DOI: 10.11992/tis.201804046
网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20180612.1424.002.html

双论域下多粒度模糊粗糙集上下近似的包含关系

胡志勇[1]，米据生[1]，冯涛[2]，姚爱梦[1]
（1. 河北师范大学 数学与信息科学学院, 河北 石家庄 050024; 2. 河北科技大学 理学院, 河北 石家庄 050024）

摘　要: 针对双论域上集合的多粒度乐观与悲观上下近似不具有包含关系的问题, 本文给出了双论域上集合的多粒度上下近似具有包含关系的一个充分条件, 进而采用标准化的方法将不具有包含关系的上下近似转化为具有包含关系的上下近似。通过实例验证, 该方法能有效解决双论域下多粒度模糊粗糙集上下近似具有包含关系的问题。

关键词: 模糊集; 粗糙集; 双论域; 多粒度; 上近似; 下近似; 标准化; 包含关系; 充分条件
中图分类号: O236; TP18　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673−4785(2019)01−0115−06

中文引用格式: 胡志勇, 米据生, 冯涛, 等. 双论域下多粒度模糊粗糙集上下近似的包含关系 [J]. 智能系统学报, 2019, 14(1): 115–120.
英文引用格式: HU Zhiyong, MI Jusheng, FENG Tao, et al. Inclusion relation of upper and lower approximations of multigranularity fuzzy rough set in two universes[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(1): 115–120.

Inclusion relation of upper and lower approximations of multigranularity fuzzy rough set in two universes

HU Zhiyong[1], MI Jusheng[1], FENG Tao[2], YAO Aimeng[1]
(1. College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China; 2. School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050024, China)

Abstract: To solve the problem that the upper and lower approximations of multigranularity rough set in two universe may no longer have an inclusion relation, this paper will present a sufficient condition for the inclusion relation of the upper and lower approximations in two universes. Furthermore, we use the standardized method to transform upper and lower approximations with no inclusion relation into upper and lower approximations with an inclusion relation. It is verified by an example that this method can effectively solve the problem that the upper and lower approximations of the multigranularity fuzzy rough set in two universes have inclusion relation.
Keywords: fuzzy set; rough set; dual domain; multi-granularity; upper approximation; lower approximation; standardized method; inclusion relation; sufficient condition

模糊集概念[1]是由 Zadeh 教授在 1965 年提出的。它解决了对不确定性概念的描述性问题, 使得模糊数学在理论和应用方面的研究迅速发展起来, 并取得了丰富的研究成果。1982 年由波兰数学家 Pawlak 提出的粗糙集理论一直被认为是处理信息系统和知识发现方面问题的重要工具[2]。在信息系统或者决策表的研究方面, 集合近似的定义方式作为一个重要的问题, 一直受到研究者的广泛关注。在单个粒度的粗糙集模型下, 一个关系产生的一组上下近似常用来刻画一个目标概念的特征。然而在实际生活或者应用中, 由于用户需求的不同以及解决问题最终目标的不同, 用多个关系来刻画一个目标概念往往更加贴合实际。基于此, 钱宇华等[3-6]提出了多粒度粗糙集模

收稿日期: 2018−04−25.　**网络出版日期:** 2018−06−13.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (61573127, 61502144); 河北省博士后择优资助科研项目 (B2016003013); 河北省高等学校自然科学基金项目 (QN2016133, QN2017095); 河北师范大学博士基金项目 (L2017B19); 河北师范大学硕士研究生创新项目 (CXZZSS2018062); 河北省自然科学基金项目 (A2018210120).
通信作者: 胡志勇. E-mail: panghuyouxiang@163.com.

型，使得粗糙集理论在解决实际问题方面的应用更加广泛[7-9]。在多粒度粗糙集模型中，乐观多粒度和悲观多粒度是两个不同的基本研究方法。

此外，研究对象很可能来自于不同论域，因而，两个或者多个论域对真实世界的描述更具有一般性，对进一步研究信息表的规则提取具有积极的作用。因此双论域粗糙集模型[10-12]具有很强的研究价值以及实用价值。

在粗糙集理论[13-15]中，上下近似算子是一对基本的概念，从经典的理论意义和直观理解上，它们之间存在着包含关系。但是，当把它们推广到双论域上多粒度粗糙集模型[16-18]时，集合的上下近似并不一定存在着包含关系。本文将就这一问题展开讨论。

1　多粒度模糊粗糙集

实际生活中的数据集大部分都是连续的，然而粗糙集研究的一般是离散型数据，利用模糊粗糙集理论就可以解决这一矛盾。对对象集的划分一直是粗糙集研究的重要基础，多粒度粗糙集就是在满足多个关系的情况下对对象集的划分，将这些理论推广到双论域上，使得理论更具有推广性。多粒度模糊粗糙集是将模糊粗糙集与多粒度粗糙集两种理论相结合研究。

定义 1[1]　论域U上的模糊集合X是由U上的一个隶属函数$X:U\to[0,1]$来表示的，其中$X(x)$表示元素x隶属于模糊集合X的程度。

定义 2[19]　设$S=(U,\mathrm{AT})$是一个信息系统，其中U为论域，AT是非空属性集合。$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_m$表示AT的属性子集，对于每个A_i都可根据问题的需要定义模糊关系R_i与之对应。对U上任意的模糊集X，X的乐观多粒度下上近似分别为$\underline{\sum_{t=1}^{m}R_t^O}(X)$、$\overline{\sum_{t=1}^{m}R_t^O}(X)$，定义如下：

$$\underline{\sum_{t=1}^{m}R_t^O}(X)(x)=\vee_{t=1}^{m}\wedge_{z\in U}[(1-R_t(x,z))\vee X(z)],\forall x,z\in U$$

$$\overline{\sum_{t=1}^{m}R_t^O}(X)=\sim\underline{\sum_{t=1}^{m}R_t^O}(\sim X)$$

X的悲观多粒度下上近似分别为$\underline{\sum_{t=1}^{m}R_t^P}(X)$、$\overline{\sum_{t=1}^{m}R_t^P}(X)$，定义如下：

$$\underline{\sum_{t=1}^{m}R_t^P}(X)(x)=\wedge_{t=1}^{m}\wedge_{z\in U}[(1-R_t(x,z))\vee X(z)],\forall x,z\in U$$

$$\overline{\sum_{t=1}^{m}R_t^P}(X)=\sim\underline{\sum_{t=1}^{m}R_t^P}(\sim X)$$

定义 3[20]　设U、V是两个非空有限集合，R_t为论域U到论域V的二元关系，$R_t\in F(U\times V)$，其中$t=1,2,\cdots,m$。$\mathfrak{R}$是从U到V的二元关系簇，$\mathfrak{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}$。有序三元组$(U,V,\mathfrak{R})$称为双论域上的多粒度近似空间。

定义 4[21]　设有序三元组$(U,V,\mathfrak{R})$为双论域上的多粒度模糊近似空间。对任意$A\in F(V)$，A在$(U,V,\mathfrak{R})$中的乐观下近似$\underline{\mathfrak{R}^O_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$和乐观上近似$\overline{\mathfrak{R}^O_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$分别定义为：

$$\underline{\mathfrak{R}^O_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x)=\vee_{t=1}^{m}\wedge_{y\in V}[(1-R_t(x,y))\vee A(y)],\forall x\in U,y\in V$$

$$\overline{\mathfrak{R}^O_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x)=\wedge_{t=1}^{m}\vee_{y\in V}[R_t(x,y)\wedge A(y)],\forall x\in U,y\in V$$

A在$(U,V,\mathfrak{R})$中的悲观下近似$\underline{\mathfrak{R}^P_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$和悲观上近似$\overline{\mathfrak{R}^P_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$分别定义为：

$$\underline{\mathfrak{R}^P_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x)=\wedge_{t=1}^{m}\wedge_{y\in V}[(1-R_t(x,y))\vee A(y)],\forall x\in U,y\in V$$

$$\overline{\mathfrak{R}^P_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x)=\vee_{t=1}^{m}\vee_{y\in V}[R_t(x,y)\wedge A(y)],\forall x\in U,y\in V$$

当论域U和V为有限域时，运算$\vee$表示取大，$\wedge$表示取小。

例 1　在医疗诊断中，设U={病毒性发热，痢疾，伤寒}=$\{x_1,x_2,x_3\}$为疾病集，V={发烧，头痛，胃痛}=$\{y_1,y_2,y_3\}$为症状集，$R_t(t=1,2,3)\in F(U\times V)$是3个专家分别给出的$U$到$V$的关系，$A$为病人对自己症状的描述，设

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}0.2&0.5&0.2\\0.1&0.3&0.7\\0.6&0.3&0.4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}0.2&0.5&0.3\\0.4&0.4&0.3\\0.3&0.6&0.2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}0.4&0.3&0.3\\0.5&0.5&0.4\\0.3&0.8&0.4\end{bmatrix}$$

病人对病情的描述$A=\dfrac{0.4}{y_1}+\dfrac{0.6}{y_2}+\dfrac{0.9}{y_3}$，则对于疾病$x_1$，应用定义4可以求得医生通过病人描述判断病人患疾病x_1估计为

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{R}^P_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)=&[(0.2\wedge0.4)\vee(0.5\wedge0.6)\vee\\&(0.2\wedge0.9)]\vee[(0.2\wedge0.4)\vee\\&(0.5\wedge0.6)\vee(0.3\wedge0.9)]\vee\\&[(0.4\wedge0.4)\vee(0.3\wedge0.6)\vee\\&(0.3\wedge0.9)]=0.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathfrak{R}^P_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)=&([(1-0.2)\vee0.4]\wedge[(1-0.5)\vee0.6]\wedge\\&[(1-0.2)\vee0.9])\wedge([(1-0.2)\vee0.4]\wedge\\&[(1-0.5)\vee0.6]\wedge[(1-0.3)\vee0.9])\wedge\\&([(1-0.4)\vee0.4]\wedge[(1-0.3)\vee0.6]\wedge\\&[(1-0.3)\vee0.9])=0.6\end{aligned}$$

同理, 可以计算A的悲观上下近似分别为

$$\overline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}$$

$$\underline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}$$

$\overline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$表示悲观情况下病人患上述几种病的乐观估计, $\underline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$表示悲观情况下病人患几种病的保守估计。

另外, 可以经过计算得到:

$$\begin{aligned}\overline{\Re^{O}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1) =& [(0.2\wedge 0.4)\vee(0.5\wedge 0.6)\vee\\ &(0.2\wedge 0.9)]\wedge[(0.2\wedge 0.4)\vee\\ &(0.5\wedge 0.6)\vee(0.3\wedge 0.9)]\wedge\\ &[(0.4\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.6)\vee\\ &(0.3\wedge 0.9)] = 0.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Re^{O}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1) =& ([(1-0.2)\vee 0.4]\wedge[(1-0.5)\vee 0.6]\wedge\\ &[(1-0.2)\vee 0.9])\vee([(1-0.2)\vee 0.4]\wedge\\ &[(1-0.5)\vee 0.6]\wedge[(1-0.3)\vee 0.9])\vee\\ &([(1-0.4)\vee 0.4]\wedge[(1-0.3)\vee 0.6]\wedge\\ &[(1-0.3)\vee 0.9]) = 0.6\end{aligned}$$

同样, 可以计算 A 的乐观上下近似分别为

$$\overline{\Re^{O}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}$$

$$\underline{\Re^{O}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}$$

其中, $\overline{\Re^{O}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$表示乐观情况下病人患上述几种病的乐观估计, $\underline{\Re^{O}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)$表示乐观情况下病人患几种病的保守估计。

由计算结果可知, 双论域上集合 A 的乐观与悲观上下近似并不存在包含关系, 例如$\underline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1) > \overline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)$, 但是$\underline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_2) < \overline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_2)$。但是在已经具有某种症状的情况下, 在直观上认为医生对病人疾病诊断的保守估计应该不小于乐观估计的患病的概率, 即上下近似之间应具有包含关系。所以计算结果同直观理解是不匹配的。

2　双论域多粒度模糊粗糙集上下近似包含关系的充分条件

由上一章可以看到, 将单论域上集合的上下近似定义推广到双论域时, 其上下近似不一定具有包含关系。下面给出双论域上给定集合A的多粒度近似算子具有包含关系的充分条件。

命题 1　当 $|U|=|V|=3$, $a_{ij}^{t}+d_{\sigma}\leqslant 1$ 时, 其中 $t=1,2,3$; $\sigma=1,2,3$; $i=1,2,3$; $j=1,2,3$, 则双论域上的多粒度粗糙集上下近似具有包含关系。

证明　不妨设:

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1\\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1\\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2\\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2\\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3\\ a_{21}^3 & a_{22}^3 & a_{23}^3\\ a_{31}^3 & a_{32}^3 & a_{33}^3\end{bmatrix}$$

式中: $0\leqslant a_{ij}^{t}\leqslant 1$; $A=\frac{d_1}{y_1}+\frac{d_2}{y_2}+\frac{d_3}{y_3}$; $0\leqslant d_{\sigma}\leqslant 1$; $t=1,2,3$; $i=1,2,3$; $j=1,2,3$; $\sigma=1,2,3$。

首先证明悲观近似算子的情况。

$$\begin{aligned}\underline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1) =& ([(1-a_{11}^1)\vee d_1]\wedge[(1-a_{12}^1)\vee d_2]\wedge\\ &[(1-a_{13}^1)\vee d_3])\wedge([(1-a_{11}^2)\vee d_1]\wedge\\ &[(1-a_{12}^2)\vee d_2]\wedge[(1-a_{13}^2)\vee d_3])\wedge\\ &([(1-a_{11}^3)\vee d_1]\wedge[(1-a_{12}^3)\vee d_2]\wedge\\ &[(1-a_{13}^3)\vee d_3])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Re^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1) =& [(a_{11}^1\wedge d_1)\vee(a_{12}^1\wedge d_2)\vee(a_{13}^1\wedge d_3)]\vee\\ &[(a_{11}^2\wedge d_1)\vee(a_{12}^2\wedge d_2)\vee(a_{13}^2\wedge d_3)]\vee\\ &[(a_{11}^3\wedge d_1)\vee(a_{12}^3\wedge d_2)\vee(a_{13}^3\wedge d_3)]\end{aligned}$$

并且对于任意两个数p、q, 有

$$p\vee q=\frac{p+q}{2}+\frac{|p-q|}{2}$$

$$p\wedge q=\frac{p+q}{2}-\frac{|p-q|}{2}$$

那么, $(1-a_{11}^1)\vee d_1=\frac{1-a_{11}^1+d_1}{2}+\frac{|1-a_{11}^1-d_1|}{2}$, $a_{11}^1\wedge d_1=\frac{a_{11}^1+d_1}{2}-\frac{|a_{11}^1-d_1|}{2}$。

由定义 4 可以看到, 双论域上的多粒度近似算子同R_t中的元素与模糊隶属度d_{σ}有关。要使双论域上的多粒度近似算子具有包含关系, 在悲观近似算子的情况下, 只需悲观上近似中的元素全都不大于或者不小于下近似中的元素。而关系矩阵$\boldsymbol{R}_t$中的元素是任意给出的, 所以只需论证$\boldsymbol{R}_t$中某一元素的性质, 其他元素同理可证。以下具体论证元素a_{ij}^{t}的性质。于是问题转化为讨论悲观下近似中同a_{ij}^{t}有关的部分全都不大于或者不小于上近似中的元素。具体论证下面的情况:

$$[(1-a_{ij}^t)\vee d_j]-[a_{ij}^t\wedge d_j]=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t+d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}-\left[\frac{a_{ij}^t+d_j}{2}-\frac{|a_{ij}^t-d_j|}{2}\right]=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t+d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}-\frac{(a_{ij}^t+d_j)}{2}+\frac{|a_{ij}^t-d_j|}{2}=$$
$$\frac{1-2a_{ij}^t}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|+|a_{ij}^t-d_j|}{2}\geqslant$$
$$\frac{1-2a_{ij}^t}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j+a_{ij}^t-d_j|}{2}=\frac{1-2a_{ij}^t}{2}+\frac{|1-2d_j|}{2}\geqslant$$
$$1-(a_{ij}^t+d_j)$$

$$[(1-a_{ij}^t)\vee d_j]-[a_{ij}^{t'}\wedge d_j]=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t+d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}-\left[\frac{a_{ij}^{t'}+d_j}{2}-\frac{|a_{ij}^{t'}-d_j|}{2}\right]=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t+d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}-\frac{(a_{ij}^{t'}+d_j)}{2}+\frac{|a_{ij}^{t'}-d_j|}{2}=$$
$$\frac{1-(a_{ij}^t+a_{ij}^{t'})}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|+|a_{ij}^{t'}-d_j|}{2}\geqslant$$
$$\frac{1-(a_{ij}^t+a_{ij}^{t'})}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|+a_{ij}^{t'}-d_j}{2}=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t-d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}\geqslant 0$$

$$[(1-a_{ij}^t)\vee d_j]-[a_{hk}^t\wedge d_k]=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t+d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}-\left[\frac{a_{hk}^t+d_k}{2}-\frac{|a_{hk}^t-d_k|}{2}\right]=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t+d_j}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|}{2}-\frac{(a_{hk}^t+d_k)}{2}+\frac{|a_{hk}^t-d_k|}{2}=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t-a_{hk}^t+d_j-d_k}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t-d_j|+|a_{hk}^t-d_k|}{2}\geqslant$$
$$\frac{1-a_{ij}^t-a_{hk}^t+d_j-d_k}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t|-d_j+|a_{hk}^t-d_k|}{2}=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t-a_{hk}^t-d_k}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t|+|a_{hk}^t-d_k|}{2}\geqslant$$
$$\frac{1-a_{ij}^t-a_{hk}^t-d_k}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t|+a_{hk}^t-d_k}{2}=$$
$$\frac{1-a_{ij}^t-d_k}{2}+\frac{|1-a_{ij}^t|-d_k}{2}=1-(a_{ij}^t+d_k)$$

由上面 3 个证明过程可以推出，在悲观的情况下，当$a_{ij}^t+d_\sigma\leqslant 1$时，其中$t=1,2,3$；$\sigma=1,2,3$；$i=1,2,3$；$j=1,2,3$，双论域上的多粒度粗糙集上下近似具有包含关系。

同理可证：乐观的情况下，上下近似算子中的基本元素并没有发生改变，所以仍满足下近似中的任意元素都大于上近似中的任意元素，故最终求得的包含度仍具有相同的大小关系。

一般情况，当论域基数变大且给定粒度的个数推广至m时，上述结论仍成立，其结果如下。

命题 2　当$a_{ij}^t+d_\sigma\leqslant 1$时，双论域上的多粒度粗糙集$A$的上、下近似具有包含关系，其中：$i=1,2,3,\cdots,n$；$j=1,2,3,\cdots,l$；$\sigma=1,2,3,\cdots,l$；$t=1,2,3,\cdots,m$。

证明　设

$$\boldsymbol{R}_t=\begin{bmatrix} a_{11}^t & a_{12}^t\cdots & a_{1l}^t \\ a_{21}^t & a_{22}^t\cdots & a_{2l}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^t & a_{n2}^t & a_{nl}^t \end{bmatrix}$$

其中$t=1,2,\cdots,m$。根据定义 4，对A中的对象x_1有

$$\underline{\mathfrak{R}^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)=([(1-a_{11}^1)\vee d_1]\wedge[(1-a_{12}^1)\vee d_2]\cdots\wedge [(1-a_{1l}^1)\vee d_l])\cdots\wedge([(1-a_{11}^m)\vee d_1]\wedge [(1-a_{12}^m)\vee d_2]\cdots\wedge[(1-a_{1l}^m)\vee d_l])$$

$$\overline{\mathfrak{R}^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)=[(a_{11}^1\wedge d_1)\vee(a_{12}^1\wedge d_2)\cdots\vee (a_{1l}^1\wedge d_l)]\cdots\vee[(a_{11}^m\wedge d_1)\vee (a_{12}^m\wedge d_2)\cdots\vee(a_{1l}^m\wedge d_l)]$$

类比命题 1 的证明过程并改变索引集的取值范围后，可得结论：当$a_{1j}^1+d_\sigma\leqslant 1$, $a_{1j}^2+d_\sigma\leqslant 1$, $\cdots$, $a_{1j}^m+d_\sigma\leqslant 1$，$\sigma=1,2,\cdots,l$，$j=1,2,\cdots,l$时，有$\underline{\mathfrak{R}^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)\geqslant \overline{\mathfrak{R}^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_1)$。

同理，对 A 中的对象x_i, $i=1,2,3,\cdots,n$，也有类似的结论，即当$a_{ij}^1+d_\sigma\leqslant 1$, $a_{ij}^2+d_\sigma\leqslant 1$, $\cdots$, $a_{ij}^m+d_\sigma\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,l$, $\sigma=1,2,\cdots,l$时，有$\underline{\mathfrak{R}^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_i)\geqslant \overline{\mathfrak{R}^{P}_{\sum_{t=1}^{m}R_t}}(A)(x_i)$。

对于乐观的情况，根据命题 1 同理可证其上下近在满足上述条件时仍具有包含关系。由此可以得到结论：当$a_{ij}^t+d_\sigma\leqslant 1$时，双论域上的多粒度粗糙集$A$的上下近似具有包含关系。其中：$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,l$；$\sigma=1,2,\cdots,l$；$t=1,2,\cdots,m$。

在本章研究基础上，对于双论域上的多粒度粗糙集上下近似不具备包含关系的，将给出标准化的方法，使之转化为具有包含关系。

3　标准化方法

由第 2 章的证明可知，要使双论域上的多粒度粗糙集A的上下近似具有包含关系，需满足条件：$a_{ij}^t+d_\sigma\leqslant 1$；$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,l$；$\sigma=1,2,\cdots,l$；$t=1,2,\cdots,m$，则只需所有$a_{ij}^t\leqslant\dfrac{1}{2}$及$d_\sigma\leqslant\dfrac{1}{2}$。

定义 5　在多粒度空间$(U,V,\mathfrak{R})$中，$\mathfrak{R}$是一簇从U到V的二元关系，$R_t\in\mathfrak{R}$，其中，$t=1,2,\cdots,m$。用$l_{tn}=\sum\limits_{x\in U}R_t(x,y_n), y_n\in V$来表示关系$R_t$下$U$中全部对象与$y_n\in V$的关系的总和。定义$I_{mn}^t=R_t(x_m,y_n), x_m\in U$, $y_n\in V$，表示U中对象x_m和V中对象y_n在关系R_t下对应的值。称I_{mn}^{t+}为u_m相对其他U中的对象对v_n的相对表现度，$I_{mn}^{t+}=\dfrac{I_{mn}^t}{2l_{tn}}$。称$R_t^+=(I_{mn}^{t+})_{|U|\times|V|}$为$R_t$进行标准化后的矩阵。称上面的方法为标准化方法。类似的，可以对集合A进行标准化。

由上述定义可知$I_{mn}^t\leqslant l_{tn}$。故任意的$I_{mn}^{t+}\leqslant\dfrac{1}{2}$，即

任意的$a_{ij}^t \leqslant \frac{1}{2}$。同理可知任意的$d_\sigma \leqslant \frac{1}{2}$。此时, 多个模糊关系和集合都满足第 2 章已证明的使双论域上的多粒度粗糙集 A 的上下近似具有包含关系的充分条件, 因而上述标准化方法可以使不具有包含关系的双论域上的多粒度粗糙集 A 的上下近似转化为具有包含关系的上下近似。

例 2　续例 1:

$$l_{11} = 0.2+0.1+0.6 = 0.9$$

$$I_{11}^{1+} = \frac{I_{11}^1}{l_{11}} = \frac{0.2}{2\times 0.9} = \frac{1}{9}$$

对$\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{R}_3$进行标准化, 结果如下:

$$\boldsymbol{R}_1^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{22} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{18} & \frac{3}{22} & \frac{7}{26} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{22} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_2^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{3}{16} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{15} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{32} & \frac{3}{22} \\ \frac{5}{24} & \frac{5}{32} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

A 进行标准化后为A^+, 则

$$A^+ = \frac{\frac{2}{19}}{x_1} + \frac{\frac{3}{19}}{x_2} + \frac{\frac{9}{38}}{x_3}$$

则由双论域上多粒度粗糙集 (乐观、悲观) 上下近似的定义, 可以求得

$$\underline{\Re^P_{\sum_{t=1}^m R_t^+}}(A^+) = \frac{\frac{17}{22}}{x_1} + \frac{\frac{19}{26}}{x_2} + \frac{\frac{2}{3}}{x_3}$$

$$\overline{\Re^P_{\sum_{t=1}^m R_t^+}}(A^+) = \frac{\frac{3}{16}}{x_1} + \frac{\frac{9}{38}}{x_2} + \frac{\frac{2}{11}}{x_3}$$

$$\underline{\Re^O_{\sum_{t=1}^m R_t^+}}(A^+) = \frac{\frac{5}{6}}{x_1} + \frac{\frac{19}{24}}{x_2} + \frac{\frac{4}{5}}{x_3}$$

$$\overline{\Re^O_{\sum_{t=1}^m R_t^+}}(A^+) = \frac{\frac{3}{22}}{x_1} + \frac{\frac{2}{11}}{x_2} + \frac{\frac{2}{13}}{x_3}$$

由计算结果可知: 双论域上的多粒度粗糙集A同与之对应的二元关系进行标准化后, 所得到的上下近似已具有包含关系。

4　结束语

本文证明了双论域下多粒度模糊粗糙集上下近似具有包含关系的一个充分条件为$a_{ij}^t + d_\sigma \leqslant 1$, $i = 1,2,\cdots,n$; $j = 1,2,\cdots,l$; $\sigma = 1,2,\cdots,l$; $t = 1,2,\cdots,m$。并对该模型下, 上下近似不具备包含关系的粗糙集给出了一种名为标准化的方法, 使之在标准化之后, 集合的上下近似之间具有包含关系。

为了表述和计算的方便, 在进行标准化的时候限定所有$a_{ij}^t \leqslant \frac{1}{2}$, $d_\sigma \leqslant \frac{1}{2}$。接下来, 我们可以进一步引入阈值$\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, 使得所有$a_{ij}^t \leqslant \alpha$, $d_\sigma \leqslant 1-\alpha$。这样标准化的方法可以进一步在$\alpha$水平下进行。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338–353.

[2] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International journal of computer and information sciences, 1982, 11(5): 341–356.

[3] QIAN Yuhua, LIANG Jiye, DANG Chuangyin. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics-part a: systems and humans, 2010, 40(2): 420–431.

[4] QIAN Yuhua, LI Shunyong, LIANG Jiye, et al. Pessimistic rough set based decisions: a multigranulation fusion strate-gy[J]. Information sciences, 2014, 264: 196–210.

[5] QIAN Yuhua, ZHANG Hu, SANG Yanli, et al. Multigranu-lation decision-theoretic rough sets[J]. International journal of approximate reasoning, 2014, 55(1): 225–237.

[6] QIAN Yuhua, LIANG Jiye, YAO Yiyu, et al. MGRS: a multigranulation rough set[J]. Information sciences, 2010, 180(6): 949–970.

[7] XU Weihua, LI Wentao, ZHANG Xiantao. Generalized multigranulation rough sets and optimal granularity selection[J]. Granular computing, 2017, 2(4): 271–288.

[8] TAN Anhui, WU Weizhi, TAO Yuzhi. On the belief structures and reductions of multigranulation spaces with decisions[J]. International journal of approximate reasoning, 2017, 88: 39–52.

[9] QIAN Yuhua, LIANG Xinyan, LIN Guoping, et al. Local multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International journal of approximate reasoning, 2017, 82: 119–137.

[10] 邱雅竹, 付蓉. 两个论域上的粗糙集模型及其应用 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2005, 28(1): 15–18.
QIU Yazhu, FU Rong. Rough set model over two universes and application[J]. Journal of Sichuan normal university (natural science), 2005, 28(1): 15–18.

[11] SUN Bingzhen, MA Weimin. Fuzzy rough set model on two different universes and its application[J]. Applied

mathematical modelling, 2011, 35(4): 1798–1809.
[12] ZHANG Chao, LI Deyu, LIANG Jiye. Hesitant fuzzy linguistic rough set over two universes model and its applications[J]. International journal of machine learning and cybernetics, 2018, 9(4): 577–588.
[13] HUANG Bing, GUO Chunxiang, LI Huaxiong, et al. An intuitionistic fuzzy graded covering rough set[J]. Knowledge-based systems, 2016, 107: 155–178.
[14] 张文修, 梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 1–259.
[15] 张文修, 梁怡, 徐萍. 基于包含度的不确定推理 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 1–310.
[16] 梁美社, 米据生, 赵天娜. 广义优势多粒度直觉模糊粗糙集及规则获取 [J]. 智能系统学报, 2017, 12(6): 883–888.
LIANG Meishe, MI Jusheng, ZHAO Tianna. Generalized dominance-based multi-granularity intuitionistic fuzzy rough set and acquisition of decision rules[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2017, 12(6): 883–888.
[17] ZHANG Chao, Li Deyu, SANGAIAH A K, et al. Merger and acquisition target selection based on interval neutrosophic multigranulation rough sets over two universes[J]. Symmetry, 2017, 9(7): 126.
[18] ZHANG Chao, LI Deyu, YAN Yan. A dual hesitant fuzzy multigranulation rough set over two-universe model for medical diagnoses[J]. Computational and mathematical methods in medicine, 2015, 5: 1–12.
[19] XU Weihua, WANG Qiaorong, ZHANG Xiantao. Mul-ti-granulation fuzzy rough sets in a fuzzy tolerance ap-proximation space[J]. International journal of fuzzy systems, 2011, 13(4): 246–259.
[20] SUN Bingzhen, MA Weimin. Multigranulation rough set theory over two universes[J]. Journal of intelligent and fuzzy systems, 2015, 28(3): 1251–1269.
[21] SUN Bingzhen, MA Weimin, QIAN Yuhua. Multigranula-tion fuzzy rough set over two universes and its applic-ation to decision making[J]. Knowledge-based systems, 2017, 123: 61–74.

作者简介：

胡志勇，男，1992 年生，硕士研究生，主要研究方向为粗糙集、证据理论。

米据生，男，1966 年生，教授，博士生导师，博士，主要研究方向为粗糙集、概念格、近似推理。

冯涛，女，1980 年生，副教授，主要研究方向为粗糙集、证据理论、人工智能。