联系数 $\mu = a + bi + cj$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $c \in [0,1]$, $a + b + c = 1$, $i \in [-1,1]$, $j = -1$, 记 μ 的一阶偏正联系数为 $\partial^+ \mu$, 则

$$\partial^+ \mu = \partial^+ a + i\partial^+ b = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} i \tag{16}$$

式中: $\partial^+ a = \dfrac{a}{a+b}$, $\partial^+ b = \dfrac{b}{b+c}$。式 (16) 表明三元联系数的一阶偏正联系数是一个二元联系数, 由两个偏正联系数作为联系分量相加而成, 其中 $\partial^+ a = \dfrac{a}{a+b}$ 的含义同式 (6), $\partial^+ b = \dfrac{b}{b+c}$ 的含义是假定当前的 b, 此前也处在 c 层次上, 是从 c 层次向正方向演化而来, 所以用 $b + c$ 作分母, 用 b 作分子, 用分式 $\dfrac{b}{b+c}$ 作为正向演化率。由于作为分子的 b 是当前的 b, 是现在进行时, 所以在纳入 μ 的一阶偏正联系数时, 应当乘上一个反映 b 具有不确定性的示性系数 i, 而同时作为分母中的 b, 则处在 c 层次上, 与 c 一样是确定的, 所以不用乘 i。

三元联系数的一阶偏负联系数见定义 5。

定义 5　设有三元联系数 $\mu = a + bi + cj$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $c \in [0,1]$, $a + b + c = 1$, $i \in [-1,1]$, $j = -1$, 记 μ 的一阶偏负联系数为 $\partial^- \mu$, 则

$$\partial^- \mu = (\partial^- b)i + (\partial^- c)j = \frac{b}{a+b} i + \frac{c}{b+c} j \tag{17}$$

式 (17) 表明三元联系数的一阶偏负联系数是一个二元联系数, 由两个偏负联系数相加而成, 其中 $\dfrac{b}{a+b}$ 的含义同式 (10); $\dfrac{c}{b+c}$ 的含义是假定当前的 c, 此前也处在 b 层次, 是从 b 层次负向演化而来, 所以用 c 做分子, 用 $b + c$ 作分母, 用分式 $\dfrac{c}{b+c}$ 作为偏负向演化的演化率, 由于这时作为分子的 c 处在当前状态, 所以乘上表示当前状态的示性系数 j。

三元联系数的一阶全偏联系数见定义 6:

定义 6　设三元联系数 $\mu = a + bi + cj$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $c \in [0,1]$, $a + b + c = 1$, $i \in [-1,1]$, $j = -1$, 其一阶偏正联系数为

$$\partial^+ \mu = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} i$$

一阶偏负联系数为

$$\partial^- \mu = \frac{b}{a+b} i + \frac{c}{b+c} j$$

则其一阶全偏联系数是一阶偏正联系数和一阶偏负联系数的代数和, 记一阶全偏联系数为 $\partial^\pm \mu$, 则有

$$\partial^\pm \mu = \partial^+ \mu + \partial^- \mu = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} i^+ + \frac{b}{a+b} i^- + \frac{c}{b+c} j \tag{18}$$

显然, 定义 6 中的式 (18) 可以化简成:

$$\partial^\pm \mu = \frac{a + bi^-}{a+b} + \frac{bi^+ + cj}{b+c} \tag{19}$$

如果约定三元联系数的偏联系数就是指这个三元联系数的全偏联系数, 则式 (19) 可以再简写成:

$$\partial \mu = \frac{a + bi^-}{a+b} + \frac{bi^+ + cj}{b+c} \tag{20}$$

式 (18)、式 (19) 中仍有示性系数 i、j, 计算时会遇到示性系数 i 取何值的问题, 是否有合适又合理的途径可以消去这个 i呢？看定义 7：

定义 7 设有三元联系数 $\mu=a+bi+cj$, $a\in[0,1]$, $b\in[0,1]$, $c\in[0,1]$, $a+b+c=1$, $i\in[-1,1]$, $j=-1$ 其一阶偏正联系数为

$$\partial^+\mu=\partial^+a+i\partial^+b=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}i \tag{21}$$

则对其再求一次偏正演化计算, 其演化率为 μ 的 2 阶偏正联系数, 记为 $\partial^{2+}\mu$, 则

$$\partial^{2+}\mu=\partial(\partial^+\mu)=\frac{\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}} \tag{22}$$

式 (22) 的物理意义是: 式 (21) 中的 $\partial^+a\left(=\dfrac{a}{a+b}\right)$ 此前也处在 $i\partial^+b\left(=\dfrac{b}{b+c}\right)$ 层次上, 是从 $i\partial^+b\left(=\dfrac{b}{b+c}\right)$ 层次往正向演化而来, 所以用 $\dfrac{a}{a+b}$ 去除 $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}\right)$, 得到 μ 的二阶偏正演化率 $\partial^{2+}\mu$。与此类似, 有 μ 的二阶偏负演化率 $\partial^{2-}\mu$ 定义（见定义 8）。

定义 8 设有与定义 7 中给定的三元联系数 μ, 且已知 μ 的一阶偏负联系数为 $\partial^-\mu=\dfrac{b}{a+b}i+\dfrac{c}{b+c}j$, 则有 μ 的二阶偏负联系数为

$$\partial^{2-}\mu=\partial^-(\partial^-\mu)=\frac{\dfrac{c}{b+c}}{\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}}j \tag{23}$$

进一步有定义 9。

定义 9 设有与定义 7 中给定的三元联系数 μ, 且已知 μ 的二阶偏正联系数如式 (22) 所示, 二阶偏负联系数如式 (23) 所示, 则其二阶全偏联系数 $\partial^{2\pm}\mu$ 如式 (24) 所示：

$$\partial^{2\pm}\mu=\partial^{2+}\mu+\partial^{2-}\mu=\frac{\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}}+\frac{\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}}j=$$

$$\frac{\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}}-\frac{\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}} \tag{24}$$

显然, 式 (24) 是一个没有示性系数 i 的实数, 其物理意义是: 当 $\partial^{2\pm}\mu>0$ 时, 表明三元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势是正向趋势；当 $\partial^{2\pm}\mu<0$ 时, 表明三元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势是负向趋势；当 $\partial^{2\pm}\mu=0$ 时, 表明三元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势处在正负临界状态。

参照式 (19) 对式 (18) 的简写做法, 这里也约定 μ 的二阶全偏联系数 $\partial^{2\pm}\mu$ 简记成 $\partial^2\mu$, 也就是说, 我们通常说一个联系数的偏联系数, 是指这个联系数的某阶全偏联系数。

要指出的是, 对式 (18) 所示 μ 的一阶全偏联系数不能再作一次全偏联系数计算, 因为式 (18) 中的 $\partial^+\mu$ 和 $\partial^-\mu$ 相对于 μ, 已处在同一层次, 不再存在“层间迁移”运动, 如果仍按前面的“层间迁移”假定作运算, 其结果为

$$\partial^\pm(\partial^\pm\mu)=\partial^\pm(\partial^+\mu+\partial^-\mu)=$$

$$\frac{\partial^+\mu}{\partial^+\mu+\partial^-\mu}+\frac{\partial^-\mu}{\partial^+\mu+\partial^-\mu}=\frac{\partial^+\mu+\partial^-\mu}{\partial^+\mu+\partial^-\mu}=1$$

这个结果证实了式 (18) 中的 $\partial^+\mu$ 和 $\partial^-\mu$ 相对于 μ, 已处于同一层次, 因此要求一个三元联系数的二阶全偏联系数只能采用式 (24)。

例 2 试求三元联系数 $\mu=0.5+0.3i+0.2j$ 的二阶偏正联系数 $\partial^{2+}\mu$、二阶偏负联系数 $\partial^{2-}\mu$、二阶全偏联系数 $\partial^{2\pm}\mu$, 判别该联系数系统在微观层次上的演化趋势。

解 按定义 7 和式 (22) 得 μ 的二阶偏正联系数：

$$\partial^{2+}\mu=\frac{\dfrac{0.5}{0.5+0.3}}{\dfrac{0.5}{0.5+0.3}+\dfrac{0.3}{0.3+0.2}}=\frac{25}{49}=0.510\,2$$

按定义 8 和式 (23) 得 μ 的二阶偏负联系数：

$$\partial^{2-}\mu=\frac{\dfrac{0.2}{0.3+0.2}}{\dfrac{0.3}{0.5+0.3}+\dfrac{0.2}{0.3+0.2}}j=-\frac{16}{31}=-0.516\,1$$

根据定义 9 和式 (24) 得 μ 的二阶全偏联系数：

$$\partial^{2\pm}\mu=\partial^{2+}\mu+\partial^{2-}\mu=0.510\,2-0.516\,1=-0.006$$

所以三元联系数 $\mu=0.5+0.3i+0.2j$ 系统在微观层上的演化趋势为微弱负向趋势。

2.4 四元联系数的偏联系数

式 (3) 所示四元联系数的偏联系数计算原理同三元联系数, 但内容增多；为节约篇幅, 以下直接给出四元联系数中各阶偏联系数的定义：

定义 8 中设四元联系数 $\mu=a+bi+cj+dk$, $a\in[0,1]$, $b\in[0,1]$, $c\in[0,1]$, $d\in[0,1]$, $a+b+c+d=1$, $i\in[0,1]$, $j\in[-1,0]$, $k=-1$, 则记 μ 的一阶偏正联系数为 $\partial^+\mu$, 即

$$\partial^+\mu=\partial^+a+i\partial^+b+j\partial^+c \tag{25}$$

其中$\partial^+a=\dfrac{a}{a+b}$, $\partial^+b=\dfrac{b}{b+c}$, $\partial^+c=\dfrac{c}{c+d}$, 记 μ 的二阶偏正联系数为 $\partial^{2+}\mu$, 则

$$\partial^{2+}\mu=\partial^+(\partial^+\mu)=\partial^+(\partial^+a+i\partial^+b+j\partial^+c)=$$

$$\frac{\partial^+a}{\partial^+a+\partial^+b}+\frac{\partial^+b}{\partial^+b+\partial^+c}i \tag{26}$$

记 μ 的三阶偏正联系数为 $\partial^{3+}\mu$, 则

$$\partial^{3+}\mu = \partial^{+}\left(\partial^{2+}\mu\right) = \partial^{+}[\partial^{+}(\partial^{+}\mu)] = \partial^{+}[\partial^{+}(\partial^{+}a + i\partial^{+}b + j\partial^{+}c)] = \partial^{+}\left(\frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b} + \frac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}i\right) = \frac{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b} + \dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}} \tag{27}$$

把 $\partial^{+}a = \dfrac{a}{a+b}, \partial^{+}b = \dfrac{b}{b+c}, \partial^{+}c = \dfrac{c}{c+d}$ 代入式 (27) 得

$$\partial^{3+}\mu = \frac{\dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}}}{\dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}} + \dfrac{\frac{b}{b+c}}{\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}}} \tag{28}$$

另一方面, 记 μ 的一阶偏负联系数为 $\partial^{-}\mu$, 则

$$\partial^{-}\mu = i\partial^{-}b + j\partial^{-}c + k\partial^{-}d \tag{29}$$

式中: $\partial^{-}b = \dfrac{b}{a+b}, \partial^{-}c = \dfrac{c}{b+c}, \partial^{-}d = \dfrac{d}{c+d}$。记 μ 的二阶偏负联系数为 $\partial^{2-}\mu$, 则

$$\partial^{2-}\mu = \partial^{-}(\partial^{-}\mu) = \partial^{-}(i\partial^{-}b + j\partial^{-}c + k\partial^{-}d) = \frac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}j + \frac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}k \tag{30}$$

记 μ 的三阶偏负联系数为 $\partial^{3-}\mu$, 则

$$\partial^{3-}\mu = \partial^{-}\left(\partial^{2-}\mu\right) = \partial^{-}[\partial^{-}(\partial^{-}\mu)] = \partial^{-}[\partial^{-}(i\partial^{-}b + j\partial^{-}c + k\partial^{-}d)] = \partial^{-}\left(\frac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}j + \frac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}k\right) = \frac{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}k}{\dfrac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c} + \dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}} \tag{31}$$

把 $\partial^{-}b = \dfrac{b}{a+b}, \partial^{-}c = \dfrac{c}{b+c}, \partial^{-}d = \dfrac{d}{c+d}$ 代入式 (31) 得

$$\partial^{3-}\mu = \frac{\dfrac{\frac{d}{c+d}}{\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}}k}{\dfrac{\frac{c}{b+c}}{\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}} + \dfrac{\frac{d}{c+d}}{\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}}} \tag{32}$$

注意到式 (32) 中的 $k=-1$, 于是得 μ 的三阶全偏联系数 $\partial^{3\pm}\mu$ 为

$$\partial^{3\pm}\mu = \frac{\dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}}}{\dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}} + \dfrac{\frac{b}{b+c}}{\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}}} - \frac{\dfrac{\frac{d}{c+d}}{\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}}}{\dfrac{\frac{c}{b+c}}{\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}} + \dfrac{\frac{d}{c+d}}{\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}}} \tag{33}$$

显然, 式 (33) 是一个没有示性系数 i 的实数, 其物理意义是: 当 $\partial^{3\pm}\mu > 0$ 时, 表明四元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势是正向趋势; 当 $\partial^{3\pm}\mu < 0$ 时, 表明四元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势是负向趋势; 当 $\partial^{3\pm}\mu = 0$ 时, 表明四元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势处在正负临界状态。

2.5 五元联系数的偏联系数

式 (4) 所示五元联系数的偏联系数计算原理同四元联系数, 但内容增多; 为节约篇幅, 以下直接给出五元联系数中各阶偏联系数的定义 (见定义 9):

定义 9 设五元联系数 $\mu = a+bi+cj+dk+el, a\in[0,1], b\in[0,1], c\in[0,1], d\in[0,1], e\in[0,1]$, $a+b+c+d+e=1$, $i\in[0.333,1]$, $j\in[-0.333,0.333]$, $k=[-1,-0.334]$, $l=-1$, 记 μ 的一阶偏正联系数为 $\partial^{+}\mu$, 则

$$\partial^{+}\mu = \partial^{+}a + i\partial^{+}b + j\partial^{+}c + k\partial^{+}d \tag{34}$$

式中: $\partial^{+}a = \dfrac{a}{a+b}$, $\partial^{+}b = \dfrac{b}{b+c}$, $\partial^{+}c = \dfrac{c}{c+d}$, $\partial^{+}d = \dfrac{d}{d+e}$。记 μ 的二阶偏正联系数为 $\partial^{2+}\mu$, 则

$$\partial^{2+}\mu = \partial^{+}(\partial^{+}a + i\partial^{+}b + j\partial^{+}c + k\partial^{+}d) = \frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b} + \frac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c} + \frac{\partial^{+}c}{\partial^{+}c+\partial^{+}d} \tag{35}$$

记 μ 的三阶偏正联系数为 $\partial^{3+}\mu$, 则

$$\partial^{3+}\mu = \partial^{+}(\partial^{2+}\mu) = \partial^{+}[\partial^{+}(\partial^{+}a + i\partial^{+}b + j\partial^{+}c + k\partial^{+}d)] = \partial^{+}[\frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b} + \frac{i\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c} + \frac{j\partial^{+}c}{\partial^{+}c+\partial^{+}d}] = \frac{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b} + \dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}} + \frac{\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}i}{\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c} + \dfrac{\partial^{+}c}{\partial^{+}c+\partial^{+}d}} \tag{36}$$

记 μ 的四阶偏正联系数为 $\partial^{4+}\mu$, 则

$$\partial^{4+}\mu = \partial^{+}\left(\partial^{3+}\mu\right) = \partial^{+}\left(\frac{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b} + \dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}} + \frac{\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}i}{\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c} + \dfrac{\partial^{+}c}{\partial^{+}c+\partial^{+}d}}\right) = \frac{\dfrac{\frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}+\frac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}}}{\dfrac{\frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\frac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}+\frac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}} + \dfrac{\frac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}}{\frac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}+\frac{\partial^{+}c}{\partial^{+}c+\partial^{+}d}}} \tag{37}$$

另一方面, 记 μ 的一阶偏负联系数为 $\partial^{-}\mu$, 则

$$\partial^{-}\mu = i\partial^{-}b + j\partial^{-}c + k\partial^{-}d + l\partial^{-}e \tag{38}$$

记 μ 的二阶偏负联系数为 $\partial^{2-}\mu$, 则

$$\partial^{2-}\mu = \partial^{-}(\partial^{-}\mu) = \partial^{-}(i\partial^{-}b + j\partial^{-}c + k\partial^{-}d + l\partial^{-}e) = \frac{j\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c} + \frac{k\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d} + \frac{l\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e} \tag{39}$$

记 μ 的三阶偏负联系数为 $\partial^{3-}\mu$，则

$$\partial^{3-}\mu=\partial^{-}\left(\partial^{2-}\mu\right)=\partial^{-}[\partial^{-}(\partial^{-}\mu)]=$$
$$\partial^{-}\left(\frac{j\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}+\frac{k\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}+\frac{l\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}\right)=$$
$$\frac{\dfrac{k\partial^{-}d}{\partial^{-}d+\partial^{-}c}}{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}d+\partial^{-}c}+\dfrac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}}+\frac{\dfrac{l\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}{\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}+\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}d+\partial^{-}c}} \tag{40}$$

记 μ 的四阶偏负联系数为 $\partial^{4-}\mu$，则

$$\partial^{4-}\mu=\partial^{-}\left(\partial^{3-}\mu\right)=$$
$$\partial^{-}\left(\frac{\dfrac{k\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}}{\dfrac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}+\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}}+\frac{\dfrac{l\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}+\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}\right)=$$
$$\frac{\dfrac{\dfrac{l\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}+\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}}{\dfrac{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}}{\dfrac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}+\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}}+\dfrac{\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}+\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}} \tag{41}$$

注意到式 (41) 中的 $l=-1$，所以得五元联系数 $\mu=a+bi+cj+dk+el$ 的四阶全偏联系数 $\partial^{4\pm}\mu$，即

$$\partial^{4\pm}\mu=\partial^{4+}\mu+\partial^{4-}\mu=$$
$$\frac{\dfrac{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}+\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}}}{\dfrac{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}}{\dfrac{\partial^{+}a}{\partial^{+}a+\partial^{+}b}+\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}}+\dfrac{\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}}{\dfrac{\partial^{+}b}{\partial^{+}b+\partial^{+}c}+\dfrac{\partial^{+}c}{\partial^{+}c+\partial^{+}d}}}+$$
$$\frac{\dfrac{\dfrac{-\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}+\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}}{\dfrac{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}}{\dfrac{\partial^{-}c}{\partial^{-}b+\partial^{-}c}+\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}}+\dfrac{\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}{\dfrac{\partial^{-}d}{\partial^{-}c+\partial^{-}d}+\dfrac{\partial^{-}e}{\partial^{-}d+\partial^{-}e}}} \tag{42}$$

把 $\partial^{+}a=\dfrac{a}{a+b}$、$\partial^{+}b=\dfrac{b}{b+c}$、$\partial^{+}c=\dfrac{c}{c+d}$、$\partial^{+}d=\dfrac{d}{d+e}$、$\partial^{-}b=\dfrac{b}{a+b}$、$\partial^{-}c=\dfrac{c}{b+c}$、$\partial^{-}d=\dfrac{d}{c+d}$、$\partial^{-}e=\dfrac{e}{d+e}$ 代入式 (42) 就得到具体数值。也就是说，式 (42) 是一个没有不确定示性系数的实数，其物理意义是：当 $\partial^{4\pm}\mu>0$ 时，表明五元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势是正向趋势；当 $\partial^{4\pm}\mu<0$ 时，表明五元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势是负向趋势；当 $\partial^{4\pm}\mu=0$ 时，表明五元联系数 μ 的系统在微观层次上的演化趋势处在正负临界状态。

3 反偏联系数

定义 10 已知 n 元联系数 μ 的偏联系数为 $\partial^{(n-1)\pm}\mu$，求这个 n 元联系数 μ，称这个计算函数为反偏联系数，记为 $\mathrm{arc}(\partial^{(n-1)\pm}\mu)$，计算时也可直接写成 $\mathrm{arc}\partial^{(n-1)\pm}\mu$。

显然，求一个 n 元联系数 μ 的偏联系数 $\partial^{(n-1)\pm}\mu$ 与计算这个偏联系数的反偏联系数 $\mathrm{arc}\partial^{(n-1)\pm}\mu$ 是一对互逆运算，不仅相互检验计算过程中是否存在计算错误，更重要的是其中的物理意义：偏联系数指示出当前的联系数系统在微观层次上的状态 (由联系分量所确定的状态) 存在何方向多大程度的演化趋势，反偏联系数则是在已知联系数系统在微观层次上存在何方向多大程度的演化趋势条件下去反推该联系数所在宏观状态 (由联系分量所确定的状态)，因此是一种“宏观状态和微观趋势”的互逆运算[57]。

但是反偏联系数运算 $\mathrm{arc}\partial^{(n-1)\pm}\mu$ 比偏联系数运算 $\partial^{(n-1)\pm}\mu$ 复杂，需要作进一步研究。

4 偏联系数算法研究的若干新思路

4.1 加权偏联系数

北京师范大学研究生易测吉在 2018 年第 6 期全国偏联系数专题高级讲研班上提出，联系数中不同层次的联系分量之间的层次迁移，也可能存在一个联系分量在一次层次迁移中，只有其中的一部分参与层次迁移的情况。经我们研究，基于易测吉思路形成的偏联系数算法与第 3 章所定义的偏联系数算法有不同，由这种新算法得到的偏联系数是否可以称为加权偏联系数，待进一步研究。

4.2 基于相互作用的全偏联系数

赵克勤在 2018 年第 6 期全国偏联系数专题高级讲研班上还讲到联系数中相邻联系分量以乘积形式表示的相互作用联系数，基此情况，给定一个 $n(n\geqslant 2)$ 元联系数，可以衍生出 $k(k\geqslant 1)$ 个 $n+k$ 元联系数；$n+k$ 元联系数的 $n+k-1$ 阶全偏联系数，显然是 $n(n\geqslant 2)$ 元联系数的 $n-1$ 阶全偏联系数的细化，但其计算过程也较复杂，需要进一步研究。

最近，金菊良等[58] 又提出效应全偏联系数，并把其用于水资源评价，也需进一步研究。

5 应用举例

例 3 随机抽取某广播电视大学 2016 级行政管理专业 30 名学生 7 门课程成绩 (见表 1)，试用

偏联系数计算这 7 门成绩的提高趋势, 其中 x_1 为应用写作, x_2 为英语, x_3 为管理学基础, x_4 为中国特色社会主义理论, x_5 为开放教育入学指南, x_6 为西方行政制度, x_7 为地域文化。

表 1　30 位学员 $x_1 \sim x_7$ 课程成绩

Table 1　30 students' $x_1 \sim x_7$ course results

序号	姓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	刘	93	65	84	81	100	81	95
2	宋	96	89	86	88	100	73	94
3	张	96	90	81	87	100	66	86
4	刘	88	77	90	89	97	72	95
5	马	94	94	90	88	100	81	94
6	郑	90	76	80	88	99	75	94
7	王	96	87	85	88	100	72	86
8	陈	96	68	84	82	99	79	79
9	李	95	86	84	87	100	76	95
10	张	93	86	78	87	100	75	86
11	张	91	78	72	84	95	74	96
12	阎	91	84	80	83	98	77	96
13	任	98	62	82	87	87	76	82
14	毛	89	81	79	86	100	74	93
15	李	85	88	82	86	99	82	95
16	李	96	84	83	86	100	65	95
17	王	94	73	89	86	100	75	81
18	刘	96	72	89	89	99	78	94
19	张	95	89	92	89	100	79	95
20	冯	97	94	92	89	100	78	95
21	郭	70	62	70	84	20	33	0
22	沈	96	88	86	87	100	78	95
23	张	93	86	81	87	100	76	93
24	杨	82	88	83	86	99	82	94
25	赵	85	87	87	86	100	81	95
26	王	85	93	87	86	98	73	95
27	杨	85	73	80	85	98	68	86
28	刘	96	81	83	87	100	68	94
29	张	70	63	84	79	98	80	94
30	李	70	75	84	88	96	0	0

解　1) 设置并定性 A(同)、B(偏同)、C(中)、D(偏反)、E(反), 联系分量, 为此令 91 ~ 100 为优 (同), 81 ~ 90 为良 (偏同), 71 ~ 80 为中 (中), 60 ~ 70 为一般 (偏反), 60 以下为差 (反), 也就是把属于优的成绩记入 A, 属于良的成绩记入 B, 属于中的成绩记入 C, 属于一般的成绩记入 D, 属于差的成绩记入 E, 据此得到 7 门课程成绩的五元联系数:

$$u(x_1)=19+8i+0j+3k+0l$$
$$u(x_2)=3+15i+7j+5k+0l$$
$$u(x_3)=2+22i+5j+1k+0l$$
$$u(x_4)=0+29i+1j+0k+0l$$
$$u(x_5)=28+1i+0j+0k+1l$$
$$u(x_6)=0+5i+19j+4k+2l$$
$$u(x_7)=21+6i+1j+0k+2l$$

2) 把上述五元联系数归一化处理, 得:

$$\mu(x_1)=0.6333+0.2667i+0j+0.1k+0l$$
$$\mu(x_2)=0.1+0.5i+0.2333j+0.1667k+0l$$
$$\mu(x_3)=0.0667+0.7333i+0.1667j+0.0333k+0l$$
$$\mu(x_4)=0+0.9667i+0.0333j+0k+0l$$
$$\mu(x_5)=0.9333+0.0333i+0j+0k+0.0333l$$
$$\mu(x_6)=0+0.1667i+0.6333j+0.1333k+0.0667l$$
$$\mu(x_7)=0.7+0.2i+0.0333j+0k+0.0667l$$

3) 按式 (42) 计算全偏联系数, 并对全偏联系数的大小作出排序, 得

$$\partial^{4\pm}\mu(x_1)=0.226\,2$$
$$\partial^{4\pm}\mu(x_2)=0.310\,2$$
$$\partial^{4\pm}\mu(x_3)=0.323\,2$$
$$\partial^{4\pm}\mu(x_4)=0$$
$$\partial^{4\pm}\mu(x_5)=0.247\,8$$
$$\partial^{4\pm}\mu(x_6)=-0.775\,4$$
$$\partial^{4\pm}\mu(x_7)=-0.383\,5$$

由此可知, 课程 x_3 的成绩提高趋势最好 (上升), 其次是课程 x_2(上升), 第 3 是课程 x_5(上升), 第 4 是课程 x_1(上升), 第 5 是课程 x_4(临界), 第 6 是课程 x_7(下降), 第 7 是课程 x_6(下降)。

6　讨论

1) 关于事物微观运动的数学刻画。众所周知, 客观事物处于相互联系和运动变化之中, 如何定量刻画事物的相互联系和运动变化, 是包括人工智能学者在内的众多科技人员的研究课题。文献 [1–60] 和本文的工作表明, 基于集对分析理论的联系数及其偏联系数是定量刻画事物相互联系和运动的一个新数学工具, 其理由: 首先, 偏联系数把联系数中的各个联系分量不再看作相互独立的量, 而是假设成一定条件下相互生成的量, 理论上, 这种假设成立; 其次, 借助偏联系数的算法, 揭示联系数中联系分量的相互生成是在微观层次上的一对矛盾运动, 这也可以接受; 因为哲学、物理学和无数事实告诉我们, 矛盾普遍存在, 运动成对进行, “作用力与反作用力大小相等, 方向相反, 作用在 2 个不同的物体上”已是一种科学常识; 再次, 偏联系数着眼于事物的运动在微观层次上的定量刻画。科学史表明, 牛顿的微积分

在刻画事物宏观层次上的运动已取得巨大成功,但人们对事物在微观层次上的运动观测和测量则受制于海森堡的“测不准原理”;正是在这一点上,集对分析借助联系数对不确定性“客观承认、系统描述、定量刻画、具体分析”[59],使得基于联系数的偏联系数算法能够刻画出事物在微观层次上的矛盾运动。当然,微观与宏观是一个相对的划分,文献 [19] 中指出,“在生物学中,全体是宏观,个体就是微观;个体是宏观,细胞就是微观;细胞是宏观,基因就是微观;在物理化学中,肉眼直接见到的是宏观,要在显微镜下看到的是微观;在低倍显微镜下看到的是宏观,在高倍显微镜下看到的是微观;在时间序列中,世纪是宏观,年度就是微观;年度是宏观,月度是微观,小时是宏观,分钟就是微观;分钟是宏观,秒是微观,如此等等”。

正是宏观与微观划分的相对性,导致事物在宏观层次上相对静止的同时,在微观层次上依然发生着细微尺度上的变化和运动,如实刻画事物宏观状态的联系数因而能借助偏联系数的计算刻画事物在微观层次上的运动规律。

2) 关于全偏联系数。由第 2 章可知,计算一个给定 $n(n\geqslant 2)$ 元联系数的偏联系数时,需要同时计算其 $n-1$ 阶偏正联系数和 $n-1$ 阶偏负联系数及其代数和,才能如实反映该 n 元联系数的 n 个联系分量在微观层次上的矛盾运动及其结果,这里说的代数和就是给定 n 元联系数的全偏联系数,概念清晰,意义明确。文献 [52] 把 $\partial c=c/(a+c)$ 看成 μ 的全偏联系数,错误地理解全偏联系数,诱导出错误的结论,这说明对基本概念的正确理解极为重要。

3) 关于偏联系数的生成机制和时态。在偏联系数计算过程中,需要注意各阶偏联系数中各联系分量的生成机制和时态。一般地说,用分式表示的某阶偏正 (负) 联系数中的联系分量,其分子的状态指过程完成时所处的状态,分母的状态则是过去进行时的状态,例如三元联系数 $\mu=a+bi+cj$,其一阶偏正联系数为

$$\partial^{+}\mu=\partial^{+}a+i\partial^{+}b=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}i$$

式中:第一个用分式表示的联系分量 $\frac{a}{a+b}$,分子 a 的状态是过程完成时所处的状态,即当前状态,分母中的 a 则属于过去进行时状态;同理,第二个用分式表示的联系分量 $\frac{b}{b+c}i$ 中的分子 bi 是过程完成时所处的状态,即当前状态,由于这个当前状态是具有不确定性的状态,故按集对分析理论,分子中的 b 带有表示不确定取值的示性系数 i,而分母中的 b 则与 c 处在同一层次且属于过去进行时状态,所以不带 i。

用同样的道理可以合理地处置例 3 中五元联系数的偏联系数计算过程中遇到的“$\frac{0}{0}$”如何运算的问题,例如 $\mu(x_4)=0+0.966\,7i+0.033\,3j+0k+0l$,按式 (34),其一阶偏正联系数为 $\partial^{+}\mu=\partial^{+}a+i\partial^{+}b+j\partial^{+}c+k\partial^{+}d$,其中$\partial^{+}a=\frac{a}{a+b},\partial^{+}b=\frac{b}{b+c},\partial^{+}c=\frac{c}{c+d}$,$\partial^{+}d=\frac{d}{d+e}$,由于 $\mu(x_4)$ 中的 $d=0,e=0$,代入 $\partial^{+}d=\frac{d}{d+e}$得 $\partial^{+}d=\frac{0}{0+0}$,这个 $\frac{0}{0+0}$ 式子在初等数学中被认为是一个无意义的式子 (零不能作除数),在高等数学中被认为是一个不确定式,但按前面的讨论可知,分子 0 是代表 $0k$ 的 0,这个 0 是当前状态的 0,是确定的;分母中代表 $0l$ 的 0 也是确定的 0,分母中代表 $0k$ 的 0 虽然与代表 $0l$ 的 0 处在同一个层次,却是一个在变化着的 0,按微积分思想,这个在变化着的 0,本质上是一个以零为极限的无穷小量 ε,由此可知分母实质上是 $\varepsilon+0=\varepsilon$,由此得到 $\frac{0}{0+0}=\frac{0}{\varepsilon+0}=\frac{0}{\varepsilon}=0$,也就是 $\partial^{+}d=0$。这一结果从问题本身的角度也说得通,因为 $\mu(x_4)$ 说明当前状态下,确实没有出现 60 ~ 70 分之间的成绩。同理,可以处置在计算 $\mu(x_4)$ 的一阶偏负联系数时出现 $\frac{0}{0+0}$ 的情况。

4) 不难推知,第 4 章中有关加权偏联系数和效应全偏联系数的算法,以及基于相互作用的偏联系数算法,要比第 2 章中介绍的偏联系数基本算法复杂,由此推知反加权偏联系数、反效应全偏联系数、反相互作用偏联系数的算法更复杂,限于篇幅,本文没有展开介绍,特此说明。

5) 偏联系数算法是一种新的智能算法。首先,从信息利用的角度看,偏联系数算法有效地挖掘了联系数中联系分量的动态信息,这种动态信息反映出联系数所刻画的研究对象的本质。因为客观事物总是处于动态变化之中,某一时刻相对静止的宏观状态与这种状态在微观层次上的变化趋势共存在一个系统中是所有研究对象的共同属性,借助联系数的偏联系数计算,能够看到系统在宏观静态下的微观动态,显然是一种智能;其次,从系统的角度看,偏联系数算法揭示了对象系统线性与非线性的关系,因为从形式上看,联系数中的各个联系分量可以有序地放置在一根水平轴上,具有明显的线性特征,但式 (6) ~式 (42) 表明,偏联系数所展示的图象是一幅非线性图象;再次,从人工智能技术创新的角度看,基

于偏联系数的聚类、模式识别、系统综合评价决策与风险防控以及社交网络中的隐私保护研究,也在一定意义上属于智能技术的范畴,偏联系数算法因而是一种新的智能算法,需要作深入系统研究。

6) 运动需要能量,无论这种运动处在宏观层次还是微观层次。偏联系数及其算法既然刻画了联系数中联系分量之间的矛盾运动,人们自然会问,驱使这种运动的能量又是什么性质的能量?回答是"信息能"。"信息能"是赵克勤在 2015 年 7 月在杭州举办的第 3 期非传统安全集对分析研学班上提出的一个概念,认为信息是物质和能量相互作用的产物,信息具有能量,称为信息能[15, 60]。联系数是刻画研究对象某个特定状态的一个信息系统,本身蕴含着一定的信息能,且具体蕴含在联系数中联系分量所在不同层次的系统结构中;偏联系数及其算法在一定程度上开发了这种"信息能",得到的结果让人们从系统的一组宏观状态参数中认识和掌握这种状态在微观层次上的演化趋势,从而把联系数中的"信息能"在一定程度上转化成"智能";但更多关于"信息能"转化成"智能"的问题待深入研究。

7 结束语

联系数是一种结构函数,也是集对的特征函数,具有系统和数的双重特性。偏联系数是联系数的一种伴随函数,其计算过程和计算结果刻画了联系数中全体联系分量在微观层次上的相互联系、相互制约和相互生成的矛盾运动,具有丰富的系统信息。本文从应用的角度梳理了二元到五元联系数的偏联系数计算,指出规范地计算一个联系数的偏联系数是得出正确结果的一个前提,文中给出的算法可以推广到 $n(n>5)$ 元联系数的偏联系数计算。此外,也简要地介绍了近期有关偏联系数的若干创新思路和创新算法。

数学是人工智能的基础。偏联系数是一个新的数学概念,由于人工智能面临的实际问题众多,偏联系数计算又是一种新的信息处理算法,因而有许多问题需要作进一步的系统深入研究。

参考文献:

[1] 赵克勤. 集对分析对不确定性的描述和处理 [J]. 信息与控制, 1995, 24(3): 162–166.
ZHAO Keqin. Disposal and description of uncertainties based on the set pair analysis[J]. Information and control, 1995, 24(3): 162–166.

[2] 赵克勤. 集对分析及其初步应用 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2000.

[3] 王文圣, 李跃清, 金菊良, 等. 水文水资源集对分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[4] 杨红梅. 基于联系数的梯形直觉与非直觉模糊决策算法与应用 [J]. 中北大学学报(自然科学版), 2012, 33(6): 688–694.
YANG Hongmei. Operation and application of trapezoidal intuitionistic fuzzy number and unintuitionistic fuzzy decision method based on correlate[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2012, 33(6): 688–694.

[5] 杨红梅. 集对分析在我国经济增长模糊规则提取中的应用 [J]. 运筹与管理, 2013, 22(3): 194–200.
YANG Hongmei. The application of set pair analysis in fuzzy rule extraction of domestic economy growth[J]. Operations research and management science, 2013, 22(3): 194–200.

[6] 杨红梅. 基于二元联系数的三角模糊数直觉模糊集多属性决策 [J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 2015, 29(2): 13–19.
YANG Hongmei. Multiple attribute decision making of triangular fuzzy number intuitionistic fuzzy set based on two-element connection number[J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2015, 29(2): 13–19.

[7] 赵克勤, 赵森烽. 奇妙的联系数 [M]. 北京: 知识产权出版社, 2014.

[8] 刘秀梅, 赵克勤. 区间数决策集对分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[9] 蒋云良, 赵克勤, 刘以安, 等. 信息处理集对分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.

[10] 王万军, 晏燕. 不确定信息处理的集对分析研究与应用 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 2015.

[11] 汪明武, 金菊良, 周玉良. 集对分析耦合方法与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[12] 潘争伟, 吴成国, 金菊良. 水资源系统评价与预测的集对分析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.

[13] 刘保相. 粗糙集对分析理论与决策模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[14] 汪明武, 金菊良. 联系数理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[15] 蒋云良, 赵克勤. 人工智能集对分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[16] 赵克勤, 米红. 非传统安全与集对分析 [M]. 北京: 知识产权出版社, 2010.

[17] 蒋云良, 徐从富. 集对分析理论及其应用研究进展 [J]. 计算机科学, 2006, 33(1): 205–209.
JIANG Yunliang, XU Congfu. Advances in set pair analysis theory and its applications[J]. Computer science,

2006, 33(1): 205–209.

[18] 赵克勤. 集对分析的不确定性系统理论在 AI 中的应用 [J]. 智能系统学报, 2006, 1(2): 16–25.
ZHAO Keqin. The application of uncertainty systems theory of set pair analysis (SPU) in the artificial intelligence[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2006, 1(2): 16–25.

[19] 赵克勤. 二元联系数 *A+Bi* 的理论基础与基本算法及在人工智能中的应用 [J]. 智能系统学报, 2008, 3(6): 476–486.
ZHAO Keqin. The theoretical basis and basic algorithm of binary connection *A+Bi* and its application in AI[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2008, 3(6): 476–486.

[20] 赵克勤. 成对原理及其在集对分析 (SPA) 中的作用与意义 [J]. 大自然探索, 1998, 17(4): 90.
ZHAO Keqin. The function and meaning of Pair principle in the Set Pair Analysis[J]. Discovery of nature, 1998, 17(4): 90.

[21] 赵克勤. SPA 的同异反系统理论在人工智能研究中的应用 [J]. 智能系统学报, 2007, 2(5): 20–35.
ZHAO Keqin. The application of SPA-based identical-discrepancy-contrary system theory in artificial intelligence research[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2007, 2(5): 20–35.

[22] PAN Zhengwei, WANG Yanhua, JIN Juliang, et al. Set pair analysis method for coordination evaluation in water resources utilizing conflict[J]. Physics and chemistry of the earth, parts A/B/C, 2017, 101: 149–156.

[23] YU Furong, QU Jihong, LI Zhiping, et al. Application of set pair analysis based on the improved five-element connectivity in the evaluation of groundwater quality in Xuchang, Henan Province, China[J]. Water science and technology: water supply, 2017, 17(3): 632–642.

[24] YAN Fang, XU Kaili. Application of a cloud model-set pair analysis in hazard assessment for biomass gasification stations[J]. PLoS one, 2017, 12(1): e0170012.

[25] YAN Fang, XU Kaili, LI Deshun, et al. Hazard assessment for biomass gasification station using general set pair analysis[J]. Bioresources technology, 2016, 11(4): 8307–8324.

[26] TAN Chong, SONG Yi, CHE Heng. Application of set pair analysis method on occupational hazard of coal mining[J]. Safety science, 2017, 92: 10–16.

[27] LI Chunhui, SUN Lian, JIA Junxiang, et al. Risk assessment of water pollution sources based on an integrated *k*-means clustering and set pair analysis method in the region of Shiyan, China[J]. Science of the total environment, 2016, 557/558: 307–316.

[28] WANG Ya, ZHOU Lihua. Assessment of the coordination ability of sustainable social-ecological systems development based on a set pair analysis: a case study in Yanchi County, China[J]. Sustainability, 2016, 8(8): 733.

[29] WANG Mingwu, XU Xinyu, LI Jian, et al. A novel model of set pair analysis coupled with extenics for evaluation of surrounding rock stability[J]. Mathematical problems in engineering, 2015, 2015: 892549.

[30] ZHANG Jian, YANG Xiaohua, LI Yuqi. A refined rank set pair analysis model based on wavelet analysis for predicting temperature series[J]. International journal of numerical methods for heat and fluid flow, 2015, 25(5): 974–985.

[31] YANG Xiaohua, SUN Boyang, ZHANG Jian, et al. Hierarchy evaluation of water resources vulnerability under climate change in Beijing, China[J]. Natural hazards, 2016, 84(Suppl 1): 63–76.

[32] XIE Xuecai, GUO Deyong. Human factors risk assessment and management: process safety in engineering[J]. Process safety and environmental protection, 2018(113): 467–482.

[33] WEI Chao, DAI Xiaoyan, YE Shufeng, et al. Prediction analysis model of integrated carrying capacity using set pair analysis[J]. Ocean and coastal management, 2016, 120: 39–48.

[34] BAO Danwen, ZHANG Xiaoling. Measurement methods and influencing mechanisms for the resilience of large airports under emergency events[J]. Transportmetrica A: transport science, 2018, 14(10): 855–880.

[35] GARG H, KUMAR K. An advanced study on the similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on the set pair analysis theory and their application in decision making[J]. Soft computing, 2018, 22(15): 4959–4970.

[36] YAN Fang, XU Kaili. A set pair analysis based layer of protection analysis and its application in quantitative risk assessment[J]. Journal of loss prevention in the process industries, 2018, 55: 313–319.

[37] LI Peiyue, QIAN Hui, WU Jianhua. Application of set pair analysis method based on entropy weight in groundwater quality assessment−a case study in Dongsheng City, Northwest China[J]. Journal of chemistry, 2010, 8(2): 851–858.

[38] ZENG Jiajun, HUANG Guoru. Set pair analysis for karst waterlogging risk assessment based on AHP and entropy weight[J]. Hydrology research, 2017, 49(4): 1143–1155.

[39] KUMAR K, GARG H. Connection number of set pair analysis based TOPSIS method on intuitionistic fuzzy sets and their application to decision making[J]. Applied intelligence, 2018, 48(8): 2112–2119.

[40] GARG H, KUMAR K. Some aggregation operators for linguistic intuitionistic fuzzy set and its application to group decision-making process using the set pair analysis[J]. Arabian journal for science and engineering, 2018, 43(6): 3213–3227.

[41] FENG Yixiong, LU Runjie, GAO Yicong, et al. Multi-objective optimization of VBHF in sheet metal deep-drawing using Kriging, MOABC, and set pair analysis[J]. The international journal of advanced manufacturing technology, 2018, 96(9/10/11/12): 3127–3138.

[42] 赵克勤. 偏联系数 [C]//中国人工智能进展 2005. 北京: 北京邮电大学出版社, 2005: 884–885.
ZHAO Keqin. Partial connection number[C]//Progress of Artificial Intelligence 2005. Beijing: Progress of Beijing University of Posts and Telecommunications (BUPT) Publishing House, 2005: 884–885.

[43] 施志坚, 王华伟, 王祥. 基于多元联系数集对分析的航空维修风险态势评估 [J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(3): 588–594.
SHI Zhijian, WANG Huawei, WANG Xiang. Risk state evaluation of aviation maintenance based on multiple connection number set pair analysis[J]. Systems engineering and electronics, 2016, 38(3): 588–594.

[44] 李聪, 陈建宏, 杨珊, 等. 五元联系数在地铁施工风险综合评价中的应用 [J]. 中国安全科学学报, 2013, 23(10): 21–26.
LI Cong, CHEN Jianhong, YANG Shan, et al. Application of five-element connection number to comprehensive evaluation of risks involved with subway construction[J]. China safety science journal, 2013, 23(10): 21–26.

[45] 谢红涛, 李波, 赵云胜. 基于联系数的地铁隧道施工邻近建筑物风险评价 [J]. 工业安全与环保, 2014, 40(7): 16–19.
XIE Hongtao, LI Bo, ZHAO Yunsheng. Risk assessment of neighboring building in metro tunneling construction based on connection number[J]. Industrial safety and environmental protection, 2014, 40(7): 16–19.

[46] 马成正, 王洪德. 联系数在地铁车站火灾安全风险评价中的应用 [J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2015, 37(1): 26–31.
MA Chengzheng, WANG Hongde. Application of connection number to safety risk evaluation of fire accident in subway station[J]. Journal of Liaoning Technical University (Natural Science Edition), 2015, 37(1): 26–31.

[47] 金菊良, 沈时兴, 潘争伟, 等. 水资源集对分析理论与应用研究进展 [J]. 华北水利水电大学学报 (自然科学版), 2017, 38(4): 54–66.
JIN Juliang, SHEN Shixing, PAN Zhengwei, et al. Advances in theoretical and applied research on set pair analysis method for water resources system[J]. Journal of North China University of Water Resources and Electric Power (Natural Science Edition), 2017, 38(4): 54–66.

[48] 李子彪, 张静, 李林琼. 区域创新极创新态势测度方法研究: 对北京的集对分析 [J]. 科技进步与对策, 2016, 33(15): 111–117.
LI Zibiao, ZHANG Jing, LI Linqiong. Study on the measure method of regional innovation poles innovation trend based on set pair analysis[J]. Science and technology progress and policy, 2016, 33(15): 111–117.

[49] 李柏洲, 李新. 基于集对分析的企业技术依赖预警及其演化趋势测度 [J]. 运筹与管理, 2015, 24(2): 262–271.
LI Baizhou, LI Xin. Technology dependence early warning and evolution tendency evaluation based on set pair analysis[J]. Operations research and management science, 2015, 24(2): 262–271.

[50] 吴亭. 五元联系数在学生成绩发展趋势分析中的应用 [J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(5): 53–59.
WU Ting. Application on the analysis of developmental trend of the student mark with five-element partial connection number[J]. Mathematics in practice and theory, 2009, 39(5): 53–59.

[51] 赵金楼, 高宏玉, 成俊会. 基于三元联系数的网络舆情传播中主体参与意愿演化评价方法 [J]. 情报科学, 2017, 35(8): 118–120, 140.
ZHAO Jinlou, GAO Hongyu, CHENG Junhui. Research on evolution of participation willingness in network public opinion: based on three-element connection number[J]. Information science, 2017, 35(8): 118–120, 140.

[52] 杨斯玲, 蒋根谋. 基于约束理论和集对分析的 EPC 建筑供应链风险管理 [J]. 技术经济, 2016, 35(8): 111–117.
YANG Siling, JIANG Genmou. Risk management of EPC construction supply chain based on theory of constraints and set pair analysis[J]. Technology economics, 2016, 35(8): 111–117.

[53] 高晓辉. 基于联系数的老年人健康状态潜在发展趋势分析 [J]. 中国卫生统计, 2012, 29(2): 265–266.
GAO Xiaohui. Analysis of medical quality development trend based on the concomitant function of contact number[J]. Chinese journal of health statistics, 2012, 29(2): 265–266.

[54] 周兴慧, 张吉军. 基于五元联系数的风险综合评价方法及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(8): 2169–2176.
ZHOU Xinghui, ZHANG Jijun. Risk comprehensive evaluation method and its application based on the five-element connection number[J]. Systems engineering -theory and practice, 2013, 33(8): 2169–2176.

[55] 晏燕, 王万军. 偏联系数隐私风险态势评估方法 [J]. 计

算机工程与应用, 2018, 54(10): 143–148.
YAN Yan, WANG Wanjun. Privacy risk situation assessment method based on partial connection numbers[J]. Computer engineering and applications, 2018, 54(10): 143–148.
[56] 张萌萌, 刘以安, 宋萍. 偏联系数聚类和随机森林算法在雷达信号分选中的应用 [J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(6): 062604.
ZHANG Mengmeng, LIU Yian, SONG Ping. Applications of partial connection clustering algorithm and random forest algorithm in radar signal sorting[J]. Laser & optoelectronics progress, 2019, 56(6): 062604.
[57] 赵克勤. 反偏联系数 [C]//中国人工智能学会第 12 届全国学术年会论文汇编. 哈尔滨, 中国, 2007: 66−67.
[58] 金菊良, 张浩宇, 宁少尉, 等. 效应全偏联系数及其在区域水资源承载力评价中的应用 [J]. 华北水利水电大学学报(自然科学版), 2019, 40(1): 1–8.
JIN Juliang, ZHANG Haoyu, NING Shaowei, et al. Effect full partial connection number and its application in evaluation of regional water resources carrying capacity[J]. Journal of North China University of Water Resources and Electric Power (Natural Science Edition), 2019, 40(1): 1–8.
[59] 赵克勤, 宣爱理. 集对论:一种新的不确定性理论方法与应用 [J]. 系统工程, 1996, 14(1): 16–23, 72.
ZHAO Keqin, XUAN Aili. Set pair theory: A new theory method of non-define and its applications[J]. Systems engineering, 1996, 14(1): 16–23, 72.
[60] 蒋云良, 赵克勤. 集对分析在人工智能中的应用与进展 [J]. 智能系统学报, 2019, 14(1): 28–43.
JIANG Yunliang, ZHAO Keqin. Application and development of set pair analysis in artificial intelligence: a survey[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(1): 28–43.

作者简介:

杨红梅, 女, 1965 年生, 副教授, 山西省现代远程教育学会第 6 届理事, 主要研究方向为数学与不确定性信息处理。发表论文 10 余篇, 出版专著 1 部。

赵克勤, 男, 1950 年生, 研究员, 中国人工智能学会第 3、4、5 届理事, 人工智能基础专业委员会副主任, 主要研究方向为信息处理、集对分析、联系数学、联系科学。先后提出集对分析、联系数学、联系科学。发表论文 100 余篇, 出版专著 4 部。