

DOI: 10.11992/tis.201802008

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20180927.1124.006.html>

三维离散曲线曲率挠率的微中心差分算法

慕生鹏, 李红军, 李世林

(北京林业大学理学院, 北京 100083)

摘要: 曲率和挠率是描述三维空间离散曲线的弯曲和扭曲程度的两个微分量。为了准确计算这两个微分量, 从连续曲线的导数定义出发, 提出微中心差分算法进行三维空间离散曲线的曲率和挠率计算。该算法基于商平滑策略实现对单侧差分算法的一个有效扩展。与单侧差分算法相比, 微中心差分算法不增加算法执行时间, 但在计算精度方面有显著提升。实验分析是通过 6 条曲线的均匀采样获取离散曲线数据, 与 5 种常用的曲率和挠率计算算法相比较, 对这 6 种算法从采样密度对算法精度的影响、计算效率和抗噪声性能这 3 个方面进行了对比分析。实验结果表明, 微中心差分算法总体效果最好。

关键词: 曲率; 挠率; 算法比较; 离散曲线; 微中心差分法; 离散几何法; 三维空间; 差商; 均匀采样

中图分类号: TP311 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2019)01-0194-13

中文引用格式: 慕生鹏, 李红军, 李世林. 三维离散曲线曲率挠率的微中心差分算法[J]. 智能系统学报, 2019, 14(1): 194-206.

英文引用格式: MU Shengpeng, LI Hongjun, LI Shilin. An algorithm for estimating curvature and torsion of discrete curve in three-dimensional space based on microcentral difference[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2019, 14(1): 194-206.

An algorithm for estimating curvature and torsion of discrete curve in three-dimensional space based on microcentral difference

MU Shengpeng, LI Hongjun, LI Shilin

(College of Science, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: The curvature and torsion of a 3D discrete curve reflect the degrees of its bending and distortion. To calculate these quantities accurately, following the definition of the derivative of the continuous curve, a microcentral difference algorithm, which is an extension to the one-side difference algorithm, is proposed based on the smoothing of the difference quotient. Compared with the one-side difference algorithm, the microcentral difference algorithm fails to prolong the running time but it remarkably improves the calculation accuracy. Several experiments are conducted by uniform sampling from six continuous curves, which are then compared with the five traditional algorithms of curvature and torsion. The experimental results are analyzed from three aspects: the influence of the sampling density on the accuracy of the algorithm, the efficiency of calculation, and the anti-noise performance. The experimental results show the good performance of the proposed microcentral difference algorithm.

Keywords: curvature; torsion; algorithm comparison; discrete curve; microcentral difference algorithm; discrete geometry method; three-dimensional space; difference quotient; uniformly sampling

在人工智能算法设计与自动控制的相关研究中, 无人机路径规划^[1], 弹道分析^[2], 公路线性设计^[3], 路径约束下的车辆行为研究^[4], 几何处理^[5]和机器

视觉研究^[6], 以及植物生长模拟^[7]、结构工程分析^[8]等问题的解决都可以基于离散曲线的曲率和挠率的分析。曲率和挠率是空间曲线在固有运动下的不变量^[9], 直接描述了曲线在一点邻近的形状。其中, 曲率揭示曲线在所在平面的弯曲程度, 挠率则刻画曲线离开既定平面的扭曲程度。也就是

收稿日期: 2018-02-05. 网络出版日期: 2018-09-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61372190); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2015ZCQ-LY-01).

通信作者: 李红军. E-mail: lihongjun69@bjfu.edu.cn.

说, 三维空间中的曲线是可以通过一根直线弯曲(曲率)和扭曲(挠率)得到的。显然, 曲率和挠率能完全刻画曲线的局部行为^[10]。因此, 有研究者根据曲线的曲率挠率特性, 对空间中的曲线进行分析^[11-13]、分类^[14]或判断轨迹线的形状^[15]。对于有解析或者参数方程的曲线, 经典微分几何中有成熟方法计算曲线上任意一点的曲率和挠率。

因为近些年应用日益广泛的离散空间曲线没有解析方程, 经典微分几何中的求解方法不能直接应用于离散曲线的情形, 所以三维空间中离散曲线的曲率和挠率计算成为近些年的热点研究问题。此外, 在实际应用中, 受人工、仪器、环境等诸多因素影响, 得到的离散曲线的数据(一个序列的三维坐标点)常常存在一定的偏差或者噪声, 因此如何使算法更加准确和鲁棒, 成为三维空间离散曲线的曲率和挠率计算的难点。

近些年提出的关于三维空间离散曲线的曲率和挠率计算方法大致可以分为 2 类。1) 基于曲线拟合的方法, 这类算法主要是对给定点及其邻近点拟合一段光滑曲线, 然后根据这段解析曲线的微分几何公式计算给定点的曲率和挠率。其本质就是用拟合曲线的曲率和挠率来估算离散曲线的曲率和挠率。这类算法的典型算法有多项式拟合法 (polynomial curve fitting)^[16]和 B 样条曲线拟合法 (B-spline curve fitting)^[17-19]。2) 基于离散结构的方法, 这类算法无需对离散曲线进行光滑曲线的拟合, 直接利用离散点之间的距离和内接多边形等离散结构, 运用差分形式或者离散逼近等策略估算出离散曲线上各个点的曲率和挠率。基于离散结构的方法中比较典型的有投影法 (projection)^[20]、单侧差分法 (one-sided difference)^[21]和离散几何法 (discrete geometry)^[22]。本文根据导数定义以及单侧差分法的设计思路, 融合差商平滑策略, 提出了微中心差分 (microcentral difference) 算法。

1 离散曲线的曲率挠率算法

经典微分几何中, 设曲线 C 的参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 若一阶导函数 $\mathbf{r}'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上恒不为零, 即参数化曲线 $\mathbf{r}(t)$ 是正则的, 则曲率 $\kappa(t)$ 的计算公式^[23]为

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \quad (1)$$

挠率 $\tau(t)$ 的计算公式^[16]为

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2} \quad (2)$$

式 (1)、式 (2) 中的符号“ \times ”表示叉积; 式 (2) 中的分子表示 3 个微分向量的混合积。 $\mathbf{r}(t) = (x(t),$

$y(t), z(t))$ 中要求 3 个函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都是连续函数, 且都 3 阶可导。

但是对于没有方程的三维离散曲线的曲率挠率计算, 研究人员提出的各种方法中有代表性的方法有: 多项式曲线拟合法、B 样条曲线拟合法、投影法、单侧差分法、离散几何法 5 种。本文在分析这 5 种算法的基础上, 提出了微中心差分法。

1.1 多项式曲线拟合法

2005 年, Cazals 等^[16]提出了一种基于二次多项式曲线拟合 (polynomial curve fitting, PCF) 的方法来计算离散平面曲线在给定点 P_i 的曲率、挠率。该方法对点 P_i 及其邻域 $\{P_k | i-n \leq k \leq i+n\}$ (n 为点 P_i 一侧选取的邻近点个数), 在以 P_i 为原点的局部坐标系中拟合一个二次多项式曲线。二次多项式曲线的数学模型为

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$$

通过最小二乘拟合, 可求解该二次多项式曲线及其系数 A_i ($i = 0, 1, 2$), 利用多项式系数 A_i 可计算出点 P_i 的曲率 $\kappa(P_i)$ 。类似的可推广拟合三次或三次以上的多项式曲线, 从而利用式 (1)、式 (2) 计算出三维空间离散曲线的曲率、挠率。

1.2 B 样条曲线拟合法

2017 年, 赵夫群等^[17]用 4 次 B 样条曲线拟合 (B-spline curve fitting, BSCF) 方法将空间离散曲线拟合成光滑的空间曲线, 从而以此来计算离散曲线的曲率和挠率。B 样条曲线的定义为: 给定 $n = m + k + 1$ 个顶点, 则可以定义 $m + 1$ 段 k 次参数曲线第 i 段 B 样条曲线函数可表示为

$$Q(t) = \sum_{l=0}^k P_{i+l} N_{l,k}(t)$$

式中: $i = 0, 1, \dots, n$; $\{P_{i+0}, P_{i+1}, \dots, P_{i+k}\}$ 为定义第 i 段曲线特征多边形的 $k + 1$ 个顶点; $N_{l,k}(t)$ 为 B 样条基底函数, 表示为

$$N_{l,k}(t) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-l} (-1)^j C_{k+1}^j (t+k-l-j)^k$$

对于离散曲线上的每一个离散点 P_i , 选取点 P_i 及其邻域 $\{P_k | i-n \leq k \leq i+n\}$ (n 为点 P_i 一侧选取的邻近点个数) 内的点进行样条曲线拟合。类似的方法有: 喻德生等^[18]采用的 3 次均匀 B 样条进行曲线拟合, Kehtarnavaz 等^[19]采用的 5 次 B 样条进行曲线拟合, 从而利用经典微分几何的式 (1)、式 (2) 求解方法对离散曲线进行曲率、挠率的计算。

1.3 投影法

Mardia 在 1999 年提出一种基于投影 (projection) 的算法^[20], 对于三维空间中的离散曲线, 将点投影到单位切线方向上。对于由 n 个点构成的

离散曲线, 其点 P_i 处的单位切向量定义为

$$T_i = \frac{P_i P_{i+1}}{|P_i P_{i+1}|}, \quad i = 3, 4, \dots, n-2$$

容易计算点 P_i 处的单位法向量 N_i , 利用 T_i 和 N_i 做叉积得到副法向量 B_i , 从而点 P_i 处的局部投影平面离散曲线定义为

$$Y_k = \left(\frac{T_k \cdot N_i}{T_k \cdot T_i}, \frac{T_k \cdot B_i}{T_k \cdot T_i} \right), \quad k = i-2, \dots, i+2$$

然后以点 Y_i 为中心, 拟合平面二次曲线 $ax^2 + bx$, 从而三维空间离散曲线点 P_i 的曲率 $\kappa(P_i)$ 、挠率 $\tau(P_i)$ 分别为

$$\kappa(P_i) = \frac{\|Y_i - Y_{i-1}\|}{\|P_i - P_{i-1}\|}$$
$$\tau(P_i) = \frac{2a}{(b^2 + 1)^{3/2}} \kappa(P_i)$$

1.4 单侧差分法

2016 年 Blankenburg 等^[21]通过利用一般参数方程的曲线导数的有限差商逼近, 直接从离散点中采用单侧差分 (one-sided difference, OSD) 逼近计算出空间离散曲线在给定点 P_i 的一阶差商、二阶差商和三阶差商, 然后代入曲率和挠率的解析计算公式进行求解。在该方法中, 定义差分为

$$\Delta f_k(t) = f(t+k\Delta t) - f(t+(k-1)\Delta t), \quad k = 1, 2, 3$$

则一阶导数、二阶导数分别为

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1(t)}{\Delta t}$$
$$f''(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+2\Delta t) - 2f(t+\Delta t) + f(t)}{\Delta t^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_2(t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta f_1(t)}{\Delta t^2} \right)$$

同理, 三阶导数为

$$f'''(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_3(t)}{\Delta t^3} - 2 \frac{\Delta f_2(t)}{\Delta t^3} + \frac{\Delta f_1(t)}{\Delta t^3} \right)$$

从而根据曲线曲率、挠率的微分定义, 将上述各阶导直接代入曲率、挠率的计算式 (1)、式 (2) 即可求得各点处的曲率、挠率。

1.5 离散几何法

An 等^[22]在 2011 年提出一种称为离散几何法 (discrete geometry) 的方法, 该方法基于对称邻域的最小二乘的导数计算过程, 可以归结为: 利用离散导数的定义, 采用约束最优化问题的求解方法来计算指定点在其对称邻域内的离散导数。

对于平面内的离散曲线, 点 $P_i = (x_i, y_i)$ 及其邻域 $\{P_k | i-n_1 \leq k \leq i+n_1\}$ (n_1 为点 P_i 一侧选取的邻近点个数), 则点 P_i 处的离散导数为

$$y'_i = \frac{\sum_{k=i-n_1}^{i+n_1} (x_k - x_i)(y_k - y_i)}{\sum_{k=i-n_1}^{i+n_1} (x_k - x_i)^2}$$

上述离散导数也称为点 P_i 的一阶离散导数。类似的在点 P_i 处的二阶离散导数为

$$y''_i = \frac{\sum_{k=i-n_2}^{i+n_2} (x_k - x_i)(y'_k - y'_i)}{\sum_{k=i-n_2}^{i+n_2} (x_k - x_i)^2}$$

同理, 在点 P_i 处的 n 阶离散导数为

$$y_i^{(n)} = \frac{\sum_{k=i-n}^{i+n} (x_k - x_i)(y_k^{(n-1)} - y_i^{(n-1)})}{\sum_{k=i-n}^{i+n} (x_k - x_i)^2}$$

上述各阶离散导数是对连续可微函数在点 P_i 处的各阶导数的逼近。对于三维空间中的离散曲线, 为了计算其离散导数, 首先要对离散曲线进行参数化。可采用累积弦长参数化方法^[24]来确定离散点的参数值。在该方法中, 离散曲线 ψ_d 在各点 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($1 \leq i \leq n$) 处的累积弦长参数 s_i 可确定为

$$s_i = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} |p_{k+1} - p_k|}{\sum_{k=1}^{n-1} |p_{k+1} - p_k|}, \quad 2 \leq i \leq n$$

并且 $s_1 = 0$, 从而离散曲线 ψ_d 为

$$\psi_d = \{P_i\} = \{(x(s_i), y(s_i), z(s_i))\}$$

式中: $s_i \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$; 坐标函数 $x_i = x(s_i)$ 、 $y_i = y(s_i)$ 和 $z_i = z(s_i)$ 就是弦长 s_i 的离散函数。因此, 平面上的离散导数的计算方法可以转化为用于计算三维空间中的离散曲线上各点的导数。从而, 采用上述方法, 对三维空间中的离散曲线 ψ_d 上的点 P_i , 其邻域为 $\{P_k | i-n_1 \leq k \leq i+n_1\}$ (n_1 为点 P_i 一侧选取的邻近点个数), 则点 P_i 处的离散导数 $(x'(s_i), y'(s_i), z'(s_i))$ 分别为

$$\left\{ \begin{aligned} x'(s_i) &= \frac{\sum_{j=i-n_1}^{i+n_1} (s_j - s_i)(x_j - x_i)}{\sum_{j=i-n_1}^{i+n_1} (s_j - s_i)^2} \\ y'(s_i) &= \frac{\sum_{j=i-n_1}^{i+n_1} (s_j - s_i)(y_j - y_i)}{\sum_{j=i-n_1}^{i+n_1} (s_j - s_i)^2} \\ z'(s_i) &= \frac{\sum_{j=i-n_1}^{i+n_1} (s_j - s_i)(z_j - z_i)}{\sum_{j=i-n_1}^{i+n_1} (s_j - s_i)^2} \end{aligned} \right.$$

上述离散导数也称为点 P_i 的一阶离散导数。类似的可计算点 P_i 的二阶、三阶离散导数。从而

利用式 (1)、式 (2) 即可求得三维空间离散曲线的曲率、挠率。

1.6 微中心差分法

单侧差分法^[22]在进行离散曲线的曲率挠率计算时,会对给定的曲率挠率产生一定的偏移或者缩放,为了克服由单侧差分法引起的这种计算偏差,结合文献[22]中的思想和导数定义,将其单侧差分法修改为对目标离散点的双侧差商取平均的方法来得到目标离散点的各阶导数,并参考文献[25]中的性能度量算法思想和差分方式,将改进的方法命名为微中心差分法 (microcentral difference algorithm)。

首先对微中心差分法名称中的“微”和“中心”作简单的说明。“微”是指在局部范围的逐阶差商计算。比如,先用改进的离散导数定义计算一阶差商,如式 (3);再利用一阶差商值计算离散曲线的二阶差商,如式 (4);最后利用二阶差商值计算三阶差商,如式 (5)。“中心”指在目标点邻域内,进行差分计算时,以离散曲线的目标点为中心进行差分计算。另外,方法中涉及求目标点的各阶差商,我们指定,每阶差商目标点单侧需要上一阶差商值的个数,记为 $k_i (i=1,2,3)$,称为邻域半径。根据上述说明,微中心差分算法的计算方法具体如下。定义其一阶前向差商为

$$f'_q(t) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{f(t) - f(t - i\Delta t)}{\Delta t}$$

一阶后向差商为

$$f'_h(t) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{f(t + i\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

从而其一阶差商为

$$f'(t) = \frac{1}{2} (f'_q(t) + f'_h(t)) = \frac{1}{2k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{f(t + i\Delta t) - f(t - i\Delta t)}{\Delta t} \quad (3)$$

式中 k_1 为邻域半径。

其二阶前向差商定义为

$$f''_q(t) = \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} \frac{f'(t) - f'(t - i\Delta t)}{\Delta t}$$

二阶后向差商定义为

$$f''_h(t) = \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} \frac{f'(t + i\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$$

从而其二阶差商定义为

$$f''(t) = \frac{1}{2} (f''_q(t) + f''_h(t)) = \frac{1}{2k_2\Delta t} (f'(t + k_2\Delta t) - f'(t - k_2\Delta t)) \quad (4)$$

式中 k_2 为邻域半径。

同理,其三阶前向差商定义为

$$f'''_q(t) = \frac{1}{k_3} \sum_{i=1}^{k_3} \frac{f''(t) - f''(t - i\Delta t)}{\Delta t}$$

三阶后向差商定义为

$$f'''_h(t) = \frac{1}{k_3} \sum_{i=1}^{k_3} \frac{f''(t + i\Delta t) - f''(t)}{\Delta t}$$

从而其三阶差商为

$$f'''(t) = \frac{1}{2} (f'''_q(t) + f'''_h(t)) = \frac{1}{2k_3\Delta t} (f''(t + k_3\Delta t) - f''(t - k_3\Delta t)) \quad (5)$$

式中 k_3 为邻域半径。

因此对于微中心差分法,为了得到离散曲线上给定的目标离散点的曲率值,根据本文的计算方法,则需要知道目标离散点邻域内的离散点数 $N_1 = 2(k_1 + k_2) + 1$,即目标离散点两侧各需 $(k_1 + k_2)$ 个离散点;而对于目标离散点的挠率计算,则至少需要知道目标离散点邻域内的离散点数 $N_2 = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1$,其中目标离散点两侧各 $(k_1 + k_2 + k_3)$ 个离散点, k_1, k_2, k_3 均为大于等于 1 的整数。根据式 (3)~(5) 得到其各阶差商后,则可根据曲线曲率、挠率的微分定义,将上述各阶导数式 (3)~(5) 代入曲率、挠率的计算式 (1)、式 (2),即可求得离散曲线上各点处的曲率、挠率。这里提出的微中心差分计算方法是对单侧差分方法的一个依据导数定义进行的一个扩展,理论上是符合连续函数条件下可导的要求。

总体来看,上述 6 种方法分为 2 种思路:1) 一对近邻点进行曲线拟合,它们之间的区别在于近邻点数的确定以及拟合曲线模型的假设;2) 对近邻点进行离散求导,各方法之间的区别在于取点的策略以及如何利用近邻点的信息得到各阶导函数的可靠逼近,从而得到不同的曲率和挠率的计算方法。

2 实验比较

本节通过实验对上述 6 种算法计算的曲率和挠率的计算精度进行评估。为了便于比较,本文中实验方法的 k_1, k_2, k_3 均取值为 1。算法评估指标参考文献[26]的评价指标,选取最大相对误差 (max relative error, MRE) 和均方根误差 (root mean square error, RMSE),即对于获得的离散曲线,在每一个离散点 P_i 处的偏差定义为 $e_i = \varphi_i - \bar{\varphi}_i$,其中 $\bar{\varphi}_i$ 为实验方法的计算值, φ_i 为对应的准确值。因此,对于给定的离散曲线,其最大相对误差为 $E_{MRE} =$

$\max(|(\varphi_i - \bar{\varphi}_i)/\varphi_i|)$, 均方根误差为 $E_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \bar{\varphi}_i)^2}$ 。

最大相对误差体现算法的稳定性, 均方根误差反映算法的整体有效性。实验平台为个人笔记本电脑, 计算机配置是 Inter(R) Core(TM) i5-7300HQ CPU @2.50 GHz 处理器和 8 GB 内存, 程序运行环境是 MATLAB R2014b。

2.1 实验数据

实验用如图 1 所示的 6 条连续可微参数曲线进行分析。由于有曲线方程, 可以用经典微分几何的方法 (式 (1)、式 (2)) 计算出曲线上任意一个点的准确曲率值和挠率值, 有了准确值便于进行误差分析。实验分析用到的 6 条曲线参数方程如下:

1) 三次挠曲线:

$$r(t) = (2t, t^2, t^3), \quad t \in [-2, 2]$$

2) 多变式内接弹簧线:

$$r(t) = (2 \cos(3t) + \cos(2t), 2 \sin(3t) + \sin(2t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

3) 循环曲线:

$$r(t) = (\cos(t), \sin(t), 2 \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

4) Viviani 曲线:

$$r(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

5) Clelia 曲线:

$$r(t) = (\cos(2t) \cos(t), \cos(2t) \sin(t), \sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

6) 环面螺线:

$$r(t) = ((2 + \cos(t)) \cos(2t), (2 + \cos(t)) \sin(2t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

需要说明的是, 解析曲线方程用于生成离散曲线, 并用于计算离散曲线上每个采样点的准确的曲率值和挠率值。实验中对每条空间参数曲线通过均匀采样获得相应的离散曲线, 采样点数 n 在定义域内从 50 个点变化到 500 个点, 用于测试算法的有效性。第 1 章介绍的 5 种常用的离散曲线曲率和挠率计算方法以及本文提出的算法都采用离散曲线上的点的坐标进行计算, 都用不到曲线方程。

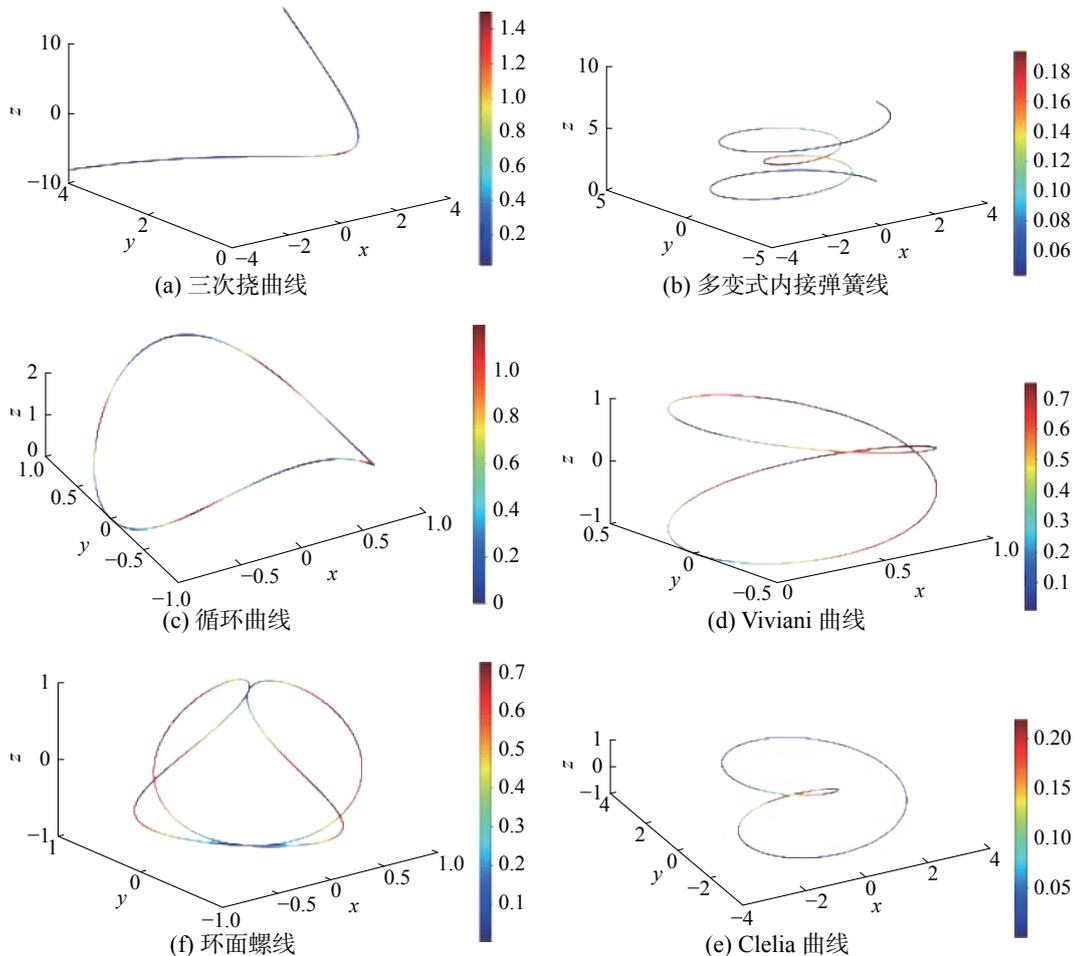


图 1 用于实验的 6 条空间曲线 (线颜色与挠率值对应)

Fig. 1 Six 3D curves used in the experiment (The color is corresponding to torsion value)

2.2 误差分析及时间效率比较

通过上述三维空间 6 条离散曲线来定量地评价本文提出的微中心差方法 (MCD), 并将其与第 1 章介绍的 B 样条曲线拟合法 (BSCF)、多项式曲

线拟合法 (PCF)、投影法 (Proj)、单侧差分法 (OSD)、离散几何法 (DG) 这 5 种算法的曲率和挠率的计算结果进行比较。图 2 ~ 7 分别给出了这 6 条离散曲线随着采样密度增加, 曲率和挠率的

最大相对误差 (MRE) 与均方根误差 (RMSE) 的变化。从图 2~7 的误差比较图可以看出, 随着采样密度 n 的不断增大, 这 6 种方法计算的曲率和挠率的最大相对误差和均方根误差都逐渐地减小, 并且采样密度越高, 最大相对误差值和均方根误差值越接近于 0, 这表明这 6 种算法都能有效地计算出三维空间离散曲线的曲率和挠率。

当然, 这 6 种方法在收敛速度和稳定性方面存在一些差异。从图 2~7 的曲率 MRE 对比子图可以看出: 投影法和单侧差分法的最大误差最大, 且随着采样密度增加, 误差一直比较大; 离散几何法与本文提出的微中心差分法的误差较小, 特别是当采样较稀疏时, 曲率估算的最大相对误差最小。从图 2~7 的这 6 个图中的每个子图 (c) 图的结果, 也说明从均方根指标评价, 也能得出同样结论。需要指出的是, 从均方根误差指标

看, 本文提出的算法在所有离散曲线的计算结果中几乎都能取得最佳效果。

图 2~7 分别给出了 6 条离散曲线随着采样密度增加的挠率最大相对误差 (MRE)。从图中可以看出, 随着采样密度 n 的不断增大, 本文方法的挠率最大相对误差逐渐地减小, 并且采样密度越大, 最大相对误差值和均方根误差值就越接近于 0, 这表明挠率计算越准确, 也表明本文方法在计算三维空间离散曲线的挠率时收敛性和稳定性较好。而单侧差分法、投影法和 B 样条曲线拟合法的曲率最大相对误差有时会有较大波动。

图 2~7 中 (c) 图呈现的挠率计算的均方根误差变化结果表明, 随着采样密度增大, 本文方法与离散几何方法和多项式拟合方法的均方根误差能单调递减收敛于 0, 而单侧差分法、投影法的误差收敛速度较差。

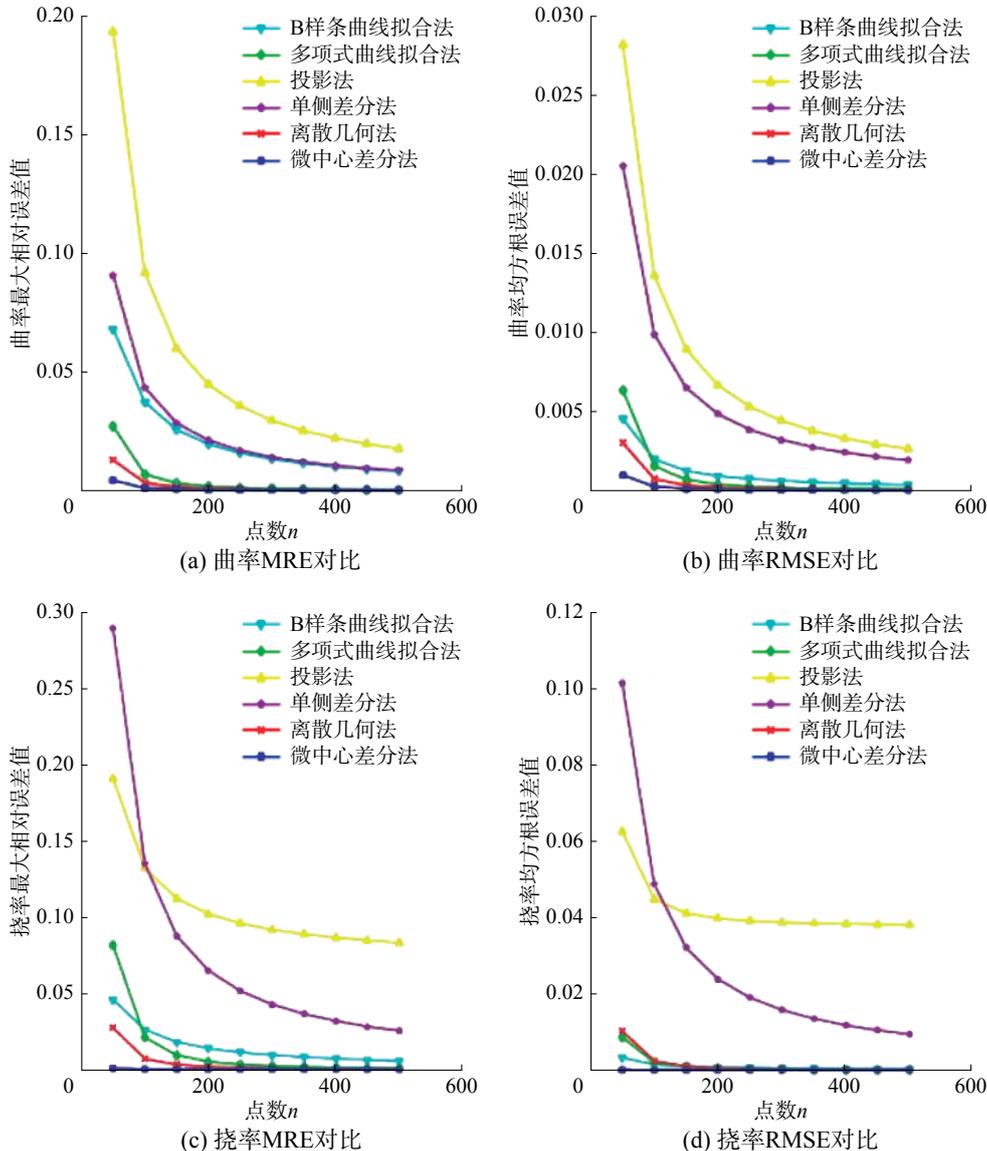


图 2 三次挠曲线误差对比实验

Fig. 2 Error comparison experiment of cubic deflection curve

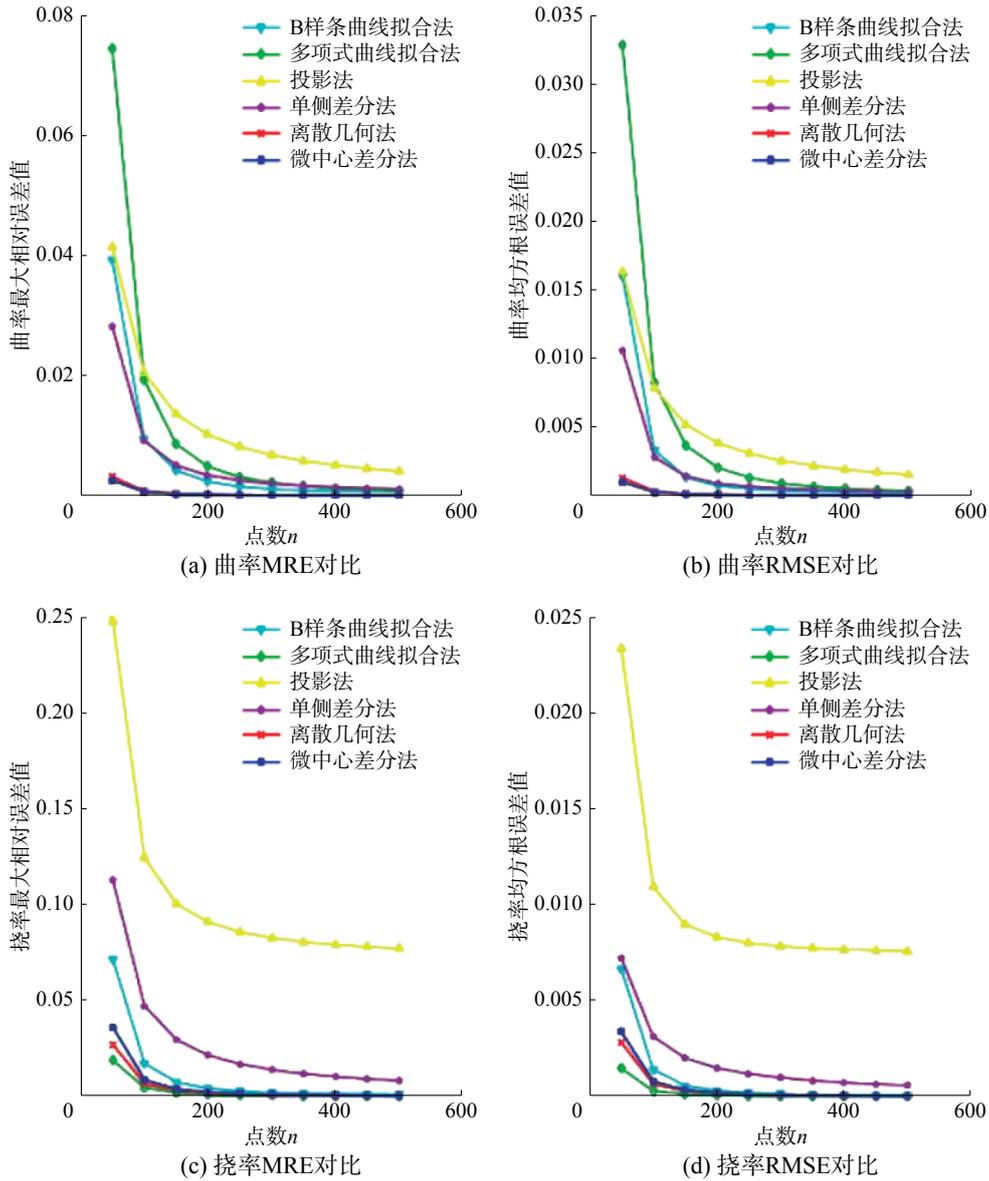
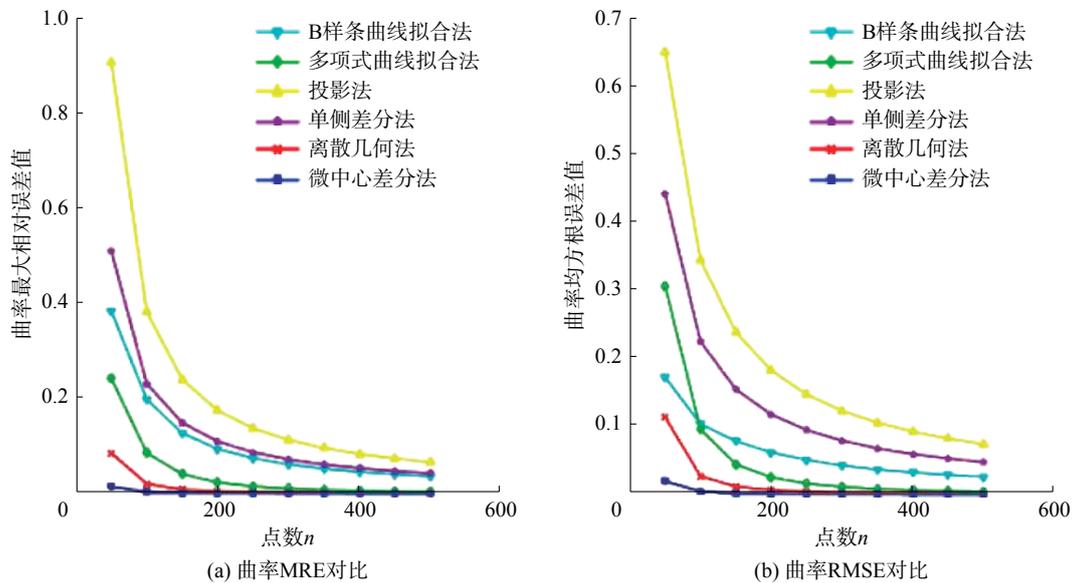


图 3 多变式内接弹簧线误差对比实验

Fig. 3 Error comparison experiment of changeable inner spring curve



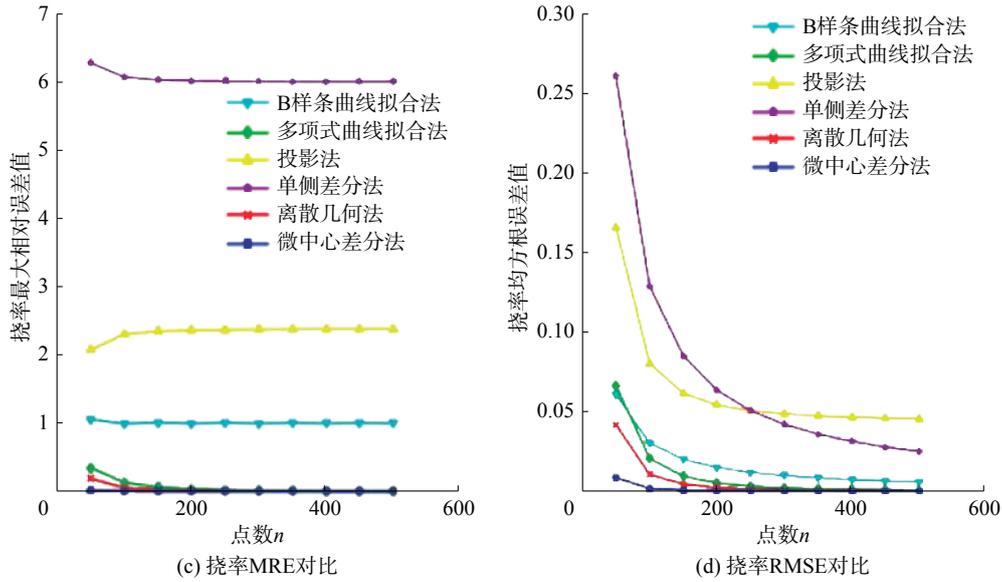


图 4 循环曲线误差对比实验

Fig. 4 Error comparison experiment of circular curve

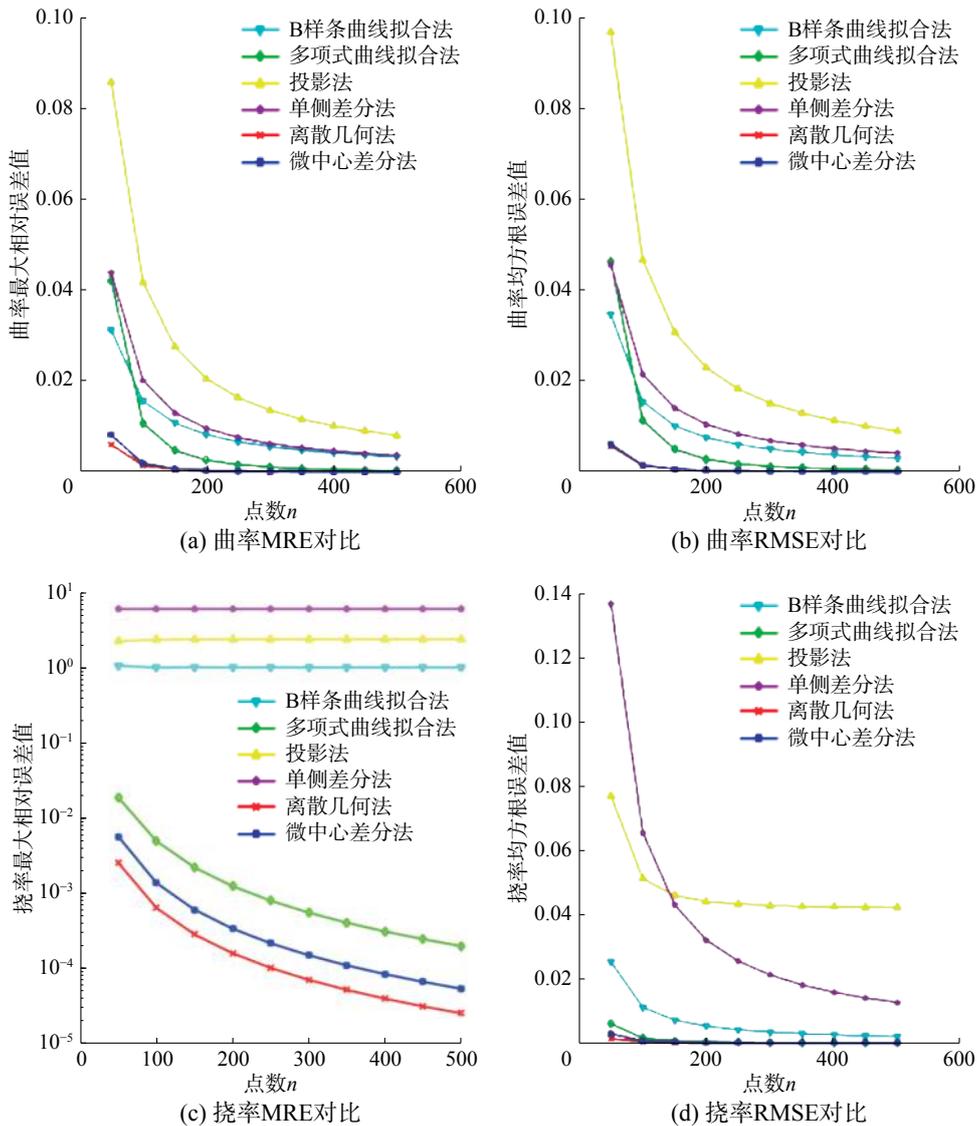


图 5 Viviani 曲线误差对比实验

Fig. 5 Error comparison experiment of Viviani curve

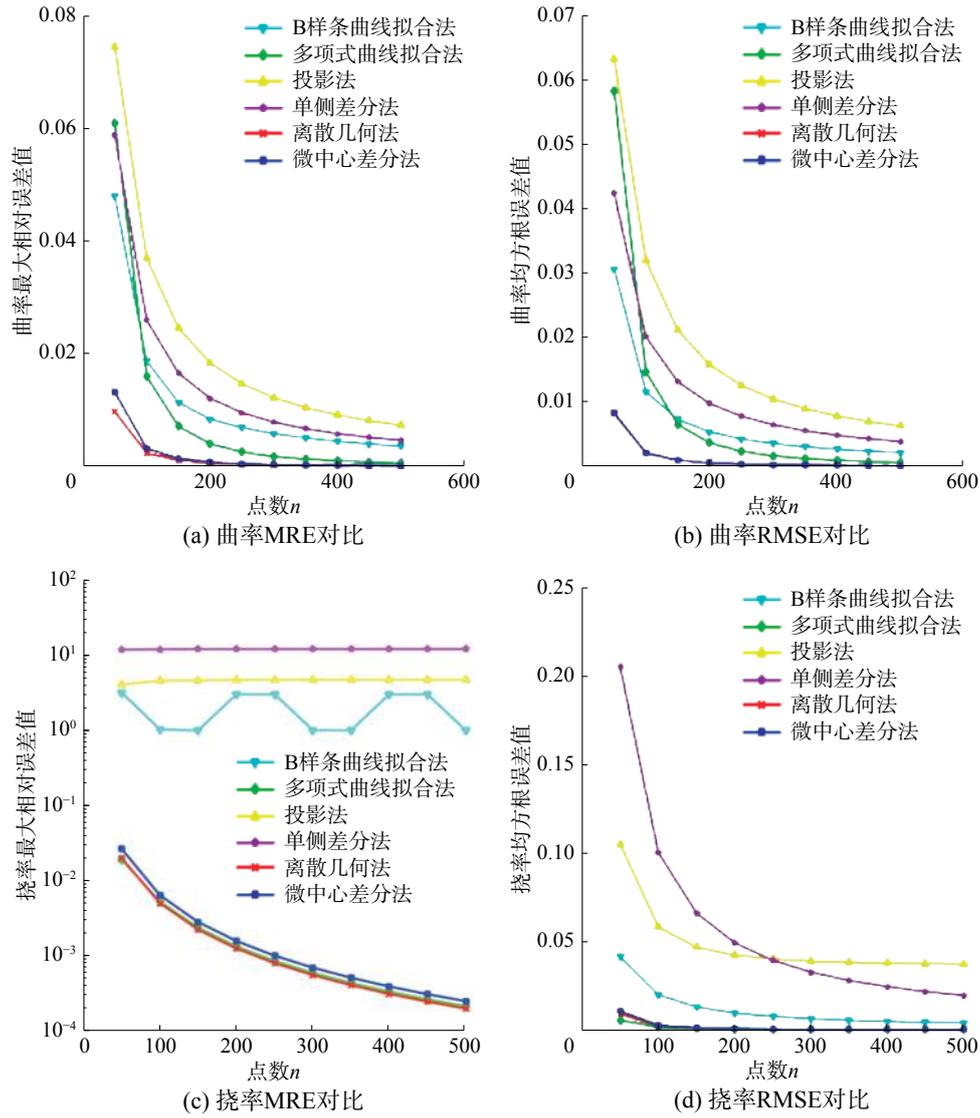
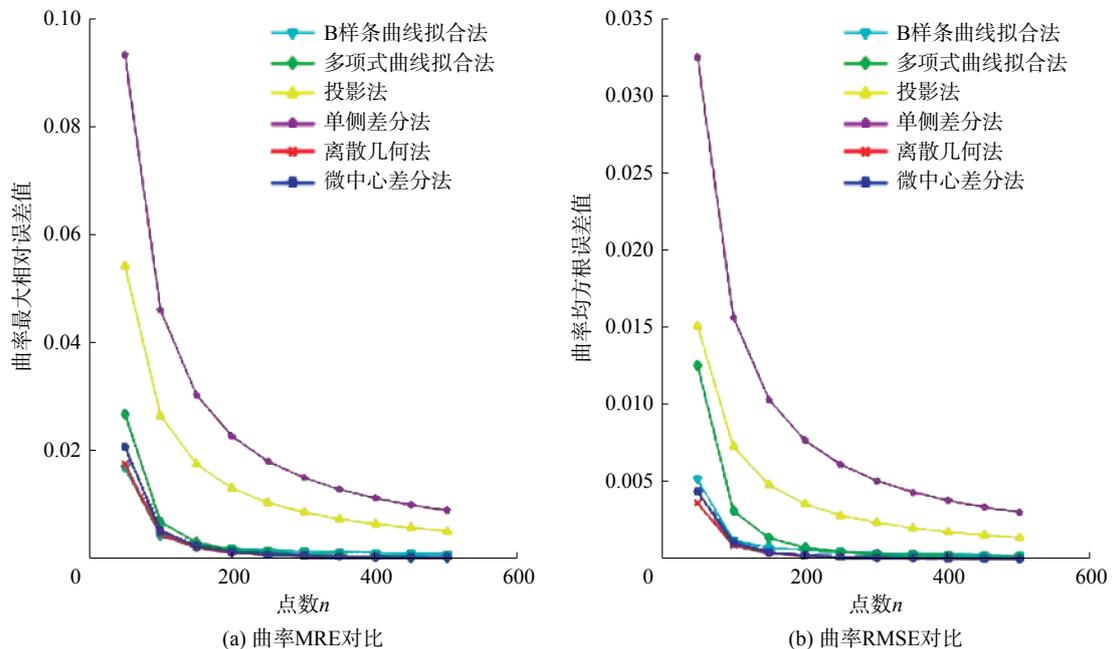


图 6 Clelia 曲线误差对比实验

Fig. 6 Error comparison experiment of Clelia curve



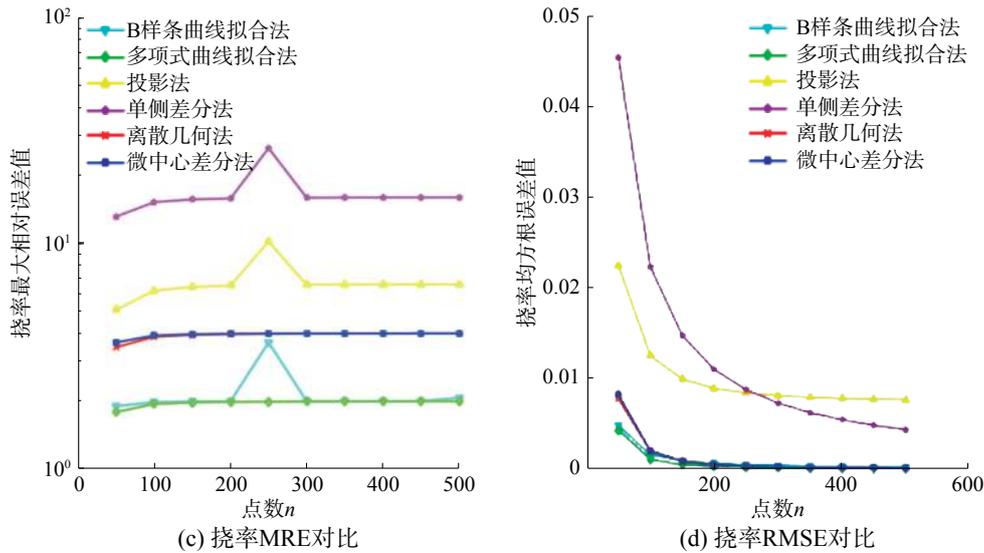


图 7 环面螺旋线误差对比实验

Fig. 7 Error comparison experiment of toroidal spiral curve

图 2~7 反映了随着点的密度增加, 曲率和挠率的误差的收敛性和稳定性。下面针对固定的点密度, 比较一下各个方法的精度。实验中我们根据上述的密度实验, 取采样点数量适中误差比较稳定的点密度, 即 $n=200$ 的时候进行 6 条曲线的曲率和挠率估计精度的比较, 结果如表 1 所示。

表 1 6 条曲线的平均误差比较 ($n=200$)

Table 1 Comparison of average error ($n = 200$)

算法	BSCF	PCF	Proj	OSD	DG	MCD
曲率	0.012 9	0.005 9	0.039 3	0.025 3	0.001 4	0.000 4
挠率	0.005 3	0.001 2	0.033 0	0.030 2	0.000 8	0.000 3

从表 1 可以看出, 本文提出的 MCD 方法计算的曲率和挠率平均误差分别为 0.000 4 和 0.000 3, 比另 5 种算法中效果最佳的 DG 算法的曲率和挠率平均误差 (分别为 0.001 4 和 0.000 8), 分别降低了 69.74% 和 55.36%。可见, 总体来看, 本文提出的算法无论是曲率估计还是挠率估计, 精度都是最高的。

关于运行效率, 从算法原理可以看出, 所有算法时间复杂度都是线性级的, 即 $O(n)$, 因此给出平均实验时间便可以说明计算的时间效率。用 6 种算法分别计算 6 条曲线的曲率和挠率, 对每条离散曲线的不同采样密度进行 50 次实验, 总的平均运行时间如表 2 所示。从表 2 可以看出, 离散结构法 (Proj、OSD、DG、MCD) 相比曲线拟合法 (BSCF、PCF), 计算效率大幅提高; 在离散结构法中, 单侧差分算法 (OSD) 平均运行

速度最快, 本文提出的微中心差分法处于中间位置。

表 2 6 种算法的平均运行时间比较

Table 2 Comparison of average running time of the six algorithms

算法	BSCF	PCF	Proj	OSD	DG	MCD
时间	56.655 9	63.693 5	0.053 8	0.000 9	0.007 0	0.012 0

2.3 噪声数据实验

为了测试每个算法的抗噪声鲁棒性, 在采样点数 n 为 200 时, 设置噪声水平为 0.000 1~0.1, 噪声为均值为零、标准差为离散曲线上邻近的两离散点之间的平均距离与噪声水平的乘积的高斯噪声。实验用 Clelia 曲线生成了不同噪声水平的离散曲线。

6 种算法计算的曲率最大相对误差和曲率均方根误差分别如图 8(a)、(b) 所示, 从图中可以看出: 噪声水平越高, 算法的误差变化越大; 各算法在噪声水平不大于 0.01 时, 均能较准确地计算离散曲线的曲率值; 噪声水平大于 0.01 时, 其误差明显变大, 尤其是单侧差分法和投影法, 而本文的方法误差变化浮动相对较小。

6 种算法计算的挠率最大相对误差和均方根误差分别如图 8(c)、(d) 所示, 从图中可以看出: 含噪声的离散曲线在计算挠率时变得更加敏感, 当噪声水平大于 0.001 时, 6 种算法得到的挠率值与真实值就已有明显的偏差, 并且随着噪声水平变大, 挠率的最大相对误差和均方根误差相比曲率也会更快地增大。与其他 5 种算法相比, 本文的方法误差变化浮动相对较小。

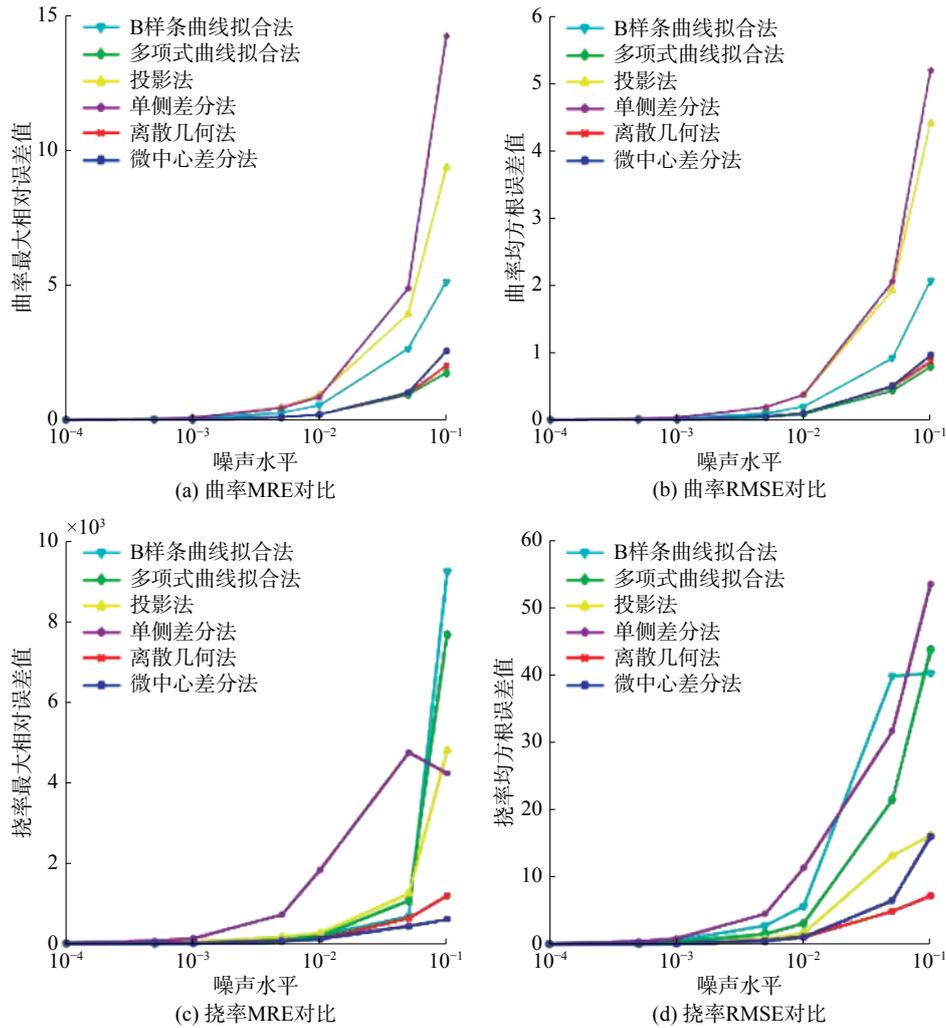


图 8 Clelia 曲线的不同噪声水平下的 MSE 和 RMSE($n = 200$)

Fig. 8 Max relative error and root mean square error of curvatures of Clelia curve under different noise levels ($n = 200$)

上述实验表明，噪声对 6 种算法的计算精度都有影响，尤其是当噪声水平较大时，挠率变化表现得更加明显。另外，在同样的噪声水平下，挠率的最大相对误差和均方根误差波动幅度相比曲率的最大相对误差和均方根误差波动幅度更大，这也说明离散曲线的挠率计算比曲率计算对噪声更加敏感。

3 结束语

针对三维空间离散曲线的曲率和挠率的计算方法设计问题，本文主要工作包括如下 2 个方面：

1) 根据 2016 年 Blankenburg 等提出的单侧差分方法和导数定义，结合差商平滑策略，设计了微中心差分法，该方法能够有效计算离散曲线的曲率和挠率。从整个计算过程可以发现，本文的方法不依赖于任何曲线模型，从离散曲线中直接计算所得，从而对各类离散曲线均具有较好的普适性。

2) 概述了多项式曲线拟合法、B 样条曲线拟合法、投影法、单侧差分法和离散几何法 5 种典型算法；详细阐述了本文提出的微中心差分法的基本思想和计算公式。采用 6 条离散曲线数据进行了不同算法的对比实验，实验表明，本文提出的微中心差分法的平均精度最高。

从实验结果可以看出，目前的这些算法的噪声鲁棒性并不是很好，特别是在有奇异点的时候，未来的研究可以进一步研究鲁棒性更佳的算法。此外，未来也可以研究利用曲率和挠率进行特征线的分析、提取和类型识别等。

参考文献：

[1] 李杰, 彭双春, 安宏雷, 等. 基于微分几何与李群的无人机编队会合方法[J]. 国防科技大学学报, 2013, 35(6): 157-164.
 LI Jie, PENG Shuangchun, AN Honglei, et al. UAVs formation rendezvous method based on differential geometry and Lie group[J]. Journal of national university of defense

- technology, 2013, 35(6): 157–164.
- [2] 单洪春. 基于空间特性的弹道特征抽取[J]. 飞行器测控学报, 2012, 31(2): 69–72.
SHAN Hongchun. Trajectory characteristics extraction based on space property[J]. Journal of spacecraft TT&C technology, 2012, 31(2): 69–72.
- [3] 葛婷, 符铎砂, 李海峰, 等. 公路三维线形设计及约束建模[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2016, 44(8): 91–97, 105.
GE Ting, FU Xinsha, LI Haifeng, et al. Three-dimensional highway alignment design and constraints modeling[J]. Journal of South China university of technology (natural science edition), 2016, 44(8): 91–97, 105.
- [4] 潘登, 郑应平. 路径约束条件下车辆行为的时空演化模型[J]. 物理学报, 2015, 64(7): 078902.
PAN Deng, ZHENG Yingping. Spatiotemporal evolution model of vehicular movement behavior under path constraints[J]. Acta physica sinica, 2015, 64(7): 078902.
- [5] PATRIKALAKIS N M, MAEKAWA T. Shape interrogation for computer aided design and manufacturing[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002.
- [6] MOKHTARIAN F, MACKWORTH A K. A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1992, 14(8): 789–805.
- [7] 袁修久, 王胜勇, 刘欣, 等. 推广的三维 L-系统及在树木模拟中的应用[J]. 系统仿真学报, 2011, 23(11): 2308–2311.
YUAN Xiujiu, WANG Shengyong, LIU Xin, et al. Improvement of three-dimensional L-system and its application to trees modeling[J]. Journal of system simulation, 2011, 23(11): 2308–2311.
- [8] 张冠军, 朱翔, 李天匀. 基于级数变换法的椭圆柱壳受迫振动分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2017, 38(4): 506–513.
ZHANG Guanjun, ZHU Xiang, LI Tianyun. Forced vibration analysis of elliptic cylindrical shell based on the series transformation method[J]. Journal of Harbin engineering university, 2017, 38(4): 506–513.
- [9] 孟道骥, 梁科. 微分几何[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2004: 6–28.
MENG Daoji, LIANG Ke. Differential geometry[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2004: 6–28.
- [10] DO CARMO M P. Differential geometry of curves and surfaces[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1976: 175–178.
- [11] BRAY H L, JAUREGUI J L. On curves with nonnegative torsion[J]. Archiv der mathematik, 2015, 104(6): 561–575.
- [12] LIU Huili. Curves in three dimensional riemannian space forms[J]. Results in mathematics, 2014, 66(3/4): 469–480.
- [13] MASSER D, ZANNIER U. Torsion points on families of products of elliptic curves[J]. Advances in mathematics, 2014, 259: 116–133.
- [14] 郑长波, 刘会立. 三维欧氏空间中的几类特殊球面曲线[J]. 浙江大学学报(理学版), 2013, 40(2): 127–130.
ZHENG Changbo, LIU Huili. Some special spherical curves in Euclidean 3-space[J]. Journal of Zhejiang university (science edition), 2013, 40(2): 127–130.
- [15] 袁媛, 李静, 刘会立. 三维欧氏空间中的特殊曲线[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2017, 38(11): 1669–1672.
YUAN Yuan, LI Jing, LIU Huili. Special curves in 3-dimensional euclidean space[J]. Journal of Northeastern university (natural science), 2017, 38(11): 1669–1672.
- [16] CAZALS F, POUGET M. Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets[J]. Computer aided geometric design, 2005, 22(2): 121–146.
- [17] 赵夫群, 周明全. 一种有效的秦俑碎块匹配算法[J]. 计算机系统应用, 2017, 26(3): 198–203.
ZHAO Fuqun, ZHOU Mingquan. Effective blocks matching algorithm of terracotta warrior[J]. Computer systems and applications, 2017, 26(3): 198–203.
- [18] 喻德生, 程程. 基于离散曲率的三次均匀 B 样条的局部光顺算法[J]. 浙江大学学报(理学版), 2011, 38(5): 511–517.
YU Desheng, CHENG Cheng. On local fairing algorithm for cubic B-spline with discrete curvature[J]. Journal of Zhejiang university (science edition), 2011, 38(5): 511–517.
- [19] KEHTARNAVAZ N, DEFIGUEIREDO R J P. A 3-D contour segmentation scheme based on curvature and torsion[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1988, 10(5): 707–713.
- [20] MARDIA K V. Estimation of torsion[J]. Journal of applied statistics, 1999, 26(3): 373–381.
- [21] BLANKENBURG C, DAUL C, OHSER J. Parameter free torsion estimation of curves in 3D images[C]//2016 IEEE International Conference on Image Processing. Phoenix, AZ, USA, 2016: 1081–1085.
- [22] AN Yi, SHAO Cheng, WANG Xiaoliang, et al. Geometric properties estimation from discrete curves using discrete derivatives[J]. Computers & graphics, 2011, 35(4): 916–930.
- [23] 陈维桓. 微分几何[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006: 23–47.
- [24] MA Weiyin, KRUTH J P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces[J]. Computer-aided design, 1995, 27(9): 663–675.
- [25] 周志华. 机器学习[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016:

28-37.

[26] 刘伟, 王雅静, 陈文钢, 等. 动态光散射反演算法的评价指标[J]. 光学学报, 2015, 35(S1): 129001.

LIU Wei, WANG Yajing, CHEN Wengang, et al. Evaluation criteria of inversion algorithm for dynamic light scattering[J]. Acta optica sinica, 2015, 35(S1): 129001.

作者简介:



慕生鹏, 男, 1992 年生, 硕士研究生, 中国计算机学会会员, 主要研究方向为计算几何。参加国家自然科学基金 1 项, 计算机软件著作权登记 2 项。



李红军, 男, 1969 年生, 副教授, 博士, 北京数学会理事, 中国计算机学会会员, 主要研究方向为计算几何、计算机图形学、图像处理和植物建模。主持国家自然科学基金面上项目 1 项、参加 2 项。获中国发明专利授权 9 项, 计算机软件著作权登记 11 项。发表学术论文 40 余篇, 被 SCI、EI 检索 20 余篇。



李世林, 男, 1992 年生, 硕士研究生, 中国计算机学会会员, 主要研究方向为计算几何。参加国家自然科学基金项目 1 项, 计算机软件著作权登记 4 项。发表学术论文 1 篇。

第 15 届中国智能系统会议 (CISC2019) 征文通知

中国智能系统会议是由中国人工智能学会智能空天系统专业委员会发起的系列学术会议, 其宗旨是为本领域的专家学者、研究生以及工程技术人员提供一个学术交流的平台, 以推动我国智能系统相关理论、技术与应用的发展。第 15 届中国智能系统会议 (CISC2019) 将于 2019 年 10 月 26—27 日在海南省海口市召开。

本次会议由中国人工智能学会主办, 中国人工智能学会智能空天系统专业委员会协办, 海南大学与北京航空航天大学联合承办。会议论文集将由 Springer 出版社在 Lecture Notes in Electrical Engineering 系列正式出版, EI 收录。热忱欢迎海内外广大同仁踊跃投稿并出席本届会议, 交流学术成果。

投稿要求:

1. 论文未曾在国内外杂志或会议上发表;
2. 稿件写作必须使用英文, 并严格按照模板要求进行排版;
3. 所有论文采用网上投稿, 投稿系统网址为 <https://easychair.org/conferences/?conf=cisc20191>

如有疑问请邮件咨询 cisc2019@126.com

论文模板:

会议提供 LaTeX 和 Microsoft Word 模 (分别见附件 2 和附件 3)。我们强烈建议您的论文使用会议模板进行编排。您也可以不使用这些模板, 但必须严格按照模板中的规范编排您的论文。如果您使用 MS Word 2007 及以上版本编排论文, 请使用 MS Word 2003 兼容格式。

重要日期:

论文投稿截止日期: 2019 年 4 月 30 日。

论文录用通知日期: 2019 年 6 月 20 日。

会议注册/终稿提交截止日期: 2019 年 7 月 10 日。