DOI: 10.11992/tis.201706081
网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20180411.1237.012.html

基于关联熵系数的粗糙 Vague 集相似性度量方法

张倩倩[1,2,3], 马媛媛[1,2,3], 徐久成[1,2,3]

（1. 河南师范大学 计算机与信息工程学院, 河南 新乡 453007; 2. “智慧商务与物联网技术”河南省工程实验室, 河南 新乡 453007; 3. 河南省高校计算智能与数据挖掘工程技术研究中心, 河南 新乡 453007）

摘　要: 粗糙 Vague 集是将粗糙集和 Vague 集理论相互融合以处理不确定性信息的一种理论工具。本文在深入研究 Vague 集及粗糙模糊集的关联熵、关联熵系数及集合相似性度量方法基础上, 将关联熵和关联熵系数的概念引入到粗糙 Vague 集, 并详细讨论了它们的主要性质, 同时证明了关联熵系数满足粗糙 Vague 集相似度的定义, 可用于粗糙 Vague 集的相似性度量。最后通过实例验证了粗糙 Vague 集的关联熵系数用于度量粗糙 Vague 集之间相似性程度的有效性, 该理论为粗糙 Vague 集相似性度量提供了一种新方法。

关键词: 粗糙 Vague 集; 相似性度量; 关联熵; 关联熵系数; 粗糙集
中图分类号: TP18　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673−4785(2018)04−0650−06

中文引用格式: 张倩倩, 马媛媛, 徐久成. 基于关联熵系数的粗糙 Vague 集相似性度量方法[J]. 智能系统学报, 2018, 13(4): 650–655.
英文引用格式: ZHANG Qianqian, MA Yuanyuan, XU Jiucheng. Measurement method of the similarity of rough vague sets based on relative entropy coefficient[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2018, 13(4): 650–655.

Measurement method of the similarity of rough vague sets based on relative entropy coefficient

ZHANG Qianqian[1,2,3], MA Yuanyuan[1,2,3], XU Jiucheng[1,2,3]

(1. College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China; 2. Engineering Lab of Intelligence Business &Internet of Things, Xinxiang 453007, China; 3. Engineering Technology Research Center for Computing Intelligence & Data Mining, Henan Province, Xinxiang 453007, China)

Abstract: The rough Vague set is a theoretical tool that combines the theories of rough and Vague sets to deal with uncertain information. In this paper, we introduce the concept of relative entropy and its coefficient to a rough Vague set to investigate a method for measuring relative entropy, its coefficient, and the similarity of Vague and rough fuzzy sets. We also analyzed their main properties. We verified that the coefficient of the relative entropy has similarity with that of rough Vague sets, and that this coefficient can be used to measure the similarity of rough Vague sets. Finally, we conducted a case study to verify the effectiveness of using the relative entropy coefficient of a rough Vague set to determine the degree of similarity between rough Vague sets. This theory provides a new method for measuring the similarity of rough Vague sets.

Keywords: rough Vague set; similarity measure; relative entropy; relative entropy coefficient; rough set

作为一种有效的知识表示和处理工具, 粗糙集理论[1]的主要思想是在保持分类能力不变的前提下, 通过引入上近似和下近似等概念来刻画知识的不确定性和模糊性。Vague 集[2]是在模糊集基础上发展起来的新型理论, 与模糊集相比, 该理论能同时表达支持和反对的证据, 更加符合人类的直觉, 在模式识别、人工智能、故障诊断等领域的应用已取得了显著效果[3-4]。Atanassov 于

收稿日期: 2017−06−26.　**网络出版日期:** 2018−04−11.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (61772176, 61370169, 61402153); 河南省科技攻关(重点)项目 (182102210362, 162102210261); 河南师范大学青年科学基金项目 (2015QK26); 河南省高等学校重点科研项目 (18A520031, 5201119140059).
通信作者: 马媛媛. E-mail: hnxxmyy@sina.com.

1986 年提出的直觉模糊集[5]理论同时考虑了对象的隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个方面的信息, 其实, Bustince 等[6]已经证明, Vague 集和直觉模糊集在定义上是等同的, 在本质上是一致的。目前, 有很多学者对粗糙集理论和 Vague 集理论[7-13]相互融合问题做了大量研究。我们后面的研究内容, 将不对 Vague 集和直觉模糊集的描述方式作区分, 在此统称为 Vague 集。

在模糊集、Vague 集及粗糙 Vague 集理论研究中, 相似性度量都是研究重点, 它是模糊聚类、模式识别、近似推理等理论研究的基础[14-16]。权双燕等[17]研究了 Vague 集的偏熵、关联熵和关联熵系数, 将其应用于 Vague 集相似性度量; 魏莱等[18]将关联熵和关联熵系数引入粗糙模糊集, 为考虑某种分类知识 R 下度量模糊集合之间的相似性程度提供了一种新方法。上述方法仅限于模糊集、Vague 集和粗糙模糊集的研究范畴, 具有一定的局限性。粗糙 Vague 集模型是粗糙集和 Vauge 集相互融合的理论方法, 适用于处理现实世界中兼具不可分辨性和模糊性概念的问题。Namburu 等[19]提出了广义粗糙直觉模糊 c 均值聚类算法, 用于脑磁谐振图像分割; Liu 等[20]通过直觉模糊相似性度量定义了冲突距离测量方法, 用于解决现实生活中的冲突问题。为了有效度量粗糙 Vague 集模型的相似性, 本文将关联熵、关联熵系数的应用领域进一步推广, 为粗糙 Vague 集相似性度量及模式识别提供一种新的思路和方法。最后给出的实例证明, 在知识对象具有不可分辨关系的背景下, 对 Vague 集对象进行聚类分析时, 应用粗糙 Vague 集的关联熵系数进行相似性度量更具合理性。

1　粗糙 Vague 集理论基础

定义 1[2]　设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为一个对象空间, 元素 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是所讨论的对象。U 上一 Vague 集 A 用一个真隶属函数 t_A 和一个假隶属函数 f_A 表示: $t_A(x_i):U\to[0,1]$, $f_A(x_i):U\to[0,1]$。其中 $t_A(x_i)$ 是由支持 x_i 的证据所导出的 x_i 隶属度的下界, $f_A(x_i)$ 则是由反对 x_i 的证据所导出 x_i 的否定隶属度下界, 且$t_A(x_i)+f_A(x_i)\leqslant 1$。元素 x_i 的隶属度被区间[0, 1]的一个子区间[$t_A(x_i)$, $1-f_A(x_i)$]所界定, 称该区间为 x_i 在 A 中的 Vague 值。

定义 2[17]　假定论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上一 Vague 集 A, 我们称

$$E(A)=-\frac{1}{n\ln 2}\times \sum_{i=1}^{n}(t_A(x_i)\ln t_A(x_i)+f_A(x_i)\ln f_A(x_i))$$

为 Vague 集 A 的熵。

一个 Vague 集的熵 E 同时表征了该 Vague 集的模糊正熵和模糊负熵, 在定义 2 中, 按惯例规定 0·ln 0=0, ln 0= –∞。在此定义的 Vague 集 A 的熵刻画了论域 U 中元素 x_i 与 Vague 集 A 之间关系的不确定性程度, E 越大, 我们对 x 与 A 的关系了解得越少。

定义 3[17]　设 A, B 是论域 U 中任意两个 Vague 集, 则 A 关于 B 的偏熵定义为

$$E_B(A)=-\sum_{i=1}^{n}(t_B(x_i)\ln t_A(x_i)+f_B(x_i)\ln f_A(x_i))$$

式中 B 称为基准集。

与 Vague 集的熵定义类似, 偏熵 $E_B(A)$ 也是 Vague 集 A 的不确定性程度的一种度量。

定义 4[17]　两个 Vague 集 A 与 B 之间的关联熵定义为它们的偏熵之和, 即

$$\begin{aligned}E(A;B)&=E_B(A)+E_A(B)=\\&-\sum_{i=1}^{n}[t_B(x_i)\ln t_A(x_i)+f_B(x_i)\ln f_A(x_i)+\\&t_A(x_i)\ln t_B(x_i)+f_A(x_i)\ln f_B(x_i)]\end{aligned}$$

显然 $E(A;B)$ 关于 $t_A(x_i)$、$t_B(x_i)$ 和 $f_A(x_i)$、$f_B(x_i)$ 是对称的, 而且是非负的。关于 Vague 集的关联熵的相关性质证明过程请参考文献[17]。

作为处理不确定信息的两种工具, Vague 集理论的出发点在于描述和解决概念内涵的模糊性和人们对概念认识不精确性的问题, 粗糙集理论则侧重于知识对象不可分辨性的不确定性问题的研究。当人们所面对的问题兼具这两方面的不确定性时, 即概念不但是模糊的, 而且是不可分辨的, 此时, 需要将粗糙集理论和 Vague 集理论相互融合, 研究粗糙 Vauge 集[7-8]的理论、方法及其不确定性度量, 以弥补它们单独在处理实际问题时的不足。

定义 5[21]　设$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为一论域, R 是 U 上的等价关系, V 是 U 上一 Vague 集, $\forall x_i\in U$, 由 R 和 V 构成的粗糙 Vague 集 (RV sets) 定义如下:

$$\underline{\mathrm{Rt}}(V)=\inf\{t_v(x)|x\in[x]_R\}$$
$$\overline{\mathrm{Rt}}(V)=\sup\{t_v(x)|x\in[x]_R\}$$
$$\underline{\mathrm{Rf}}(V)=\sup\{f_v(x)|x\in[x]_R\}$$
$$\overline{\mathrm{Rf}}(V)=\inf\{t_v(x)|x\in[x]_R\}$$

式中: $[x]_R$ 表示包含元素 $x\in U$ 的 R 等价类, 则上下近似 Vague 集表示为

$$\overline{\mathrm{RV}}=\left[\overline{\mathrm{Rt}}(V),\ 1-\overline{\mathrm{Rf}}(V)\right]$$
$$\underline{\mathrm{RV}}=[\underline{\mathrm{Rt}}(V),\ 1-\underline{\mathrm{Rf}}(V)],$$

称序对$\mathrm{RV}=(\underline{\mathrm{RV}},\overline{\mathrm{RV}})$为论域 U 上的粗糙 Vague 集。

定义 6[21]　设$\mathrm{RV}=(\underline{\mathrm{RV}},\overline{\mathrm{RV}})$是给定论域 U 上的粗糙 Vague 集, $x\in U$, 定义:

1) $RV_A \subseteq RV_B \Leftrightarrow t_{\underline{RV}_A}(x) \leqslant t_{\underline{RV}_B}(x)$, $1-f_{\underline{RV}_A}(x) \leqslant 1-f_{\underline{RV}_B}(x)$; $t_{\overline{RV}_A}(x) \leqslant t_{\overline{RV}_B}(x)$, $1-f_{\overline{RV}_A}(x) \leqslant 1-f_{\overline{RV}_B}(x)$。

2) $RV_C = RV_A \cup RV_B \Leftrightarrow t_{\underline{RV}_C}(x) = \max\{t_{\underline{RV}_A}(x), t_{\underline{RV}_B}(x)\}$, $f_{\underline{RV}_C} = \min\{f_{\underline{RV}_A}(x), f_{\underline{RV}_B}(x)\}$; $t_{\overline{RV}_C}(x) = \max\{t_{\overline{RV}_A}(x), t_{\overline{RV}_B}(x)\}$, $f_{\overline{RV}_C}(x) = \min\{f_{\overline{RV}_A}(x), f_{\overline{RV}_B}(x)\}$。

3) $RV_A = RV_B \Leftrightarrow t_{\underline{RV}_A}(x) = t_{\underline{RV}_B}(x)$, $1-f_{\underline{RV}_A}(x) = 1-f_{\underline{RV}_B}(x)$; $t_{\overline{RV}_A}(x) = t_{\overline{RV}_B}(x)$, $1-f_{\overline{RV}_A}(x) = 1-f_{\overline{RV}_B}(x)$。

4) $(RV_A)^c = ((\underline{RV}_A)^c, (\overline{RV}_A)^c) \Leftrightarrow t_{(\underline{RV}_A)^c}(x) = f_{\underline{RV}_A}(x)$, $f_{(\underline{RV}_A)^c}(x) = t_{\underline{RV}_A}(x)$; $t_{(\overline{RV}_A)^c}(x) = f_{\overline{RV}_A}(x)$, $f_{(\overline{RV}_A)^c}(x) = t_{\overline{RV}_A}(x)$。

2 粗糙 Vague 集的偏熵

定义 7 设 $S=(U, R)$ 为一近似空间, U 为论域, R 为 U 上一等价关系, RV_A, RV_B 是其上的两个粗糙 Vague 集, 定义 RV_A 关于 RV_B 的偏熵为

$$E_{RV_B}(RV_A) = E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) \wedge E_{\overline{RV}_B}(\overline{RV}_A)$$

式中:

$$E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) = -\sum_{i=1}^{n}\left[t_{\underline{RV}_B}(x_i)\ln t_{\underline{RV}_A}(x_i) + f_{\underline{RV}_B}(x_i)\ln f_{\underline{RV}_A}(x_i)\right]$$

$$E_{\overline{RV}_B}(\overline{RV}_A) = -\sum_{i=1}^{n}\left[t_{\overline{RV}_B}(x_i)\ln t_{\overline{RV}_A}(x_i) + f_{\overline{RV}_B}(x_i)\ln f_{\overline{RV}_A}(x_i)\right]$$

如果将 RV_B 看作一个基准粗糙 Vague 集, 那么 RV_A 关于 RV_B 的偏熵表示了粗糙 Vague 集 RV_A 的一个不确定性程度, 它分别考虑了 RV_A 上近似、RV_A 下近似的不确定性程度。

下面给出粗糙 Vague 集 RV_A 关于粗糙 Vague 集 RV_B 的偏熵具有的性质。

性质 1(非负性) 设 $S=(U, R)$ 为一近似空间, RV_A、RV_B 是其上的两个粗糙 Vague 集, 则有 $E_{RV_B}(RV_A) > 0$。

证明: 由于 $0 \leqslant t_{\underline{RV}_B}(x_i) \leqslant 1$, 则有 $\ln t_{\underline{RV}_A}(x_i) \leqslant 0$; 又由 $0 \leqslant f_{\underline{RV}_B}(x_i) \leqslant 1$, 有 $\ln f_{\underline{RV}_A}(x_i) \leqslant 0$, 由定义 7 有 $E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) > 0$。

同理有 $E_{\overline{RV}_B}(\overline{RV}_A) > 0$, 故 $E_{RV_B}(RV_A) > 0$。

性质 2 当 $t_B(x_i) \leqslant f_B(x_i)$ 时, $E_{RV_B}(RV_A) \geqslant E(\underline{RV}_B)n\ln 2$; 当 $t_B(x_i) > f_B(x_i)$ 时, $E_{RV_B}(RV_A) > E(\overline{RV}_B)n\ln 2$。

证明: 由于 $E_{RV_B}(RV_A) = E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) \wedge E_{\overline{RV}_B}(\overline{RV}_A)$, 根据凸函数 Jenson 不等式有,

$$\begin{aligned}
&E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) - E(\underline{RV}_B)n\ln 2 = \\
&-\sum_{i=1}^{n}\left[t_{\underline{RV}_B}(x_i)\ln\frac{t_{\underline{RV}_A}(x_i)}{t_{\underline{RV}_B}(x_i)} + f_{\underline{RV}_B}(x_i)\ln\frac{f_{\underline{RV}_A}(x_i)}{f_{\underline{RV}_B}(x_i)}\right] \geqslant \\
&-\sum_{i=1}^{n}\ln\left[t_{\underline{RV}_B}(x_i)\cdot\frac{t_{\underline{RV}_A}(x_i)}{t_{\underline{RV}_B}(x_i)} + f_{\underline{RV}_B}(x_i)\cdot\frac{f_{\underline{RV}_A}(x_i)}{f_{\underline{RV}_B}(x_i)}\right] = \\
&-\sum_{i=1}^{n}\ln\left[t_{\underline{RV}_A}(x_i) + f_{\underline{RV}_A}(x_i)\right] \geqslant \\
&-\sum_{i=1}^{n}\ln 1 = 0
\end{aligned}$$

因此, $E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) \geqslant E(\underline{RV}_B)n\ln 2$, 同理可有 $E_{\overline{RV}_B}(\overline{RV}_A) \geqslant E(\overline{RV}_B)n\ln 2$, 因此 $E_{RV_B}(RV_A) \geqslant \min\{E(\underline{RV}_B), E(\overline{RV}_B)\}n\ln 2$, 当 $t_B(x_i) \leqslant f_B(x_i)$ 时, $E(\overline{RV}_B) \geqslant E(\underline{RV}_B)$, 可证得 $E_{RV_B}(RV_A) \geqslant E(\underline{RV}_B)n\ln 2$; 当 $t_B(x_i) < f_B(x_i)$ 时, $E(\overline{RV}_B) < E(\underline{RV}_B)$, 因此有 $E_{RV_B}(RV_A) > E(\overline{RV}_B)n\ln 2$。

性质 3 设 $S=(U, R)$ 为一近似空间, RV_A、RV_B 是其上的两个粗糙 Vague 集, 则有:

1) $E_{RV_A}[(RV_A)^c] = E_{(RV_A)^c}(RV_A)$

2) $E_{(RV_B)^c}[(RV_A)^c] = E_{RV_B}(RV_A)$

3) $E_{RV_A\cup(RV)^c}(RV_A \cap (RV_A)^c) = E_{RV_A\cap(RV)^c}(RV_A \cup (RV_A)^c)$

这些性质根据定义很容易证明, 在这里不再赘述。

3 粗糙 Vague 集的关联熵系数及相似性度量方法

定义 8 粗糙 Vague 集 RV_A、RV_B 的关联熵同时考虑到两个粗糙 Vague 集的上近似与下近似并且定义为它们的偏熵之和, 即

$$\begin{aligned}
E(RV_A; RV_B) = E(\underline{RV}_A; \underline{RV}_B) \wedge E(\overline{RV}_A; \overline{RV}_B) = \\
\left(E_{\underline{RV}_B}(\underline{RV}_A) + E_{\underline{RV}_A}(\underline{RV}_B)\right) \wedge \\
\left(E_{\overline{RV}_B}(\overline{RV}_A) + E_{\overline{RV}_A}(\overline{RV}_B)\right)
\end{aligned}$$

显然, 从定义 7 可以看出, 粗糙 Vague 集的关联熵系数 $E(RV_A; RV_B)$ 是对称的, 而且是非负的, 即有如下性质:

性质 4 $E(RV_A; RV_B) = E(RV_B; RV_A) \geqslant 0$。

性质 5 RV_A、RV_B 是粗糙 Vague 集, 则有 $E(RV_A \cup RV_B; RV_A \cap RV_B) = E(RV_A; RV_B)$。

证明: 令 $RV_C = RV_A \cup RV_B$, $RV_D = RV_A \cap RV_B$, 则 $E(RV_A \cup RV_B; RV_A \cap RV_B) = E(RV_C; RV_D) = E(\underline{RV}_C; \underline{RV}_D) \wedge E(\overline{RV}_C; \overline{RV}_D)$, 因此, 只要证明 $E(\underline{RV}_C; \underline{RV}_D) = E(\underline{RV}_A; \underline{RV}_B)$; $RV_B)$, $E(\overline{RV}_C; \overline{RV}_D) = E(\overline{RV}_A; \overline{RV}_B)$ 即可。

在此, 需要分 4 种情况进行讨论:

1) 记 $X^{(1)} = \{x | x \in U, t_{\overline{RV}_A}(x_i) > t_{\overline{RV}_B}(x_i)$ 且 $f_{\overline{RV}_A}(x_i) > f_{\overline{RV}_B}(x_i)\}$

2) 记 $X^{(2)} = \{x | x \in U, t_{\overline{RV}_A}(x_i) > t_{\overline{RV}_B}(x_i)$ 且 $f_{\overline{RV}_A}(x_i) < f_{\overline{RV}_B}(x_i)\}$

3) 记 $X^{(3)} = \{x | x \in U, t_{\overline{RV}_A}(x_i) < t_{\overline{RV}_B}(x_i)$ 且 $f_{\overline{RV}_A}(x_i) > f_{\overline{RV}_B}(x_i)\}$

4) 记 $X^{(4)} = \{x | x \in U, t_{\overline{RV}_A}(x_i) < t_{\overline{RV}_B}(x_i)$ 且 $f_{\overline{RV}_A}(x_i) < f_{\overline{RV}_B}(x_i)\}$

则:

$$\begin{aligned}
&E(\overline{RV}_C; \overline{RV}_D) = E_{\overline{RV}_D}(\overline{RV}_C) + E_{\overline{RV}_C}(\overline{RV}_D) = \\
&-\sum_{i=1}^{n}\left(t_{\overline{RV}_D}(x_i)\ln t_{\overline{RV}_C}(x_i) + f_{\overline{RV}_D}(x_i)\ln f_{\overline{RV}_C}(x_i)\right) - \\
&\sum_{i=1}^{n}\left(t_{\overline{RV}_C}(x_i)\ln t_{\overline{RV}_D}(x_i) + f_{\overline{RV}_C}(x_i)\ln f_{\overline{RV}_D}(x_i)\right) =
\end{aligned}$$

$$-\sum_{x\in X^{(1)}}\left(t_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)\ln t_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)+f_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)\ln f_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)\right)-$$
$$\sum_{x\in X^{(1)}}\left(t_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)\ln t_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)+f_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)\ln f_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)\right)=$$
$$-\sum_{x\in X^{(1)}}\left(t_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)\ln t_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)+f_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)\ln f_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)\right)-$$
$$\sum_{x\in X^{(1)}}\left(t_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)\ln t_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)+f_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x_i)\ln f_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x_i)\right)=$$
$$E(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)$$

其他 3 种情况证明类似。

同理可以证明$E(\underline{\mathrm{RV}}_C;\underline{\mathrm{RV}}_D)=E(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)$, 所以有$E(\mathrm{RV}_A\cup\mathrm{RV}_B;\mathrm{RV}_A\cap\mathrm{RV}_B)=E(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)$。

定义 9　粗糙 Vague 集 RV_A、RV_B 的关联熵系数定义为

$$\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)=\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)\wedge\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)$$

式中: $\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)=\dfrac{(E(\underline{\mathrm{RV}}_A)+E(\underline{\mathrm{RV}}_B))n\ln2}{E(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)}$; $\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)=\dfrac{(E(\overline{\mathrm{RV}}_A)+E(\overline{\mathrm{RV}}_B))n\ln2}{E(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)}$。

为了进一步利用关联熵系数来度量粗糙 Vague 集的相似性, 下面我们先给出粗糙 Vague 集相似度的定义。

定义 10　设论域 U 是一个非空集合, R 是 U 上的一个等价关系, A、B 是 U 上两个 Vague 集, 由 R 和 A、B 构成的粗糙 Vague 集分别为 RV_A 和 RV_B, 其中$\mathrm{RV}_A=(\underline{\mathrm{RV}}_A,\overline{\mathrm{RV}}_A)$, $\mathrm{RV}_B=(\underline{\mathrm{RV}}_B,\overline{\mathrm{RV}}_B)$, 如果 $M(\mathrm{RV}_A,\mathrm{RV}_B)$ 满足性质:

1) $0\leqslant M(\mathrm{RV}_A,\mathrm{RV}_B)\leqslant1$;

2) 如果 $\mathrm{RV}_A=\mathrm{RV}_B$, 则 $M(\mathrm{RV}_A,\mathrm{RV}_B)=1$;

3) $M(\mathrm{RV}_A,\mathrm{RV}_B)=M(\mathrm{RV}_B,\mathrm{RV}_A)$,

则称 $M(\mathrm{RV}_A,\mathrm{RV}_B)$ 为粗糙 Vague 集 RV_A 与 RV_B 的相似度。

显然, 粗糙 Vague 集 RV_A、RV_B 的关联熵系数 $\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)$ 是对称的, 而且是非负的, 即粗糙 Vague 集的关联熵系数具有如下性质:

性质 6　$\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)=\rho(\mathrm{RV}_B;\mathrm{RV}_A)\geqslant0$。

性质 7　RV_A, RV_B 是任意的粗糙 Vague 集, 则有 $0\leqslant\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)\leqslant1$; 当且仅当 $\mathrm{RV}_A=\mathrm{RV}_B$ 时, $\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)=1$。

证明　由定义 6 可知, 当 $\mathrm{RV}_A=\mathrm{RV}_B$ 时, 有$t_{\underline{\mathrm{RV}}_A}(x)=t_{\underline{\mathrm{RV}}_B}(x)$, $1-f_{\underline{\mathrm{RV}}_A}(x)=1-f_{\underline{\mathrm{RV}}_B}(x)$; 且$t_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x)=t_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x)$, $1-f_{\overline{\mathrm{RV}}_A}(x)=1-f_{\overline{\mathrm{RV}}_B}(x)$, 所以根据粗糙 Vague 集关联熵定义即有 $\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)=1$。

又因为$\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)\leqslant1$, $\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)\leqslant1$, $\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)=\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)\wedge\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)$, 所以 $0\leqslant\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)\leqslant1$。

从性质 6 和性质 7 可以看出, 粗糙 Vague 集的关联熵系数 $\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)$ 满足定义 10 中粗糙 Vague 集相似度的定义。

与 Fuzzy 集、粗糙模糊集的关联熵系数类似, 在定义 9 中粗糙 Vague 集 RV_A、RV_B 的关联熵系数的定义中, $\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)$是对两个粗糙 Vague 集 RV_A, RV_B 上近似相似程度的度量, $\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)$是对两个粗糙 Vague 集 RV_A、RV_B 下近似相似性度量。为了有效度量两个粗糙 Vague 集间的相似性, 关联熵系数 $\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)$ 同时考虑了上、下近似相似性程度, 具有一定的合理性。

性质 8　$\rho(\mathrm{RV}_A\cup\mathrm{RV}_B;\mathrm{RV}_A\cap\mathrm{RV}_B)=\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)$。

证明方法同性质 5 的证明类似, 这里不再赘述。

粗糙 Vague 集是针对现实世界中所研究对象兼具模糊性和不可分辨性特点的新的理论方法, 研究粗糙 Vague 集的关联熵和关联熵系数可为粗糙 Vague 集相似性度量提供一种新思路。

4　实例分析与比较

例 1　给定一个知识库 $K=(U,R)$, 其中论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$, R 是 U 上一个不分明关系, $U/R=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$, 其中: $E_1=\{x_1,x_4,x_8\}$, $E_2=\{x_2,x_5,x_7\}$, $E_3=\{x_3\}$, $E_4=\{x_6\}$, 假定 U 上两个 Vague 集分别为:

$A=\{[0.7,0.8]/x_1,[0.8,0.9]/x_2,[0.3,0.4]/x_3,[0.1,0.2]/x_4,[0.5,0.6]/x_5,[0.4,0.5]/x_6,[0.3,0.5]/x_7,[0.5,0.7]/x_8\}$;

$B=\{[0.7,0.9]/x_1,[0.6,0.7]/x_2,[0.5,0.6]/x_3,[0.2,0.3]/x_4,[0.4,0.6]/x_5,[0.3,0.4]/x_6,[0.4,0.5]/x_7,[0.1,0.2]/x_8\}$。

对于每个对象 Vague 取值的依据, 这里暂不做讨论, 有时候是凭借专家经验。由粗糙 Vague 集的定义可知, 论域 U 上的两个 Vague 集 A、B 在不分明关系 R 上的下、上近似 Vague 集分别为:

$\underline{\mathrm{RA}}=\{[0.1,0.2]/g_1,[0.3,0.5]/g_2,[0.3,0.4]/g_3,[0.4,0.5]/g_4\}$

$\overline{\mathrm{RA}}=\{[0.7,0.8]/g_1,[0.8,0.9]/g_2,[0.3,0.4]/g_3,[0.4,0.5]/g_4\}$

$\underline{\mathrm{RB}}=\{[0.1,0.2]/g_1,[0.4,0.5]/g_2,[0.5,0.6]/g_3,[0.3,0.4]/g_4\}$

$\overline{\mathrm{RB}}=\{[0.7,0.9]/g_1,[0.6,0.7]/g_2,[0.5,0.6]/g_3,[0.4,0.5]/g_4\}$

式中: g_i 分别代表论域 U 上的对象在等价关系 R 下的等价类。这样, $\mathrm{RV}_A=(\underline{\mathrm{RV}}_A,\overline{\mathrm{RV}}_A)$, $\mathrm{RV}_B=(\underline{\mathrm{RV}}_B,\overline{\mathrm{RV}}_B)$ 分别为等价关系 R 下的两个粗糙 Vague 集。

由粗糙 Vague 集关联熵系数的定义, 经计算可得:

$\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)=0.95$; $\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)=0.91$

则 RV_A 和 RV_B 的关联熵系数$\rho(\mathrm{RV}_A;\mathrm{RV}_B)=$

$\rho(\underline{\mathrm{RV}}_A;\underline{\mathrm{RV}}_B)\wedge\rho(\overline{\mathrm{RV}}_A;\overline{\mathrm{RV}}_B)=0.91$，即在论域 U 中知识具有不可分辨关系的背景下，两个 Vague 集 A 和 B 具有极高的相似度，难以区分。

同样可以计算，若不考虑知识背景 R 时，Vauge 集 A 和 Vague 集 B 的关联熵系数 $\rho(V_A;V_B)=0.84$，则在模式识别或者聚类分析应用领域，若研究对象空间的粒度很细，即所研究对象可精确分辨的背景下，Vague 集 A 和 B 相对容易区分。

为了进一步说明问题，下面和文献[22-23]中有关直觉模糊集相似度在模式识别方面的应用来做对比分析。

例 2　设有 3 个已知模式 P_1、P_2 与 P_3，分别被标注为 C_1、C_2 与 C_3 类。3 个模式 P_1、P_2 与 P_3 是定义在论域 $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$上的直觉模糊集。在此，我们将此例中的直觉模糊集用 Vague 集的形式表示，则有：

$P_1=\{[0.5, 0.8]/x_1, [0.5, 0.8]/x_2, [0.4, 0.8]/x_3, [0.5, 0.7]/x_4\}$；

$P_2=\{[0.5, 0.7]/x_1, [0.5, 0.8]/x_2, [0.4, 0.8]/x_3, [0.3, 0.5]/x_4\}$；

$P_3=\{[0.3, 0.9]/x_1, [0.5, 1.0]/x_2, [0.3, 0.9]/x_3, [0.5, 0.5]/x_4\}$；

现有一个定义在 $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$上的未知模式：

$Q=\{[0.4, 0.8]/x_1, [0.5, 0.8]/x_2, [0.4, 0.8]/x_3, [0.5, 0.5]/x_4\}$。

为了知道 Q 被划分到 C_1、C_2 与 C_3 的哪一个类，需要分别计算 Q 与 3 个已知模式 P_1、P_2 与 P_3 的相似度。

在例 2 中，可以认为是最细粒度的粗糙 Vague 集，即每个对象 x_i 都是可区分的。因此，只需要分别计算 Q 与 P_1、P_2、P_3 的关联熵系数即可。由定义 9 计算得知 $\rho(P_1;Q)=0.96$，$\rho(P_2;Q)=0.97$，$\rho(P_3;Q)=0.79$。

其中，在计算 $\rho(P_3;Q)$ 过程中，由于 P_3 在 x_2 上的假隶属度 $f_x=0$，因此在计算中使用了一个较小的数，这里用 0.01 来替换，得出 P_3 与 Q 的关联熵系数为 0.79。如果用来替换的数值更小，关联熵系数越小。因此，使用关联熵系数来度量 Vague 集的相似度时，将 Q 识别为 C_2 类，得到了和文献[23]一致的结论。此外，Q 与 C_1 类之间的相似度和 Q 与 C_2 类之间的相似度差别较小，这就是为什么在文献[23]中，会出现采用某些度量方法将 Q 识别为 C_1 类，有些度量方法将 Q 识别为 C_2 类。

可见，文中采用关联熵系数来度量粗糙 Vague 集相似度的方法，是 Vague 集相似度度量方法的推广。当 Vague 集中对象之间完全可区分时，即可用来度量两个 Vague 集的相似度；当 Vague 集中对象之间具有不可分辨关系时，即可用关联熵系数来度量粗糙 Vague 集的相似度，此时，需要同时考虑上近似和下近似的相似程度。

5　结束语

若考虑一定的知识背景，即所研究对象在某种程度上不可分辨时，单纯度量模糊集或者 Vague 集之间相似性的度量方法具有一定的局限性。有学者通过引入粗糙模糊集的关联熵系数，用于度量粗糙模糊集的相似性程度就比较合理。当实际应用中所面对的研究对象为更符合人类直觉的 Vague 集时，本文提出了基于关联熵系数的粗糙 Vague 集模型相似性度量方法，并通过实例验证了方法的有效性，为粗糙 Vague 集的相似性度量提供一种新思路。在以后的研究中，将进一步讨论粗糙 Vague 集相似性度量方法在真实数据集上的相关应用，为 Vague 集聚类分析、模式识别和大数据挖掘提供理论基础。

参考文献：

[1] PAWLAK Z. Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2] GAU W L, BUEHRER D J. Vague sets[J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1993, 23(2): 610–614.

[3] ZHANG Qingchuan, ZENG Guangping, XIAO Chaoen, et al. A rule conflict resolution method based on Vague set[J]. Soft computing, 2014, 18(3): 549–555.

[4] 欧阳春娟, 李斌, 李霞, 等. 基于 Vague 集相似度量的图像隐写系统安全性测度[J]. 计算机学报, 2012, 35(7): 1510–1521.
OUYANG Chunjuan, LI Bin, LI Xia, et al. A new security evaluation for steganographic system based on Vague set similarity measure[J]. Chinese journal of computers, 2012, 35(7): 1510–1521.

[5] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems, 1986, 20(3): 87–96.

[6] BUSTINCE H, BURILLO P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems, 1996, 79(3): 403–405.

[7] 徐久成, 张倩倩. 覆盖粗糙 Vague 集的不确定性度量研究[J]. 计算机科学, 2010, 37(10): 225–227, 282.
XU Jiucheng, ZHANG Qianqian. Research on uncertainty measurement for covering rough-Vague sets[J]. Computer science, 2010, 37(10): 225–227, 282.

[8] 王伟, 彭进业, 李展. 一种覆盖粗糙 Vague 集模型及其不确定性度量[J]. 计算机科学, 2012, 39(8): 228–232.

WANG Wei, PENG Jinye, LI Zhan. Covering rough Vague sets and uncertainty measurement[J]. Computer science, 2012, 39(8): 228–232.

[9] SUN Bingzhen, XU Youquan, ZENG Dalin. Rough Vague set over two universes[C]//Proceedings of 2013 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Tianjin, China, 2013: 682–686.

[10] HUANG Bing, WEI Dakuan, LI Huaxiong, et al. Using a rough set model to extract rules in dominance-based interval-valued intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information sciences, 2013, 221: 215–229.

[11] 郭庆, 杨善林, 刘文军. 直觉模糊集信息系统属性约简算法[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(4): 138–143.
GUO Qing, YANG Shanlin, LIU Wenjun. A novel attributes reduction algorithm of intuitionistic fuzzy-valued information system[J]. Fuzzy systems and mathematics, 2014, 28(4): 138–143.

[12] HUANG Bing, GUO Chunxiang, ZHUANG Yuliang, et al. Intuitionistic fuzzy multigranulation rough sets[J]. Information sciences, 2014, 277: 299–320.

[13] 郭郁婷, 李进金, 李克典, 等. 多粒度覆盖粗糙直觉模糊集模型[J]. 南京大学学报: 自然科学版, 2015, 51(2): 438–446.
GUO Yuting, LI Jinjin, LI Kedian, et al. Multi-granulation covering rough-intuitionistic fuzzy set model[J]. Journal of Nanjing university: natural sciences, 2015, 51(2): 438–446.

[14] 范成礼, 雷英杰, 张戈. 改进的直觉模糊粗糙集相似性度量方法[J]. 计算机应用, 2011, 31(5): 1344–1347.
FAN Chengli, LEI Yingjie, ZHANG Ge. Improved measure of similarity between intuitionistic fuzzy rough sets[J]. Journal of computer applications, 2011, 31(5): 1344–1347.

[15] 楚俊峰, 王应明. 基于新的区间直觉模糊集相似性测度的模式识别[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(9): 140–143, 155.
CHU Junfeng, WANG Yingming. Method of pattern recognition based on new similarity measure of interval-valued intu-itionistic fuzzy set[J]. Computer engineering and applications, 2013, 49(9): 140–143, 155.

[16] 王毅, 刘三阳, 程月蒙, 等. 基于倾向性的直觉模糊相似度量方法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(4): 863–867.
WANG Yi, LIU Sanyang, CHENG Yuemeng, et al. Intuitionistic fuzzy similarity measure approach based on orientation[J]. Systems engineering and electronics, 2015, 37(4): 863–867.

[17] 权双燕, 吴慧. Vague 集的偏熵与关联熵[J]. 计算机应用与软件, 2008, 25(2): 54–56.
QUAN Shuangyan, WU Hui. Partial entropy and relative entropy of vague sets[J]. Computer applications and software, 2008, 25(2): 54–56.

[18] 苗夺谦, 魏莱, 徐菲菲. 粗糙模糊集的关联熵与关联熵系数[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2007, 35(7): 970–974.
MIAO Duoqian, WEI Lai, XU Feifei. Relative entropy and Its coefficient of rough fuzzy sets[J]. Journal of Tongji university: natural science, 2007, 35(7): 970–974.

[19] NAMBURU A, SAMAYAMANTULA S K, EDARA S R. Generalised rough intuitionistic fuzzy c-means for magnetic resonance brain image segmentation[J]. IET image processing, 2017, 11(9): 777–785.

[20] LIU Yong, LIN Yi. Intuitionistic fuzzy rough set model based on conflict distance and applications[J]. Applied soft computing, 2015, 31: 266–273.

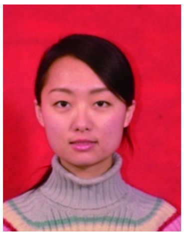
[21] 刘金良, 闫瑞霞, 姚炳学. 粗糙 Vague 集的不确定性度量[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(1): 104–107.
LIU Jinliang, YAN Ruixia, YAO Bingxue. Uncertainty measures in rough-vague set[J]. Systems engineering and electronics, 2008, 30(1): 104–107.

[22] BORAN F E, AKAY D. A biparametric similarity measure on intuitionistic fuzzy sets with applications to pattern recognition[J]. Information sciences, 2014, 255: 45–57.

[23] 刘鹏惠. 从模糊集到直觉模糊集相似度的构造方法[J]. 西华大学学报: 自然科学版, 2016, 35(2): 17–24, 87.
LIU Penghui. Approaches to constructing similarity measures from fuzzy sets to intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Xihua university: natural science, 2016, 35(2): 17–24, 87.

作者简介:

张倩倩, 女, 1982 年生, 实验师, 主要研究方向为粗糙集、Vague 集理论、粒计算。



马媛媛, 女, 1981 年生, 讲师, 主要研究方向为粒计算、信息隐藏与多媒体安全。

徐久成, 男, 1963 年生, 教授, 博士, 主要研究方向为粗糙集、粒计算、数据挖掘、生物信息。