**DOI**: 10.11992/tis.201810021
**网络出版地址**: http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20190527.1345.006.html

# 因素表示的信息空间与广义概率逻辑

汪培庄[1]，周红军[2]，何华灿[3]，钟义信[4]

（1. 辽宁工程技术大学 智能工程与数学研究院，辽宁 阜新 123000; 2. 陕西师范大学 数学学院，陕西 西安 710062; 3. 西北工业大学 计算机学院，陕西 西安 710072; 4. 北京邮电大学 智能科学技术中心，北京 100876）

**摘　要**：国内外近年来所提出的广义概率逻辑对于人工智能的发展有重要意义。能否反映变换演化的实际场景，使逻辑判断能够灵活变通，这是广义概率逻辑发展的关键。为了解决这一问题，本文的目是以信息空间作为逻辑与实际场景的接口。有了这个接口，逻辑判断就能反映变幻莫测的实际场景。本文的方法是用因素空间来定义表现论域以形成新的信息空间，将谓词中的变元取为因素，在已有的逻辑系统中加上本文所提出的背景公理，所有的推理都是在一定背景之下的推理，不同的背景会推出不同的结论。结果是新的逻辑既能维系 Stone 表示定理的表现要求，又能变得更加灵活有效。结论能使广义概率逻辑更有效地服务于人工智能。为了配合机制主义人工智能的需要，本文还特别提出了语法-语用对接的方法和目标驱动的逆向推理设想，最后为泛逻辑的 3 种连续算子对进行了数学证明。

**关键词**：机制主义人工智能；泛逻辑；计量概率逻辑；因素空间；模糊集；可能性空间；谓词演算；随机集落影
**中图分类号**：TP18　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673−4785(2019)05−0843−10

**中文引用格式**：汪培庄，周红军，何华灿，等. 因素表示的信息空间与广义概率逻辑 [J]. 智能系统学报，2019，14(5)：843–852.
**英文引用格式**：WANG Peizhuang, ZHOU Hongjun, HE Huacan, et al. Factorial information space and generalized probability logic[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(5): 843–852.

# Factorial information space and generalized probability logic

WANG Peizhuang[1], ZHOU Hongjun[2], HE Huacan[3], ZHONG Yixin[4]

(1. Institute of Intelligence Engineering and Math, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China; 2. College of Mathematics, Shannxi Normal University, Xi’an 710062, China; 3. School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi’an 710072, China; 4. Center for Intelligent Science and Technology, Beijing University of Posts Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract**: The generalized probabilistic logic proposed in recent years is of great significance to the development of artificial intelligence. Make flexible judgment that reflects the scene of actual transformation and evolution is the key to the development of the generalized probability logic. Considering this, this paper takes the information space as the interface between logic and actual scene. With this interface, logical judgment can reflect unpredictable real situations. The method in this paper is to use factors space to define the representation domain to form the information space. Then predicate variables are taken as factors, and background axioms are added into the existing logic system. Reasoning is taken under a certain background, different backgrounds will derive different conclusions. The result is that the new logic can not only maintain the rational requirement of the Stone representation theorem but can also make decisions more flexibly and effectively. The conclusion is that the generalized probabilistic logic can serve artificial intelligence more effectively. To meet the need of mechanistic artificial intelligence, this paper proposes the grammar-pragmatic docking method and the goal-driven backward reasoning. Finally, a mathematical proof is given for three couples of continuous operators in universal logic.

**Keywords**: mechanism based artificial intelligence; universal logic; econometric probability logic; factors space; fuzzy sets; possibility space; predicate calculus; random falling shadow

机制主义的人工智能理论抓住并提升了目前三大流派的共性，为人工智能理论的发展构建了

**收稿日期**：2018−10−17.　**网络出版日期**：2019−05−28.
**基金项目**：国家自然科学基金 (61350003, 60273087, 60873001).
**通信作者**：汪培庄. E-mail: peizhuangw@126.com.

一个统一的平台[1]。泛逻辑理论要在不确定性演化环境下对各种非经典逻辑进行统一的柔性归纳[2]。Lukasiewiez[3] 提出的多值逻辑和 Zadeh[4] 提出的模糊逻辑先后突破了布尔的二值逻辑，所引起反响至今还是方兴未艾。特别是，王国俊[5] 提出的计量逻辑、Schweizer 等[6] 提出的概率逻辑、周红军[7] 提升出的概率计量逻辑以及王国俊学派[8-11] 和徐扬[12] 在格值逻辑方面的工作。这些工作和何华灿的泛逻辑都与概率论有密切的联系，不妨统称为广义概率逻辑。概率论的出现改变了数学，广义概率逻辑的出现对逻辑发展有重要意义。

信息不同于物质，它在物理空间中不占位置，不具有不可入性。但是，“有这样一种学说：在物质世界与信息世界的对立统一中，物质在物理空间中具有不可入性和惯性，信息在可能性空间中也具有不可入性和惯性。这应当成为柔性逻辑的公理”[2]。这里提出了一个非常重要的概念“可能性空间”，究竟什么是可能性空间，它与概率论和模糊数学所提的可能性空间有什么联系与区别？什么是广义概率逻辑？广义概率逻辑的发展将面临什么问题？这些问题的深入探讨，将会对人工智能的发展带来重大的影响。本文就是要用因素空间的数学理论来把这些问题说清楚。

## 1 可能性空间

在前面曾提到，就像物质在物理空间中具有不可入性和惯性一样，信息在可能性空间中也具有不可入性和惯性。这两句话意义重大。信息是要占“地方”的，需要有空间，这个空间不在物质世界里，在认识主体的处理架构之中。

可能性空间在概率论和模糊数学中分别出现过两次。第一次，Kolmogorov 在 1936 年用公理化定义把概率定义成为像面积、体积和重量一样的测度，可加性测度是不可入性的产物，测度测量“占有”这位数学家第一次把信息概念与物质概念等同起来，在可能性空间中为事件争夺地盘。三十多年以后，模糊集的创始人 Zadeh[13] 也要把模糊概念放到可能性空间中来争夺地盘。

Kolmogorov 的可能性空间就是他所定义的基本空间 $\Omega$。这个空间对现代概率论来说具有特殊的重要性。Kolmogorov 把随机变量 $\xi$ 定义成为一个从 $\Omega$ 到实直线 $R$ 的可测映射，它把 $\Omega$ 中的概率传递到直线上形成各种类型的概率分布列、分布密度和分布函数，使古典概率突变成为现代概率论。问题是，随机变量所描述的是像降雨量和命中率这样一些不确定的现象，而映射却是一个非常严格的数学概念，对于 $\Omega$ 中的每一个点 $\omega$，必须有唯一确定的实数值 $\xi(\omega)$ 与之对应，怎样才能把随机的现象和严格的映射连在一起呢？关键就在基本空间的建立。Kolmogorov 的基本空间就是作者所提出的一个因素空间[14]，把所有对结果有影响的因素全部考虑进来，所考虑的因素越多，结果就越确定，作为一种数学抽象随机变量在 $\Omega$ 中最终会变成一个必然的映射。我们姑且不在哲学上对此进行评价，数学家就需要有这种魄力和手段。汪培庄[15] 明确地把基本空间 $\Omega$ 当作因素空间来研究，提出了因素概率论的思想。天下事物说来说去，就是因果二字，因果出理性，因果生逻辑。若 $A$ 则 $B$，$A$ 就是因，$B$ 就是果，逻辑就是因果。概率就是广义的因果律。概率都是相对于一定条件而言的。条件概率 $p(B|A)$ 就是推理句“若 $A$ 则 $B$”的真值：$p(B|A)=t(A\to B)$。

用因素空间描述概率论叫做因素概率论。每个可描述的发生因素 $f$ 都规定了一个相域 $I(f)$。例如，投掷一枚骰子，因素 $f$ 是出现的点数，它的相域是 $I(f)=\{1,2,3,4,5,6\}$。由于骰子具有 6 面对称性，我们把这样的发生因素叫做对称性因素。$I(f)$ 包含 6 个相，6 称为可能结果数。古典概率中有这样一条公理，即对称性公理。

**对称性公理** 具有可能结果数为 $n$ 的对称性因素 $f$，在它与其他发生因素独立的情况下，$n$ 种结果的发生都具有等可能性。若 $I(f)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $p(a_1)=p(a_2)=\cdots=p(a_n)=1/n$。

现代概率论的发展要归功于中心极限定理和各种概率分布的推导，但其根源是来自古典概率和样本平权公理：

**样本平权公理** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是关于随机变量 $\xi$ 的一组独立观察的样本点，如无特殊声明，则每个样本点都是平权的，亦即 $p(x_1)=p(x_2)=\cdots=p(x_m)=1/m$；每个样本各自平权地把 $1/m$ 的概率搬到因素空间中去争夺地盘，就形成了各种各样的概率分布。根据这一公理，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 被视为一组相互独立的与 $\xi$ 同分布的随机变量。

模糊数学也强调可能性空间，这种可能性空间与概率论不同，所有主观性测度都是非可加的。如果把不可入性狭义地理解为测度的可加性，那么非可加的测度是可入的。但是，非可加的测度照样是要占“地方”的，汪培庄把模糊集定义所在的论域 $U$ 当作可能性空间，研究了模糊性与随机性的区别和联系，发现论域 $U$ 上的模糊性可以转化为幂 $2^U$ 上的随机性，提出了模糊落影理论[15]。证明了主观性测度与概率测度之间的同构对应定

理, 说明模糊信息在因素空间中也具有不可入性。

总之, 概率论与模糊数学都特别强调可能性空间。在英文中概率与可能性是一个字 probability, 为了与概率相区别, Zadeh 把模糊分布的可能性改称为 possibility[13], 不幸的是, 这个词的中文翻译也是可能性。西方人对 probability 和 possibility 的理解是有分别的, probability 是预测中某种结果出现的可能性, 而 possibility 是识别中某种类别出现的可能性。随机性出现在预测过程中, 当事件还没有发生的时候, 大家要猜测将会是什么结果, 这时就要用到概率, 事情一旦发生, 所占的位置马上腾空, 可能性空间马上关闭而转换成另一个可能性空间。面对一个已经发生的事情, 要去判断这是什么的时候, 如果说不清楚, 这就出现了模糊性, 有多种 possibility 等我们去选择, 这些 possibility 也要在这个新的可能性空间中来争夺地盘。为了避免文字上的混淆, 我们最好把可能性空间改称为信息空间。概率论的可能性空间是以发生因素所组成的信息空间, 模糊数学的可能性空间是由识别因素所组成的信息空间。在信息科学领域里, 因素 $f$ 的相域 $I(f)$ 就是信息域, 因素空间也就是信息空间。

概率论的产生是数学上的重大事件, 相应的广义概率逻辑的发展将是逻辑学中的一个重大事件。为了促进这一发展, 我们需要在广义概率逻辑中引用因素表现论域。

## 2 简化的 Stone 表示定理与因素表现论域

在这一章里, 我们需要对经典逻辑作一点反思, 弄清 Stone 拓扑表示定理的思想实质, 强调谓词变元的因素特质, 用因素空间的思想对数理逻辑开拓一种新的思路。

### 2.1　命题演算的局限性

布尔命题演算系统 $L=(S,F(S),\Gamma,W,\mathrm{MP})$ 有 5 个要素: 真值集 $W$ 由 1、0 两个值所构成; $S$ 中的原子公式 $p$ 代表命题, 命题是“能够判断是非的一句话”; $F(S)$ 是公式集, 它的形成就规定了或、且、非 3 种布尔运算; $\Gamma$ 是公理, 它在推理规则 MP 下只演绎定理, 不能问它是怎样来的。

这个系统对经典逻辑来说是自给自足的了。但是, 命题演算在语言上存在着一个大问题: 语言学上的每一句话都有主语和谓语, 一个判断句的谓语是“be”, 宾语是 be 所连接的一个名词、代名词或形容词, 它表示一个概念。要问主语是否符合这个概念, 便形成一个判断。有人主张把 be+概念合称为一个谓词, 我们赞同并采用此说法。概念是命题的核心, 主语是命题的立足点。主语不同, 无法进行推理, 我是中国人推不出安倍晋三是亚洲人。绕了一个大圈子, 人们发现, 如果把主语事先规定死了的话, 则命题演算就是概念演算。在进行推理的时候, 如无特别声明, 参加演算的命题必须是同一个对象, 不能有变! 命题演算的局限性是很大的。

谓词演算的朴素思想本来是很简单的 (绝不像一阶谓词逻辑定义得那么烦琐): 将命题 $p$ 改写成 $p(x)$, “$x$ 是 $p$”,它是可以判断真伪的一句话, 叫做一个谓词。$p$ 叫做概念, $x$ 叫做对象, 或叫变元。就像代数是带变元的算术一样, 谓词是带变元的命题。这是布尔逻辑的一大进步。

### 2.2　Stone 拓扑表示定理

谓词演算带给逻辑学的一项最重要的启迪就是: 逻辑蕴涵的本质就是集合的被包含, 三段论法就是包含关系的传递。逻辑从数学中找到了坚固的理论基础。

道理非常简单, 概念的内涵与外延是逆向对合的: 概念甲的内涵蕴涵乙的内涵, 当且仅当概念乙的外延包含概念甲的外延。但是, 直到 Stone 拓扑表示定理的出现, 这条简单的道理才从数学上得到严格的证明。

Stone 拓扑表示定理告诉我们, 任何一个布尔代数都同构于由其全体极大滤子所形成的紧零维 Hausdorff 空间的开闭集代数[16]。简单地说, 就是布尔逻辑与集合论是同构的。但要问怎样同构法, 就复杂化了。为了简单, 我们不妨提出一个 Stone 简化定理。需要介绍滤子的 2 种不同的定义, 我们把一般格论中定义的滤子叫做强滤子。权威的格论著作[17] 给出: 在一个尔代数 $B=(B,\vee,\wedge,\neg)$ 中, 按常规定义了偏序 $\leqslant$:

$$p\leqslant q \Leftrightarrow p\vee q=q \Leftrightarrow p\wedge q=p$$

**定义 1**　在布尔代数 $B=(B,\vee,\wedge,\neg)$ 中, $F\subseteq B$ 叫做一个强滤子, 如果满足: 1) 满性, 即 $(p\leqslant q$ 且 $p\in F)\Rightarrow q\in F$; 2) 尾敛性, 即对任意 $p,q\in F$, 都有 $p\wedge q\in F$。$B$ 是一个平凡的强滤子。非平凡的强滤子叫做真强滤子。一个强滤子叫做极大强滤子, 如果它不被不同于它的强滤子所包含的话。

在某些格论的文献中所定义的滤子只满足第一个条件。于是, 滤子与强滤子是两个不同的概念, 按强滤子叙述更好。称只含有限个原子命题集 $S$ 的布尔代数为有限布尔代数或 $n$ 元布尔代数, 元指的是原始公式的个数。

**命题 1**　在 $n$ 元布尔代数 $B$ 中, 每个强滤子 $F$ 必有一个最小元 $p$, 使对任意 $q\in F$, 都有 $p\leqslant q$。

**证明** 因为平凡强滤子 $B$ 有最小元 0, 所以只需对真强滤子进行证明。

任给一个真强滤子 $F$, 对它建立一个假定: $F$ 中不存在最小元。

任取 $p_1 \in F$, 因它不是最小元, 必有 $p_2 \in F$, 使得 $p_2 < p_1$。因 $p_2$ 不是最小元, 必有 $p_3 \in F$, 使有 $p_3 < p_2$。如此继续下去形成一个 $B$ 中的全序子链, 其长度可以大于任意给定的整数。但是有限原始命题生成的公式不可能出现任意长的全序子链, 矛盾, 可见假定错误。证毕。

显而易见, 若 $F$ 有最小元, 则它在相等的意义下是唯一的。

**定义 2** 强滤子的最小元叫做它的滤尾。

**命题 2** $n$ 元布尔代数中真强滤子是极大的充分必要条件是: 它的滤尾是 $B$ 中的次小元。

**证明** 下面将提到的 $p$ 与 $p'$ 分别是真滤子 $F$ 和 $F'$ 的滤尾。显然 $p$ 与 $p'$ 都不是最小元 0。

$F$ 是极大真强滤子当且仅当不存在另一个真强滤子 $F'$ 包含 $F$。这当且仅当 $(p' < p \Rightarrow p' = 0)$, 亦即 $p$ 是 $B$ 中的次小元。证毕。

**定义 3** 记 $U$ 为 $n$ 元布尔代数 $B$ 中次小元的集合, $U$ 叫做布尔代数 $B$ 的表现论域。

表现论域是按照强滤子来定义的。强滤子所具有的尾敛性是拓扑学中邻域系的典型特征。在有限情形下, 它保证了滤尾的存在, 在无限情形下保证了强滤子向一点的收缩。它始终保证强滤子像一颗炮弹, 在有限情形下有弹尖 (滤尾), 在无限情形下有尖口 (极限点)。非强滤子由于没有尾敛性, 它就不是一个弹头而是多弹头的并。不难证明, $B$ 中全体滤子所成的集合 $\phi$ 乃是强滤子所成集合 $F$ 的幂: $\phi=2^F$。

Stone 拓扑表示定理说布尔代数 $B$ 与 $\phi$ 同构, 对有限布尔代数来说, 就有下面的简化定理:

**Stone 简化定理** 任何一个 $n$ 元布尔代数 $B = (B,\vee,\wedge,\neg)$ 与集合代数 $P(U) = (2^U,\cup,\cap,C)$ 同构, 或、且、非的逻辑运算转化为集合的并、交、余运算。这里, $U$ 是 $B$ 的表现论域。

**证明** 命题 2 说明 $F$ 与 $U$ 是一一对应的。所以, 根据 Stone 表示定理, $2^U$ 与 $2^F$、$\phi$、$B$ 之间也都是一一对应的。$B$ 中公式的析取、合取、否定运算显然与 $U$ 中集合的并、交、余运算同态。证毕。

Stone 简化定理把 $B$ 的次小元集合 $U$ 找出来, 用 $U$ 中的元素当作变元 $x$, 用 $U$ 的子集表示概念, 把 $B$ 变成 $2^U$, 实现了逻辑或、且、非与集合并、交、余运算的统一。任何公式 $p$ 都对应着一个集合 $P$, 叫做它的真集。谓词 $p(x)$ 真当且仅当变元 $x$ 进到了集合 $P$ 中。这一定理把难懂的 Stone 定理说得简单明白而且说到本质。Stone 定理之所以重要, 就是因为它把事物是非的"是"等同于隶属的"属", 这体现了概念内涵与外延的一致性, 是任何逻辑体系都必须满足的, 哪一个逻辑体系不满足 Stone 定理, 哪一个逻辑体系就要被否决。因而, 这个定理成了检验新逻辑系统的一块试金石。而 Stone 定理的核心是表现论域。王国俊先生和他的学生们的工作之所以杰出, 就是因为他们都明确地使用和定义了各自的表现论域。

**命题 3** 表现论域的构造。设 $n$ 元布尔代数 $B$ 的原子公式集是 $S = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, 则表现论域的元素是一切可能出现的 $n$ 字组:

$$U = \left\{x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \middle| x_j = p_j 或 \neg p_j (j = 1,2,\cdots,n)\right\}$$

**证明** 给定 $a = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$, 若有公式 $q < x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$, 则必有比 $a$ 小的公式 $r$, 使有 $q = r \wedge a$。

考虑 $r$ 的析取范式, 其中任何一项 $b$ 都必须是一个比 $a$ 小的字组 $y_{(1)} \wedge y_{(2)} \wedge \cdots y_{(k)}$ ($y_{(j)} = p_{(j)}$ 或 $\neg p_{(j)}$)。若对所有 $j = 1,2,\cdots,k$, 都有 $x_{(j)} = y_{(j)}$, 则 $b \geqslant a$ 从而 $r \geqslant a$, 不合要求。故必有 $j$ 使 $x_{(j)} \neq y_{(j)}$, 这时, $n$ 且 $y_{(j)} = \neg p_{(j)}$ 或者 $x_{(j)} = \neg p_{(j)}$ 且 $y_{(j)} = p_{(j)}$, 必有 $x_{(j)} \wedge y_{(j)} = 0$, 从而 $a \wedge b = 0$。任意字组都如此, 便有 $a \wedge r = 0$。对任意比 $a$ 小的 $D$ 都有 $a \wedge r = 0$, 则 $q = r \wedge a = 0$, 这说明 $a$ 是次小元。

反之, 设 $a$ 是 $B$ 的次小元, 它的析取范式只能包含一个字组。在这个字组中若缺少一项, 则必能找到一个比它小的元, 这个元只需对它的缺项安上一个字。证毕

**例 1** 设 $B$ 是一元布尔代数, 具有单字集 $S = \{p\}$。由一个单字所构成的公式集在相等的意义下只包含 4 个公式:

$$B = \{0, p, \neg p, 1\}$$

$B$ 包含两个次小元 $p$ 和 $\neg p$, 它们分别与两个极大强真滤子相对应: $F_1 = \{p, 1\}$, $F_2 = \{\neg p, 1\}$。

所以, $B$ 的表现论域是 $U = (p, \neg p)$。$2^U = \{p \wedge (\neg p) = 0, p, \neg p, 1 p \vee (\neg p) = 1\}$。显然 $B$ 与 $2^U$ 同构。

**例 2** 设 $B$ 是二元布尔代数具有双字集 $S = \{p, q\}$。由两个字所构成的公式集在相等的意义下包含 16 个公式:

$$\begin{gathered}B = \{0, pq, p'q, pq', p'q', pq \vee p'q = q, \\ pq \vee pq' = p, pq \vee p'q', p'q \vee pq', \\ p'q \vee p'q' = p', pq' \vee p'q' = q', \\ pq \vee p'q \vee p'q' = pq \vee p', \\ pq \vee p'q \vee pq' = q \vee pq', \\ pq \vee p'q \vee p'q' = pq \vee p', \\ pq \vee pq' \vee pq' = pq \vee pq' \vee pq', \\ p'q \vee pq' \vee p'q' = p'q \vee q', \\ pq \vee p'q \vee p'q' \vee p'q' = 1\}\end{gathered}$$

这里，$pq$ 表示 $p\wedge q$，$p'q$ 表示 $(\neg p)\wedge q,\cdots B$ 含有 4 个次小元 $pq$、$p'q$、$pq'$、$p'q'$，它们分别对应于 4 个极大真强滤子：$F_1=\{pq,p,q,1\}$，$F_2=\{p'q,p',q,1\}$，$F_3=\{pq',p,q',1\}$，$F_4=\{p'q',p',q',1\}$。

所以，$B$ 的表现论域是 $U=\{pq,p'q,pq',p'q'\}$，$2^U$ 会生成与上面相同的 16 个公式显然。$B$ 与 $2^U$ 同构。

一般地说，若 $B$ 是由 $n$ 字集 $S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 所构成的布尔代数，则有 $2^n$ 个 $B$ 的次小元构成表现论域 $U$，此时，$B$ 包含 2 的 $2^n$ 次方个公式，与 $2^U$ 同构。

从二值逻辑到多值逻辑，所有新的理论都要推广 Stone 拓扑表现定理，这是考验新逻辑理论的一块试金石。我们需要做什么工作呢？首先，要去掉有限布尔代数的限制，使 Stone 简化定理的面扩大，然后，要证明一个普适性的广义 Stone 简化定理。若有一个能够一劳永逸地解决 Stone 简化定理推广的理论，就可以加速新理论的发展。比如，抓住 $U=S^W$，当 $W=\{0,1\}$ 时 Stone 简化定理成立，要证对任意 $W$(三值、多值、连续值)Stone 简化定理都成立。对于模态逻辑，量词逻辑类似。

### 2.3　谓词演算中的变元争议与因素逻辑

在命题演算中我们曾经强调过，由我是中国人推不出安倍是亚洲人。推理句中的前后两个命题必须是同一个对象。在谓词逻辑中也应该坚持同对象推理的原则，毫无联系的两个对象之间是不能推理的。

常会遇见下面的推理句：若气温高则降雨量大

$$高^{(x)}\to 大^{(y)}$$

这里 $x$ 与 $y$ 分别表示气温和降雨量这两个不同的因素，是否违背推理的对象必须相同的原则呢？那要看这两个因素是否作用在同一对象上。气温与降雨量必须是同一地区的。广州的气温高不能推出黑龙江的降雨量大，$x$ 与 $y$ 必须附着在同一个地区。这里，$x=x(d)$，$y=y(d)$，只要归结到相同的对象，变元都是 $d$ 的函数，仍然符合同对象推理的原则。

变元 $x$ 和 $y$ 是这样的函数，它们都把对象映射成属性或状态，这样的映射就是因素。因素在数学上被定义成把对象映成属性的映射。所以，多变元推理中的变元必须是因素。

若对象是张三，如果他的智商 $x$ 高，学习态度 $y$ 努力，则他的学习成绩 $z$ 优异。这些不同变元之间的推理，都是因素之间的因果推理，都符合同一对象的原则。只有不同因素之间才可能产生推理，因为它们可以附着在同一个对象上。不用因素句无法进行多变量的谓词演算。

我们希望搞辩证逻辑，辩证法的核心是要具体问题具体分析，什么是具体分析呢？就是要对问题的内在和外在的因素进行分析。在谓词逻辑中把变元进一步写成因素是逻辑发展的新机。

逻辑是对事物的性质进行是非判断的科学，它要离开具体事物的性质而抽象出是非判断的一般规律，但抽象离不开现实，要想使逻辑更加有效地解决实际问题，需要开辟逻辑返回世界的接口。表现论域 $U$ 就是这个接口，它是变元活动的空间。若把变元看作因素，$U$ 就是因素空间，以因素空间做表现论域的逻辑就是因素逻辑。

给定一个因素空间 $I_F=(D,F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\})$，对于不同的因素 $f_j$，其相值要采用彼此相区别的符号。

**定义 4**　在 $I_F$ 上的二值因素逻辑系统 $L_f$ 是这样来规定的：

1）它的符号集是字集 $S=I(f_1)\cup I(f_2)\cdots\cup I(f_n)$ 加上符号 1,0 以及括号；

2) 它的公式集 $F(S)$ 是由 $S$ 所生成的布尔代数 $(F(S),\vee,\wedge,\neg)$，所有的字叫作原始公式；

3) 它的公理集是布尔逻辑的公理集再补充以下假设公理 $\Gamma$：

$\Gamma_1$　字姓公理：称 $I(f_i)=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iK}\}$ 中的字为第 $i$ 家字。有

$x_{i1}\vee x_{i2}\vee\cdots\vee x_{iK}=1$；$x_{ik}\wedge x_{ik'}=0\ (k\neq k')$；$\{\mathrm{neg}x_{ik}=\vee\left\{x_{ik'}\middle|k'\neq k\right\}\}$；

$\Gamma_2$　背景公理：存在一个公式 $r\in F(S)$ 叫作背景式，有 $p\to p\wedge r$ 且 $p\wedge r\to p\ \ (\forall p\in F(S))$，若系统 $L_f$ 不指明 $r$，则意味着 $r=1$。

4) 真值集是二值布尔代数 $W_2$：$W_2=\{0,1\}=\{\{0,1\},\vee,\wedge,\neg\}$。

5) 推理规则：$MP:\{p,p\to q\}\Big|-q$。

这个定义的意思是这样：任何逻辑系统都包含 5 个要素，即符号集 $S$、公式集 $F(S)$、公理集 $\sum$、真值集 $W$ 和推理规则 (集)。逻辑系统可通过附加一组公理，叫作假设公理集 $\Gamma$ 而衍生出一个子系统，在原系统中的定理都是子系统的定理，而某些在原系统中不是定理的推理句 $\phi$ 却可能变成子系统的新定理，如果 $\Sigma\cup\Gamma\vdash\phi$。这个子系统中的定理叫作 $\Gamma-$ 定理，如果满足强完满定理：

$$\Gamma\vdash\phi\ \text{ iff }\ \Gamma|=\phi$$

则这个子系统中的定理叫做强 $\Gamma-$ 定理。

$L_f$ 的假设公理 $\Gamma$ 是由两组公理给出。字姓公理 $\Gamma_1$ 强调字是因素的相, 不同因素的字是不同姓的。字姓公理保证同姓字之间遵守布尔逻辑关系。其中 $x_{ik} \wedge x_{ik'} = 0(k \neq k')$ 要求在每一字组中每家不许出两个以上的字, 否则就出现矛盾。例如, $x=$ 色红且色绿且质嫩且味鲜, 就是一个矛盾式。相对于综合因素 $F$ 而言, 字是单因素的相, 它是原始公式却不是最小相, 字的合取 $x = x_{i(1)}x_{i(2)}\cdots x_{n(n)}$ 才是最小相。例如, 红、大、嫩、鲜分别是颜色、个子、质地、口感等 4 个因素的相, 它们都是字, 都是原始公式, 但都不代表因素空间的原子内涵, 它们的合取 $x=$ "红大嫩鲜"才是一个原子内涵。

背景公理 $\Gamma_2$ 强调因素逻辑最重要的特征, 这就是背景关系。因素空间的背景是这样定义的[16-18]: 设 $(D, F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\})$ 是论域 $D$ 上的因素空间, 对任意 $i=1,2,\cdots,n$, $f_i: D \to I(f_i)=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{iK}\}$, 这里 $a_{ik}$ 指对象在第 $i$ 因素下的第 $k$ 种信息值 (相、属性或状态)$(k=1,2,\cdots,K)$, 对最简因素布尔代数而言, $K=2$。一个因素不一定只有两相而可能有多相, 但无论是两相还是多相, $a_{ik}(u)$ 都表示逻辑真值, 即 $u$ 对 $a_{ik}$ 的隶属度。$I(f_i)$ 叫作因素 $f_i$ 的相域或信息空间。记

$$I = I(f_1) \times I(f_2) \times \cdots \times I(f_n) = \left\{a_{1(1)}, a_{1(2)}, \cdots, a_{n(n)} \middle| a_{ik} \in I(f_i)(i=1,2,\cdots,n)\right\}$$

式中 $a$ 叫作信息组态, 若不存在 $d \in D$, 使 $f_i(d) = a_{i(i)}(i=1,2,\cdots,n)$, 则称 $P=(P\times Y)\cap R$ 是一个虚组态, 否则称为一个原子信息。全体原子信息的集合 $R$ 形成 $I$ 的一个子集, 叫做因素空间的背景, 它是诸因素信息空间的实际乘积空间。

为什么会有虚的信息组态呢? 因为因素之间存在着相互联系与制约。譬如, 气温与降雨量这两个因素在平面的联合分布就形成一个背景集 $R$, 显示一种正变关系, 极低气温不可能接受高降雨量。所以, (极低温, 高降雨量) 就是虚搭配, $R$ 就不能容许虚搭配在其中出现, 它只能包含像 (低温, 低降雨量)、(中温, 中降雨量)、(高温, 高降雨量) 等这样一类信息组态。此时, $R$ 的几何形状就被想象为一个泡胀了的上升曲线, 反映气温与降雨量之间呈一种正变的关系。

背景关系 $R$ 是背景公式 $r$ 的真集。背景公理强调 $r$ 的特殊重要性: 所有命题的真伪都只依赖于它在 $r$ 的真集 $R$ 之内的形象, 与 $R$ 外的形象无关。或者说, 因素逻辑的公式集合是 $F_r(S) = \{p \wedge r | p \in F(S)\}$。若 $P$ 是公式 $p$ 的真集, 则 $P \cap R$ 也是 $p$ 的真集, 叫作 $p$ 的有效真集。

考虑推理句"若气温 $x$ 高 ($P$) 则降雨量 $y$ 大 ($Q$)", 其中的 $x$ 和 $y$ 是两个不同的因素, 它们的信息空间记为 $X=I(x)$ 和 $Y=I(y)$, $P$、$Q$ 分别是 $X$、$Y$ 中的两个区间。要进行推理, 必须对这两个区间向二维空间 $X\times Y$ 做柱体扩张, 得到两个长条 $P\times Y$ 和 $X\times Q$, 记住实际有意义的论域是背景集 $R$, 记 $P=(P\times Y)\cap R$ 和 $Q^{\wedge}=(X\times Q)\cap R$。要想证明"若 $p(x)$ 则 $q(y)$", 必需有 $P^{\wedge} \subseteq Q^{\wedge}$, 这个包含关系一般是不会成立的, 除非背景关系 $R$ 把 $P^{\wedge}/Q^{\wedge}$(图 1 中带阴影的区域) 完全排斥在其外部。

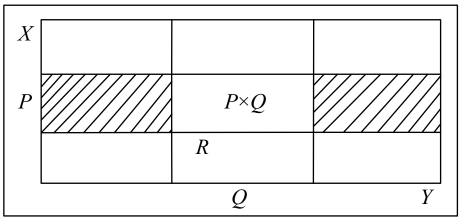


**图 1　因素推理的直观模型**

**Fig. 1　Illustration of factorial reasoning**

非因素的布尔代数没有背景一说, 所讨论的背景 $R$ 就是 $U$ 本身。从因素空间的观点来看, 因素与因素之间是相互影响和制约的, 这种关系就由背景集 $R$ 来表示。如果所考虑的 $n$ 个因素是独立的它们的组态是完全自由的, 则 $R=U$; 否则, 某些状态组合是不可能出现的, 则 $R$ 就不等于 $U$ 了。因素逻辑给逻辑带来的第一个礼物就是逻辑的背景。它使逻辑能够反映因素的相互影响, 这种影响体现了逻辑运用的场景和环境。

## 3　结构-功能分析与语法-语用对接

布尔逻辑可以用电路来表现, 每个字代表一个电器开关。每一个 $n$ 元公式都代表一个 $n$ 开关的电路。等效的电路与布尔代数之间形成一种同构对应。这种对应叫作结构-功能对应。结构指的是开关的线路结构, 功能指的是逻辑的判别功能。等效的公式有很多, 等效的线路也有很多, 经典的逻辑理论要研究最小化问题, 就是根据一张赋值表, 从中找出一个公式使所对应的线路最简单。

**定义 5**　若 $q \to p = 1$ 则称 $q$ 是 $p$ 的蕴涵式。若 $q$ 是 $p$ 的蕴涵式且在 $F(S)$ 中不存在 $p$ 的任何其他蕴涵式 $q' > q$, 则称 $q$ 是 $p$ 的素蕴涵式。

**命题 4**　公式 $p$ 的最小化是与它等效的一个析取范式, 式中的每一项都是它的素蕴涵式。

最小化理论将语法的结构和逻辑的语义功能

有效地联系起来, 意义重大。但是这种联系有一个前提, 表现逻辑的电路开关必须相互独立。如果开关之间存在着关联, 或者, 由于系统受到侵蚀, 两个开关在开时连通, 在变元非独立的情况下, 逻辑的结构功能关系应当如何进行呢? 例如, 给出下面一张三变元公式 $p$ 的赋值表(见表 1)。

**表 1 公式 $p$ 在 $U$ 上的赋值表**
**Table 1 The assignment table of formula $p$ on $U$**

| $x_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $p$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3 个开关, 每个开关有 2 种状态, 搭配出 8 种组态, 形成表现论域 $U$, 由于这 3 个开关都是独立的。$U$ 中 8 种搭配都用上了。现在, 设想这 3 个开关不是独立的, 譬如: $x_2$ 和 $x_3$ 是等效的: $x_2 = x_3$。在这种限制下, 第二、三、六、七列的组态是不可能出现的, 背景 $R$ 只包含 4 种组态: $R = \{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,1)\}$,

注意, 为了简单, 我们在符号上有下列等价的表示方法:

$$(0,0,0) = (\neg p_1)\wedge(\neg p_2)\wedge(\neg p_3) =, \underline{x}_1 \wedge \underline{x}_2 \wedge \underline{x}_3 = \underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3$$
$$(0,1,1) = (\neg p_1)\wedge(p_2)\wedge(p_3) =, \underline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \underline{x}_1 x_2 x_3$$

$p_1$、$p_2$ 和 $p_3$ 是 $B$ 中的字, 但字组中的字 $x_i$ 既可以是 $p_i$ 也可以是 $\neg p_i$。在做这张表的时候, 由于有 4 种状态是不能出现的, 所以, 经典的最小化问题是无解的, 因为赋值没有完全。但用因素逻辑, 可以作功能结构分析如下:

**命题 5** 若字组 $q$ 蕴涵字组 $p$,则 $q$ 的字长必大于 $p$ 的字长。

**证明** 若字组 $q$ 蕴涵字组 $p$, 则存在字组 $s$ 使 $q = p\wedge s$, 且 $s$ 不包含 $p$ 中的字。于是 $q$ 的字长是 $p$ 与 $s$ 的字长之和。证毕。

**命题 6** 若字组 $q$ 是蕴含 $p$ 的最短字组。若它不在蕴含 $\neg p$ 的任何 $n$ 字组中出现, 则 $q$ 是 $p$ 的素蕴涵式。

**证明** 若字组 $q$ 不在蕴含 $\neg p$ 的任何 $n$ 字组中出现, 则 $q$ 的有效真集 $Q$ 必在 $p$ 的真集 $P$ 之内, 从而有 $R\cap Q \subseteq P$, 故 $q$ 是 $p$ 的蕴涵式。若有 $q'$蕴含 $p$, 由于 $q'$ 是蕴含 $p$ 的最短字组, 故 $q'$ 不可能蕴涵 $q$, 故 $q$ 是 $p$ 的素蕴涵式。证毕。

当 $R = I(f_1)\times I(f_2)\times\ldots\times I(f_n)$ 是包含所有信息组态的完全空间, 对 $R$ 所作的任何分割, 每一信息组态 $x$ 必在一方。当 $R \neq I(F)$ 时, 对 $R$ 分割的双方可能都找不到某些信息组态, 但是这些双方都找不到的信息组态必是虚组合, 不妨碍命题的成立。

**极小化方法 (新):**

1) 将赋值表中所有不属于背景 $R$ 的所有列去掉, 得到 $R$ 子表;

2) 将 $p=1$ 的点集合而成正类, 将 $p=0$ 的点集合而成反类;

3) 逐一检查长度 $k=1$ 的字组, 若它在反类的所有字组中都不出现, 则它是 $p$ 的一个素蕴涵式, 从中删除它的所有蕴涵式, 如此继续直到所有单字都检查完毕;

4) 字组长度 $k := k+1$, 重复 3), 重复此过程, 直到正类字组被删尽。将 $T$ 的所有素蕴涵式用加号连接起来, 就得到 $T$ 的极小析取范式

**命题 7** 用极小化方法所得到的是 $T$ 的一个极小析取范式。

**证明** 首先要证明算法一定有停止的时候, 亦即, 正字类一定会被删尽。设 $\{x\}$ 是 $P$ 的一点。它一定不属于 $P^c$。以它为真集的公式就是 $n$ 字组 $x = x_{1i(1)}\wedge x_{2i(2)}\wedge\cdots\wedge x_{ni(n)}$。假设这一点没有在以前的比对中被删除, 那么就对此 $n$- 字进行检查, 因为它不会在负类字组中出现, 所以这个字组一定在正类的某个字组中出现, 因而它就是 $y_i$ 的一个蕴涵式, 从而这个点就可被删除。这说明, 任何正字都可在算法执行的过程中被删除。

所记下的每一字或字组都被 $P$ 所包含, 根据命题 5, 这个字或字组就是 $P$ 的素蕴涵式。全体素蕴涵式的析取就是 $P$ 的极小析取范式。证毕。

**例 3** 以表 1 为例, 给定 $R = ((0,0,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,1))$, 要把开关的线路结构寻找出来。

1) 将赋值表中所有不属于背景 $R$ 的所有列去掉, 得到 $R$ 子表(见表 2)。

**表 2 表 1 在 $R$ 上的子表**
**Table 2 The sub-table of table 1 on $R$**

| $x_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $p$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

2) 将 $p=1$ 的点集合而成正类, 将 $p=0$ 的点集合而成反类:

$$正类 = \{x_1x_2x_3, x_1x_2x_3, x_1x_2x_3\}$$
$$反类 = \{x_1x_2x_3\}$$

3) 逐一检查长度 $k=1$ 的字组 $q$, 首先考虑 $q = x_1$, 它不在反类的字组中出现, 所以它是 $p$ 的

一个素蕴涵式，删去正类中含有 $x_1$ 的所有点，得

$$正类 = \{x_1x_2x_3\}$$

继续考察单字组，$q = x_2$，它也不在反类的字组中出现，所以它是 $p$ 的一个素蕴涵式，删去正类中含有 $x_2$ 的所有点。正类被删空，停止。

结论：$p$ 的最小化公式是$p = x_1 + x_2$，对应的线路是开关 $p_1$ 和 $p_2$ 的并联。

对于独立的 3 个开关来说，$p = x_1 + x_2x_3$ 的实现线路是 $x_2$ 与 $x_3$ 先串联再与 $x_1$ 并联。但若以 $R$ 为背景，它们的结构和功能都发生了变化。$R$ 只有 4 种组态，它意味着 $x_2$ 与 $x_3$ 同相，这时最小化公式就蜕化为一个二元公式了，线路更加简单。这就是以 $R$ 为背景的结构功能分析。

这个例子引自文献 [18]，该文最早把因素逻辑的思想应用于故障检测，说明在变化的环境中布尔逻辑是如何被辩证化地发挥其推理功能的。

机制主义人工智能强调语法、语用和语义的全信息。全信息的核心是语义，而语义是语法和语用的结合体。所以，逻辑的结构−功能分析不仅是电路实现的实践问题，更是人工智能理论的一个关键点。语法−语用的结合都是在场景多变的非独立信息系统中来实现的。没有因素逻辑的思想和框架，是很难面对这种挑战的[19]。

## 4　逻辑的目标驱动与逆向推理

机制主义人工智能突出目标驱动，为智能服务的逻辑也应该是目标驱动的。逻辑以推理的后件为目标。我们希望生活快乐 ($q$)，怎样才能得到快乐呢？我们要寻找一个事态 $p$ 使 $p \to q$成立。在理论上，这是逆向推理的核心，在实践上这是神经网络的本事。因素空间可以在这里做出贡献。

经典的布尔逻辑只有寻找真集能钻进 $Q$ 的 $p$。在实际应用中，前件不是凭空想象出来的，它要靠机遇和选择。机遇往往太小，不合要求。但因素逻辑就不同了。没有包含关系的两个集合，在一定背景下可以变成包含。

**定义 6**　如果 $A \cap R \subseteq B \cap R$，则称 $B$ 在背景 $R$ 下包含 $A$，记作 $A \subseteq_R B$。

**命题 8**　若 $R' \subseteq R$，则$A \subseteq_U B \Rightarrow A \subseteq_R B \Rightarrow A \subseteq_{R'} B$。

在图 2 中，那个带阴影的月亮是我们的关注点。它是所有满足前件 $A$ 而不满足目标 $B$ 的点所成之集。换句话说，所有推翻推理句的点全在其中，所以这个月亮叫做推理的雷区。只要背景关系 $R$ 不与雷区相交，则推理就恒真了。

我们的目标 $B$ 已经定了，$R$ 也是客观环境所确定的，要找 $A$，就要看 $A$ 在 $B$ 之外的月亮，如果这个月亮在 $R$ 之外，则逆向推理的任务就完成了。否则，就是想法改变 $A$ 使月亮尽量缩小到 $R$ 之外。据此来建立算法。

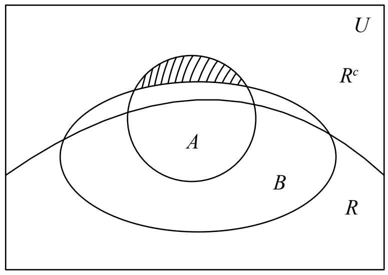


**图 2　$B$ 在背景 $R$ 下包含 $B$：$A \subseteq_R B$**

**Fig. 2　$B$ containing $A$ under background $R$: $A \subseteq_R B$**

## 5　泛逻辑前三连续算子对的数学证明

泛逻辑把模糊数学出现以来所出现的多种连续并、交算子对的定义用带参数的方式统一归纳成为一套单一的运算。归纳的根基是 4 种极端的连续算子对，其中前 3 对算子为：

1) Zadeh 算子：

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

2) 概率算子：

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$
$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$$

3) 有界和积算子：

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\}$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \max\{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0\}$$

这 3 种算子在什么情形下适用，泛逻辑都有明文规定。这 3 套算子的选择，是需要数学来证明的。

所谓模糊性，就是概念外延的不确定性，以年轻这一概念为例，不同人或同一人在不同场景下所报的年轻区间是不一样的。设有 $m$ 份调查问卷，每份问卷上都答有一个区间。根据因素空间的理论，论域 $D$ 上的模糊性可以转化为幂 $2^D$ 上的随机性，因而这些区间可被视为一个随机集 $\xi$ 的样本。如图 3 所示，这组样本像是天上的云，云左端的竖线段就是基本空间 $\Omega$，其中的每一个点 $\omega$ 对应一个问卷，$m$ 个点均匀地分布在 $\Omega$ 中。在不改变均匀分布的情况下，调换 $\omega$ 的位置，再做点拆拼，让随机云从天上落下来变成年轻的隶属函数曲线：$\mu(x) = n/m$($n$ 是覆盖年龄 $x$ 的区间数目)。这就是模糊落影理论，它把隶属度定义为随机集的覆盖率。这样，我们就可把图 3 的下半部看成是随机落影的简单模型。

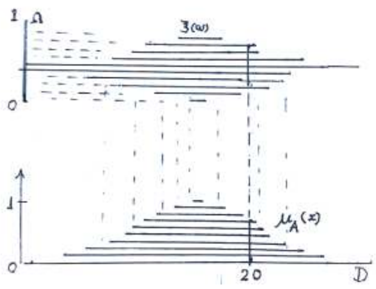


**图 3　模糊集是随机云的落影**

**Fig. 3　A fuzzy set is the falling shadow of a random cloud**

模糊集 $A$ 和 $B$ 分别是截集 $A_t$ 和 $B_s$ 的落影, 其中($t$, $s$)是$U=[0,1]\times[0,1]$上的 2 维随机变量, 具有均匀的边缘分布。图 4 左下方是 $D\times D$, 其对角线还是 $D$, 表示年龄域。对于 $D$ 中的任意一点 $x$, 向右交 $A$ 的隶属曲线 $\mu_A$ 于其高度 $s$, 向上交 $B$ 的隶属曲线 $\mu_B$ 于其高度 $t$, 这样在方块 $U$ 中就确定了一点 $(s,t)$。由这一点作十字架将 $U$ 分成四块, 左下方的矩形叫做交区, 挖掉右上方的矩形后剩下的三块矩形之并叫做并区。假设读者已经知道如何把因素空间背景集的概念随机化为背景分布 $R$, 为节省篇幅, 不在此赘述。

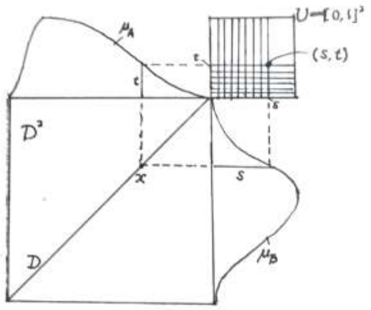


**图 4　模糊集的并、交运算**

**Fig. 4　Union and intersection of fuzzy sets**

**定理 1**　隶属度运算的确定法则。给定 $U$ 上的背景分布密度 $r(s,t)$, 则有

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)=R(\text{交区})$$
$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=R(\text{并区})$$

这里, $R(C)$ 表示背景分布 $R$ 在区域 $C$ 中的概率: $R(C)=\iint_C r(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$。

**证明**　$\mu_A(x)$是随机集 $\xi_A$ 对 $x$ 的覆盖概率, 它等于矩形 $([0,t]\times[0,1])$ 所占有的概率。$\mu_B(x)$ 是随机集 $\xi_B$ 对 $x$ 的覆盖概率, 等于矩形 $[0,1]\times[0,s]$ 所占有的概率。$\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)=\mu_{A\cap B}(x)$应当等于两矩形之并 $([0,s]\times[0,1])\cup([0,1]\times[0,t])$ 所占有的概率。$\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=\mu_{A\cup B}(x)$ 应当等于在 $([0,s]\times[0,1])\cup([0,1]\times[0,t])$ =并区中的联合背景概率。证毕。

定理 1 的直观意思见图 4。

**定理 2**　当两个概念的表现因素是完全正相关时, 它们之间的并、交运算必须取最大、最小概率:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$$
$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

当两个概念的表现因素相互独立时, 它们之间的并、交运算必须取概率和与概率积:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\times\mu_B(x)$$
$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\times\mu_B(x)$$

当两个概念的表现因素是完全负相关时, 它们之间的并、交运算必须取有界和与有界积:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$$
$$\mu_{A\cap B}(x)=\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$$

定理 2 是因素空间对泛逻辑前 3 个连续逻辑算子对的证明, 所叙述的条件完全符合泛逻辑的要求。定理 2 的证明见文献 [20], 这一结果曾在 1991 横滨国际模糊系统协会议上宣读。定理 2 的证明是最早也是最严格的数学证明。定理 1 也给出了在一般情况下隶属度的计算方法。其运算可由因素背景分布唯一确定。明确指明了解决隶属度运算的选择性困难的关键在于模糊概念背后的因素背景分布。

## 6　结束语

因素空间是泛逻辑表现的空间和舞台, 因素空间为泛逻辑连续算子对的选择提供数学依据。泛逻辑是因素空间表现的内核与指引。泛逻辑与因素空间是逻辑与数学之间互相依靠的伙伴。

机制主义人工智能−泛逻辑−因素空间三者的结合, 可以为人工智能的统一机制从逻辑与数学方面提供比较全面的研究。本文着重阐述了泛逻辑与因素空间之间存在着天然的联系, 这样就保证了三结合理论的内在和谐与统一。

## 参考文献:


[1] 钟义信. 高等人工智能原理: 观念•方法•模型•理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[2] 何华灿. 泛逻辑学原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[3] LUKASIEWIEZ L. On three-valued logic[J]. Ruch filozificzny, 1920, 5: 170–171.

[4] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338–353.

[5] 王国俊. 计量逻辑学 (I)[J]. 工程数学学报, 2006, 23(2): 191–215.

WANG Guojun. Quantitative logic (I)[J]. Chinese journal of engineering mathematics, 2006, 23(2): 191–215.

[6] SCHWEIZER B, SKLAR A. Probabilistic metric spaces[M]. New York: North Holland, 1983.

[7] 周红军. 概率计量逻辑及其应用 [M]. 北京: 科学出版社,

2015.
[8] 王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用 [J]. 中国科学: 信息科学, 2012, 42(5): 648–662.
WANG Guojun. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application[J]. China science information, 2012, 42(5): 648–662.
[9] 裴道武. 基于三角模的模糊逻辑理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
[10] 张小红. 模糊逻辑及其代数分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
[11] 张小红, 折延宏. 模糊量词及其积分语义 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.
[12] XU Yang, QIN Keyun, RUAN Da, et al. Lattice-valued logic: an alternative approach to treat fuzziness and incomparability[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
[13] ZADEH L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy sets and systems, 1978, 1(1): 3–28.
[14] 汪培庄, SUGENO M. 因素场与模糊集的背景结构 [J]. 模糊数学, 1982(2): 45–54.
WANG Peizhuang, SUGENO M. The factors field and background structure for fuzzy set[J]. Fuzzy mathematics, 1982(2): 45–54.
[15] 汪培庄. 模糊集与随机集落影 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
[16] STONE M H. The theory of representation for Boolean algebras[J]. Transactions of the American mathematical society, 1936, 40(1): 37–111.
[17] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
[18] 崔铁军, 汪培庄, 马云东. 01 型空间故障树的结构化表示方法 [J]. 大连交通大学学报, 2016, 37(1): 82–87.
CUE Tiejun, WANG Peizhuang, MA Yundong. Structured representation methods for 01 space fault tree[J]. Journal of Dalian Jiaotong University, 2016, 37(1): 82–87.
[19] 汪培庄. 因素空间理论: 机制主义人工智能理论的数学基础 [J]. 智能系统学报, 2018, 13(1): 37–54.
WANG Peizhuang. Factor space-mathematical basis of mechanism based artificial intelligence theory[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2018, 13(1): 37–54.
[20] 汪培庄. 模糊数学与优化 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2013.

## 作者简介：

汪培庄，男，1936 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为模糊数学及其在人工智能中的应用。提出和创立了模糊集的随机落影表示、真值流推理和因素空间等数学理论。获得国家级和部委级奖励多项、国际奖 1 项。发表学术论文 200 余篇，出版学术著作 4 部。

周红军,男,1980 年生,教授,博士生导师,博士,主要研究方向为序代数与逻辑、不确定性数学。先后主持国家、省、部级科学基金 5 项。发表学术论文 40 余篇,出版专著 2 部。

何华灿，男，1938 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为计算机科学和人工智能基础理论，创立泛逻辑理论和柔性神经元原理，近期主要研究广义概率论和数理辩证逻辑及其在智能信息处理中的应用。主持完成国家和省部级自然科学基金 8 项，获得省部级科技进步奖 9 项。发表学术论文 160 余篇，出版专著 9 部。