

DOI: 10.11992/tis.201612022

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20170702.0425.014.html>

具有定常输入的二阶多智能体系统的平均一致性滤波

郑敏, 刘成林, 刘飞

(江南大学 自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘要: 本文考察了具有定常输入的二阶多智能体系统平均一致性滤波问题, 提出了一种比例-积分一致性滤波算法。在定常输入和固定对称连通拓扑的前提下, 根据 Routh 判据和 Nyquist 判据分别得到二阶多智能体系统在无时延和相同通信时延约束下渐近收敛一致的收敛条件, 且多智能体系统最终一致性状态为定常输入的平均值。最后, 通过由 5 个智能体组成的多智能体系统在连通拓扑结构下的数值仿真, 验证了理论结果的正确性。

关键词: 平均一致性滤波; 比例-积分算法; 定常输入; 通信时延; 二阶多智能体系统; 无时延; 对称连通拓扑; 频域分析
中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2018)03-0399-08

中文引用格式: 郑敏, 刘成林, 刘飞. 具有定常输入的二阶多智能体系统的平均一致性滤波[J]. 智能系统学报, 2018, 13(3): 399-406.

英文引用格式: ZHENG Min, LIU Chenglin, LIU Fei. Average-consensus filter of second-order multiagent systems with constant inputs[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2018, 13(3): 399-406.

Average-consensus filter of second-order multiagent systems with constant inputs

ZHENG Min, LIU Chenglin, LIU Fei

(Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: Average-consensus filtering of a second-order multiagent system with constant inputs was investigated and a proportional-integral consensus filtering algorithm was proposed. Based on constant input, fixed and symmetrical connection topology, and on the Routh and Nyquist Criteria, the asymptotically consistent convergence conditions of second-order multiagent systems without time delays and with identical communication delays were obtained. In addition, the final consensus state of multiagent systems was the average value of the constant inputs. Finally, a numerical simulation of a multiagent system comprising five agents in the connection topology was used to verify the accuracy of the theoretical results.

Keywords: average-consensus filter; proportional-integral algorithm; constant inputs; communication delay; second-order multi-agent systems; without time delay; symmetric and connected topology; frequency-domain analysis

目前, 多智能体系统的分布式协调控制引起了众多学者的关注, 并得到了广泛应用。一致性问题是多智能体系统协调控制的最简单与最基本问题之一, 得到了非常深入的研究, 并取得了广泛的研究成果。

近些年, 一致性滤波问题^[1]引起了部分学者的

研究兴趣, 并在分布式估计、分布式传感器网络等领域得到应用。一致性滤波问题是指基于一致性协调控制的滤波算法, 使每个智能体通过和相邻智能体之间进行信息通信来达到相同的状态; 如果每个智能体渐近收敛到给定输入的平均值, 那么这就是平均一致性滤波问题^[2]。Olfati-Saber 等^[3-5]分别提出了分布式低通一致性滤波和高通一致性滤波, 它们通过追踪网络中所有智能体输入的平均值来实现一致性滤波, 但是存在估计误差。针对文献^[3-5]中算法存在的误差, 涌现了一些改进算法来减少估计误

收稿日期: 2016-12-19. 网络出版日期: 2017-07-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61473138, 61104092); 江苏省自然科学基金项目 (BK20151130); 江苏省六大人才高峰项目 (2015-DZXX-011).

通信作者: 刘成林. E-mail: liucl@jiangnan.edu.cn.

差^[6-9]。Freeman等^[7]提出了比例积分算法 (proportional-integral algorithm), 证明了该算法在输入是常量的情况下收敛一致。与文献^[7]相比, Bai等^[8]运用内部模型原则^[10]设计传递函数使每个智能体跟踪所有时变输入的平均值。Li等^[11]对比例积分算法 (PI) 进一步研究, 提出了改进的PI算法, 并证明该算法收敛到定常输入的加权平均值; 同时, Li等^[12]也提出一种新的混杂一致性滤波协议, 给出了该协议分别在固定拓扑和切换图下渐近一致的条件。

实际上, 在多智能体协调控制网络中, 智能体之间进行信息传输伴随着通信时延, 会影响系统集体行为。目前, 具有通信时延的一阶和二阶多智能体系统的一致性问题受到了学者的广泛关注^[13-18]。Olfati-Saber等^[19]考察了具有通信时延的一阶多智能体系统的一致性问题, 给出了在相同通信时延作用下多智能体系统收敛一致的时延范围。Wang等^[20]基于圆盘定理和最大模原理, 给出了智能体在具有不同通信时延的一阶多智能体系统达到渐近一致的收敛条件。Lin等^[21]分析了具有相同时延的二阶多智能体系统的一致性问题, 给出了一致性收敛的时延相关充要条件。针对具有不同时延的二阶多智能体系统的一致性问题, Yang等^[22]根据小增益稳定性原理, 分别得到具有时不变和时变通信时延的系统渐近达到一致的充要条件, 并把结论运用到时延高阶多智能体系统的一致性分析中。

本文研究具有定常输入的二阶多智能体系统的平均一致性滤波问题。在现有的一致性滤波算法基础上, 提出了一种比例积分算法 (PI), 并考察多智能体系统在定常输入和对称连通拓扑结构下的收敛问题。利用Routh判据, 得到二阶多智能体系统渐近达到平均一致滤波的重要条件; 根据Nyquist判据, 分析了二阶多智能体系统在相同通信时延约束下渐近收敛平均一致滤波的充分条件。

1 问题描述

1.1 连接拓扑图

n 阶有向图 $G=(V, E, A)$ 的组成部分包括: 节点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、边集 $E \subseteq V \times V$ 以及加权邻接矩阵 $A=[a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。便于描述, 节点的下标集表示为 $\Gamma=\{1, 2, \dots, n\}$ 。在图 G 中, 节点 i 指向节点 j 的有向边为 $e_{ij}=(i, j) \in E$, 对应的连接权值为 $a_{ij} > 0$, 否则, $a_{ij}=0$ 。如果 $a_{ij}=a_{ji} > 0$, 则称图 G 是对称的。节点 i 的邻接集合定义为 $N_i=\{j \in V: (i, j) \in E\}$ 。根据邻接矩阵写出拉普拉斯矩阵 $L=[l_{ij}] (L \in \mathbf{R}^{n \times n})$, 定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}, & i=j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

在图 G 中, 若节点 i 和节点 j 之间有一条路径, 那么称节点 j 和节点 i 之间是可达的, 若有一个节点从图 G 中任意其他点是可达的, 那么称该节点是全局可达点。若图 G 中包含全局可达点, 那么该图是连通的。

在本文中, $I \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示 n 阶单位矩阵, $\mathbf{0}_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示 n 阶零矩阵, $\mathbf{1}_n$ 表示向量 $[1 \dots 1] \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{0}_n$ 表示向量 $[0 \dots 0] \in \mathbf{R}^n$ 。

1.2 模型描述

n 个二阶智能体构成的二阶多智能体系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i, i \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_i \in \mathbf{R}$ 、 $v_i \in \mathbf{R}$ 、 $u_i \in \mathbf{R}$ 分别表示智能体 i 的位置、速度和控制输入。每个智能体有一个定常输入为 $\varphi_i \in \mathbf{R}$, 如果:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \Gamma} \varphi_i$$

则称多智能体系统式(1)解决平均一致滤波问题。

为解决二阶多智能体系统的平均一致滤波问题, 本文提出了比例-积分一致性滤波算法, 即

$$\begin{cases} u_i = -kv_i + \gamma(\varphi_i - x_i) - k_p \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) - k_I \eta_i \\ \dot{\eta}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\varphi_i \in \mathbf{R}$ 和 $\eta_i \in \mathbf{R}$ 分别表示智能体 i 的输入和内部状态; $k \in \mathbf{R}$ 、 $\gamma \in \mathbf{R}$ 、 $k_p \in \mathbf{R}$ 和 $k_I \in \mathbf{R}$ 为控制常数。不同于针对一阶多智能体系统的平均一致滤波问题所提出的比例-积分一致性算法, 本文直接采用一致性协调控制项的积分量 η_i 加入控制算法中。

在式(2)作用下, 系统式(1)的闭环形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = -kv_i + \gamma(\varphi_i - x_i) - k_p \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) - k_I \eta_i \\ \dot{\eta}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) \end{cases} \quad (3)$$

2 一致性收敛分析

2.1 无时延情况

将式(3)表示为多变量形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -k\mathbf{v} + \gamma(\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}) - k_p \mathbf{L}\mathbf{x} - k_I \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{L}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)进行Laplace变换, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{P}(s)\boldsymbol{\varphi}(s) + \frac{s+k}{\gamma} \mathbf{P}(s)\mathbf{x}(0) + \\ &\quad \frac{1}{\gamma} \mathbf{P}(s)\mathbf{v}(0) - \frac{k_I}{\gamma} \frac{\mathbf{P}(s)}{s} \boldsymbol{\eta}(0) \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{P}(s) = \frac{\gamma \mathbf{I}}{(s^3 + ks^2 + \gamma s)\mathbf{I} + k_p \mathbf{L}s + k_I \mathbf{L}} \quad (6)$$

$\mathbf{x}(s)=[x_1(s)x_2(s)\cdots x_n(s)]^T$, $\mathbf{v}(s)=[v_1(s)v_2(s)\cdots v_n(s)]^T$, $\boldsymbol{\eta}(s)=[\eta_1(s)\eta_2(s)\cdots\eta_n(s)]^T$, $\boldsymbol{\varphi}(s)=[\frac{\varphi_1}{s}\frac{\varphi_2}{s}\cdots\frac{\varphi_n}{s}]^T$, $\mathbf{x}(0)$ 、 $\mathbf{v}(0)$ 、 $\boldsymbol{\eta}(0)$ 分别为智能体的位置、速度和内部状态初始值。

定理 1 假设多智能体系统式 (3) 的连接拓扑为对称连通的, 且 $\sum_{i \in \Gamma} \eta_i(0) = 0$ 。多智能体系统渐近达到平均一致滤波, 当且仅当下列条件:

1) $k > 0, \gamma > 0$;

2) $k_l > 0, k(\gamma + k_p \lambda_i) > k_l \lambda_i$

成立, 其中, λ_i 是拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 的特征值, 并且 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 。

证明 证明过程分两步。1) 利用 Routh 判据给出满足传递函数矩阵 (6) 特征方程的根在左半平面的条件; 2) 利用传递函数的终值定理来证明多智能体系统式 (3) 渐近达到平均一致性。

1) 令传递函数矩阵 $\mathbf{P}(s)$ 的特征方程为

$$\det((s^3 + ks^2 + \gamma s)\mathbf{I} + k_p \mathbf{L}s + k_l \mathbf{L}) = 0 \quad (7)$$

等价于

$$\prod_{i=1}^n s^3 + ks^2 + (\gamma + k_p \lambda_i)s + k_l \lambda_i = 0 \quad (8)$$

接下来, 考察方程 (9) 的根的分布:

$$s^3 + ks^2 + (\gamma + k_p \lambda_i)s + k_l \lambda_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n \quad (9)$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 式 (9) 表示为

$$s(s^2 + ks + \gamma) = 0 \quad (10)$$

根据定理 1 的条件 1) 可得: 特征方程式 (10) 有一个根 $s = 0$, 并且其他根为负实数。

当 $\lambda_i, i = 2, 3, \cdots, n$ 时, 方程 (9) 的 Routh 阵列表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & \gamma + k_p \lambda_i \\ s^2 & k & k_l \lambda_i \\ s & \frac{k(\gamma + k_p \lambda_i) - k_l \lambda_i}{k} & \\ s^0 & k_l \lambda_i & \end{array}$$

当且仅当定理 1 中的条件 1) 和 2) 都成立, Routh 阵列表第一列系数为正数, 特征方程式 (9) 的根是负实数。

因此, 当且仅当定理 1 的条件 1) 和 2) 都成立时, 多智能体系统式 (3) 渐近达到一致, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$, 其中 \mathbf{c} 为常向量。

2) 为了证明多智能体系统式 (3) 渐近达到平均一致滤波, 分别证明式 (5) 满足:

① $\mathbf{P}(s)\boldsymbol{\varphi}(s) \rightarrow \frac{1_n \mathbf{1}_n^T}{n} \boldsymbol{\varphi}$;

② 保证式 (5) 中 $\frac{s+k}{\gamma} \mathbf{P}(s)\mathbf{x}(0)$, $\frac{1}{\gamma} \mathbf{P}(s)\mathbf{v}(0)$ 和 $\frac{k_l}{\gamma} \frac{\mathbf{P}(s)}{s} \boldsymbol{\eta}(0)$ 渐近趋于零状态。

①的证明 在无向连通拓扑结构下, Laplacian 矩阵 \mathbf{L} 是实对称的。 $\lambda_1 = 0$ 是 \mathbf{L} 的一个单一特征值,

对应的右特征向量为 $\mathbf{r} = \frac{1_n}{\sqrt{n}}$, 其他 $n-1$ 个特征值对应的特征向量为 $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \cdots \mathbf{S}_n]$ 。假定 $\mathbf{Q} = [\frac{1_n}{\sqrt{n}} \mathbf{S}]$, 则 $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T = \text{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 。

通过计算, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s) &= \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{P}(s) \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \\ &= \mathbf{Q}^T \frac{\gamma s \mathbf{I}}{(s^3 + ks^2 + \gamma s)\mathbf{I} + k_p \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T s + k_l \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T} \mathbf{Q} = \\ &= \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} h_1(s) & \mathbf{0}_{n-1}^T \\ \mathbf{0}_{n-1} & \bar{\mathbf{P}}(s) \end{pmatrix} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$h_1(s) = \frac{\gamma}{s^2 + ks + \gamma} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{\gamma s}{s^3 + ks^2 + (\gamma + k_p \lambda_2)s + k_l \lambda_2}, \cdots, \frac{\gamma s}{s^3 + ks^2 + (\gamma + k_p \lambda_n)s + k_l \lambda_n} \right\} \quad (13)$$

根据终值定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{P}(s) \frac{\boldsymbol{\varphi}}{s} &= \mathbf{P}(0) \boldsymbol{\varphi} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1_n}{\sqrt{n}} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(0) & \mathbf{0}_{n-1}^T \\ \mathbf{0}_{n-1} & \bar{\mathbf{P}}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1_n^T}{\sqrt{n}} \\ \mathbf{S}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} = \\ &= \frac{1_n \mathbf{1}_n^T}{n} h_1(0) \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{S} \bar{\mathbf{P}}(0) \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \quad (14)$$

根据式 (12)、(13) 可得 $h_1(0) = 1$, $\bar{\mathbf{P}}(0) = \text{diag}\{0, 0, \cdots, 0\}$ 。

因此, 得到 $\lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{P}(s) \frac{\boldsymbol{\varphi}}{s} = \frac{1_n \mathbf{1}_n^T}{n} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{1}_n \frac{1}{n} \sum_{i \in \Gamma} \varphi_i$ 。

②的证明 由①的证明可得:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+k}{\gamma} \mathbf{P}(s) \mathbf{x}(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+k}{\gamma} s \mathbf{P}(s) \frac{\mathbf{x}(0)}{s} = \mathbf{0}_n \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \mathbf{P}(s) \mathbf{v}(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} s \mathbf{P}(s) \frac{\mathbf{v}(0)}{s} = \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

同时, 结合定理 1 中的假设 $\sum_{i \in \Gamma} \eta_i(0) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_l}{\gamma} \frac{\mathbf{P}(s)}{s} \boldsymbol{\eta}(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_l}{\gamma} s \mathbf{P}(s) \frac{\boldsymbol{\eta}(0)}{s} = \\ &= \frac{k_l}{\gamma} \frac{1_n \mathbf{1}_n^T}{n} \boldsymbol{\eta}(0) = \frac{k_l \mathbf{1}_n}{n \gamma} \sum_{i \in \Gamma} \eta_i(0) = \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

综合证明 ① 和 ②, 可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) =$

$\frac{1}{n} \sum_{i \in \Gamma} \varphi_i$, 即多智能体系统式 (3) 渐近达到平均一致滤波。

2.2 有时延情况

由于通信时延在多智能体系统协调控制中不可忽略, 接下来考察式 (2) 在相同通信时延约束下的收敛问题:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -kv_i(t) + \gamma(\varphi_i - x_i(t)) - \\ &= k_p \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)) - k_l \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)) \end{aligned} \quad (15)$$

在式 (15) 作用下, 多智能体系统式 (1) 的闭环形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = -kv_i(t) + \gamma(\varphi_i - x_i(t)) - \\ \quad k_p \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)) - k_l \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)) \end{cases} \quad (16)$$

式中通信延时 $\tau > 0$ 。对式 (16) 进行 Laplace 变换得到

$$\begin{cases} sx_i(s) - x_i(0) = v_i(s) \\ sv_i(s) - v_i(0) = -kv_i(s) + \gamma(\varphi_i(s) - x_i(s)) - \\ \quad k_p \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(s) - x_j(s))e^{-s\tau} - k_l w_i(s) - k_l \eta_i(s) \\ s\eta_i(s) - \eta_i(0) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(s) - x_j(s))e^{-s\tau} - w_i(s) \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$w_i(s) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \int_{-\tau}^0 (x_i(\theta) - x_j(\theta))e^{-s\theta} d\theta$$

定义一个向量 $w(s) = [w_1(s)w_2(s)\cdots w_n(s)]^T$, 式 (17) 可进一步描述为

$$\begin{aligned} x(s) &= G_r(s)\varphi(s) + \\ &\quad \frac{s+k}{\gamma} G_r(s)x(0) + \frac{1}{\gamma} G_r(s)v(0) - \\ &\quad \frac{k_l}{\gamma} G_r(s) \eta(0) + \frac{k_l - k_p s}{\gamma s} G_r(s)w(s) \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$G_r(s) = \frac{\gamma s I}{(s^3 + ks^2 + \gamma s)I + k_p Le^{-s\tau} s + k_l Le^{-s\tau}} \quad (19)$$

定理 2 假设多智能体系统式 (16) 的连接拓扑为对称连通的。参数 k, γ, k_p, k_l 满足定理 1 给出的条件, 且 $T > 0$ 和 $\sum \eta_i(0) = 0$ 。多智能体系统式 (16) 渐近达到平均一致滤波, 如果条件:

- 1) $k^2 - 2\gamma \geq 0$;
- 2) $\tau < \min_{i=2,3,\dots,n} \left(\frac{\arctan(\sqrt{y_i} \frac{k_p}{k_l}) - \arccot(\frac{\gamma - y_i}{k\sqrt{y_i}}) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{y_i}} \right)$

成立, 其中 y_i 是式 (20) 的唯一正根:

$$y^3 + (k^2 - 2\gamma)y^2 + (\gamma^2 - k_p^2 \lambda_i^2)y - k_l^2 \lambda_i^2 = 0, i = 2, 3, \dots, n \quad (20)$$

在证明定理 2 之前, 先给出 2 个有用的引理:

引理 1 考察函数:

$$f(x) = \frac{c_1 x + c_2}{x^3 + c_3 x^2 + c_4 x}$$

假设满足 $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ 和 $c_4 > 0$, 那么在区间 $x \in (0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 是单调下降的。

证明 对 $f(x)$ 关于 x 的导数:

$$f'(x) = \frac{-2c_1 x^3 - (c_1 c_3 + 3c_2)x^2 - 2c_2 c_3 x - c_2 c_4}{(x^3 + c_3 x^2 + c_4 x)^2}$$

由于 $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ 和 $c_4 > 0$, 那么在区间 $x \in (0, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$ 始终成立, 因此可得在区间 $x \in (0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 是单调下降的。

引理 2 考虑 3 次多项式:

$$f_1(x) = x^3 + d_1 x^2 + d_2 x + d_3$$

假设满足系数 $d_1 \geq 0$ 并且 $d_3 < 0$, 根据韦达定理, 满足 $f_1(x) = 0$ 只有唯一正根。

定理 2 证明 证明过程分两步。1) 利用频域分析方法给出使系统式 (16) 渐近达到平均一致滤波的通信延时 τ 的范围; 2) 利用终值定理证明多智能体达到平均一致性滤波。

1) 根据式 (19) $G_r(s)$ 特征方程为

$$\det((s^3 + ks^2 + \gamma s)I + k_p Le^{-s\tau} s + k_l Le^{-s\tau}) = 0$$

等价于

$$\prod_{i=1}^n (s^3 + ks^2 + \gamma s + k_p \lambda_i e^{-s\tau} s + k_l \lambda_i e^{-s\tau}) = 0 \quad (21)$$

考察方程式 (22) 的根:

$$s^3 + ks^2 + \gamma s + k_p \lambda_i e^{-s\tau} s + k_l \lambda_i e^{-s\tau} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

当 $s = 0$ 时, 特征方程式 (22) 变为

$$0^3 + k0^2 + \gamma 0 + k_p \lambda_i e^{-0\tau} 0 + k_l \lambda_i e^{-0\tau} = 0$$

满足 $k_l \lambda_i = 0$, 由于 $\lambda_1 = 0$, 所以满足 $\lambda_1 = 0$ 时, $s = 0$ 是特征方程的单根。

当 $s \neq 0$ 时, 式 (22) 整理为闭环特征函数的形式:

$$1 + \frac{k_p \lambda_i (s + \frac{k_l}{k_p})}{s^3 + ks^2 + \gamma s} e^{-s\tau} = 0 \quad (23)$$

开环特征函数为

$$k(s) = \frac{k_p \lambda_i (s + \frac{k_l}{k_p})}{s^3 + ks^2 + \gamma s} e^{-s\tau} \quad (24)$$

当 $s = j\omega$, 开环特征函数式 (24) 的频率特性为

$$k(j\omega) = \frac{k_p \lambda_i (j\omega + \frac{k_l}{k_p})}{(j\omega)^3 + k(j\omega)^2 + j\gamma\omega} e^{-j\omega\tau} \quad (25)$$

根据 Nyquist 判据, 特征方程 (22) 的根是负实数, 等价于 $k(j\omega)$ 的 Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点。整理式 (25) 可得幅频特性为

$$A_i(\omega) = \frac{k_p \lambda_i \sqrt{\omega^2 + \frac{k_l^2}{k_p^2}}}{\omega \sqrt{k^2 \omega^2 + (\gamma - \omega^2)^2}} \quad (26)$$

相频特性为

$$\beta(\omega) = \arctan(\frac{k_p}{k_l} \omega) - \arccot(\frac{\gamma - \omega^2}{k\omega}) - \omega\tau - \frac{\pi}{2} \quad (27)$$

接下来, 考察 $A_i(\omega)$ 关于 ω 的单调性。令 $\omega^2 = y$, 考察函数

$$f(y) = \frac{k_p^2 y + k_l^2}{y^3 + (k^2 - 2\gamma)y^2 + \gamma^2 y} \quad (28)$$

由于 $k^2 - 2\gamma \geq 0$, 根据引理 1 可得 $f(y)$ 在区间 $y \in (0, +\infty)$ 上是单调下降的函数, 即幅频特性 $A_i(\omega)$ 随着 ω 的增大而下降。令 $A_i(\omega) = 1$, 即 $\lambda_i^2 f(y) = 1$, 可得

$$y^3 + (k^2 - 2\gamma)y^2 + (\gamma^2 - k_p^2\lambda_i^2)y - k_l^2\lambda_i^2 = 0 \quad (29)$$

由于 $k^2 - 2\gamma \geq 0$, 根据引理 2, 方程式 (29) 在 $y \in (0, +\infty)$ 只有一个正解 y_i , 即 $A_i(w) = 1$, 在 $w \in (0, +\infty)$ 的解为 $w_i = \sqrt{y_i}$ 。由 $\lambda_i^2 = f^{-1}(y)$ 可知, λ_i 关于 $f(y_i)$ 是单调下降的, 根据 $f(y_i)$ 关于 y_i 是单调下降的, 因此 λ_i 关于 y_i 是单调上升的。根据 Nyquist 判据, 为了使 $k(jw)$ 奈奎斯特图不包围 $(-1, j0)$ 点, 当幅值 $A_i(w) = 1$ 时, 对应求得的相频特性满足

$$\beta(w_i) = \beta(\sqrt{y_i}) > -\pi \quad (30)$$

由式 (27) 得

$$\tau_i < \frac{\arctan(\sqrt{y_i} \frac{k_p}{k_l}) - \operatorname{arccot}(\frac{\gamma - y_i}{k \sqrt{y_i}}) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{y_i}} \quad (31)$$

取得的最小时延 $\tau < \min_{i=2,3,\dots,n} \tau_i$ 。

因此, 当条件 1) 和 2) 成立时, 特征方程式 (22) 的根满足: $s = 0$ 为单根, 非零根均具有负实部。

2) 根据定理 1 中①的证明, 可得

$$\begin{aligned} G_\tau(s) &= Q^T Q G_\tau(s) Q^T Q = \\ Q^T \begin{bmatrix} h_1(s) & \mathbf{0}_{n-1}^T \\ \mathbf{0}_{n-1} & \bar{G}_\tau(s) \end{bmatrix} Q \end{aligned} \quad (32)$$

式中

$$\bar{G}_\tau(s) = \operatorname{diag} \left\{ \frac{\gamma s}{s^3 + k s^2 + (\gamma + k_p \lambda_2 e^{-s\tau})s + k_l \lambda_2 e^{-s\tau}}, \dots, \frac{\gamma s}{s^3 + k s^2 + (\gamma + k_p \lambda_n e^{-s\tau})s + k_l \lambda_n e^{-s\tau}} \right\} \quad (33)$$

$$\bar{G}_\tau(0) = \mathbf{0}_{n \times n} \quad (34)$$

根据 $h_1(0) = 1$, 并结合式 (32) 和式 (34) 可得

$$G_\tau(0) = Q^T Q G_\tau(0) Q^T Q = \frac{\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T}{n} \quad (35)$$

根据终值定理

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_\tau(s) \frac{\varphi}{s} = G_\tau(0) \varphi = \frac{\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T}{n} \varphi \quad (36)$$

与定理 1 的②的证明类似, 式 (18) 运用终值定理, 可得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+k}{\gamma} G_\tau(s) \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}_n \quad (37)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} G_\tau(s) \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}_n \quad (38)$$

同时, 结合定理 2 中的假设 $\sum_{i \in I} \eta_i(0) = 0$, 可得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_l}{\gamma} \frac{G_\tau(s)}{s} \eta(0) = \frac{k_l \mathbf{1}_n}{\gamma n} \mathbf{1}_n^T \eta(0) = \mathbf{0}_n \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_l - k_p s}{\gamma s} G_\tau(s) \mathbf{w}(s) &= \frac{k_l}{\gamma} G_\tau(0) \mathbf{w}(0) = \frac{k_l \mathbf{1}_n}{\gamma n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{w}(0) = \\ &= \frac{k_l \mathbf{1}_n}{\gamma n} \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} \int_{-T}^0 (x_i(\tau) - x_j(\tau)) d\tau \right) \end{aligned} \quad (40)$$

由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 得到

$$a_{ij} \int_{-T}^0 (x_i(\tau) - x_j(\tau)) d\tau + a_{ji} \int_{-T}^0 (x_j(\tau) - x_i(\tau)) d\tau = 0$$

因此

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} \int_{-T}^0 (x_i(\tau) - x_j(\tau)) d\tau \right) = 0 \quad (41)$$

根据式 (41), 式 (40) 可以进一步表述为

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_l - k_p s}{\gamma s} G_\tau(s) \mathbf{w}(s) = \mathbf{0}_n \quad (42)$$

根据式 (36) ~ (39)、(42), 得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \varphi_i$,

因此具有相同时延的智能体达到平均一致性滤波。

根据定理 2 的证明, 如果条件 1) 成立, $\lambda_n \geq \lambda_i$, $y_n \geq y_i, i = 2, 3, \dots, n-1$ 显然成立。在条件 1) 和 2) 成立的前提下, 如果式 (27) 中 $\beta(w)$ 在 $w \in [\sqrt{y_i}, +\infty)$ 区间上单调减, 则条件 2) 给出的时延条件为充分必要的。

3 数值仿真

3.1 无时延的二阶多智能体系统

考察由 5 个智能体构成的多智能体系统, 其拓扑结构是无向连通的 (见图 1)。在连接拓扑中, 智能体之间的连接权值是对称的, 分别为: $a_{12} = a_{21} = 1, a_{15} = a_{51} = 1, a_{23} = a_{32} = 1, a_{34} = a_{43} = 1, a_{45} = a_{54} = 1$ 。计算可得, 拉普拉斯矩阵 L 的特征值为: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.382, \lambda_3 = 1.382, \lambda_4 = 3.618, \lambda_5 = 3.618$ 。

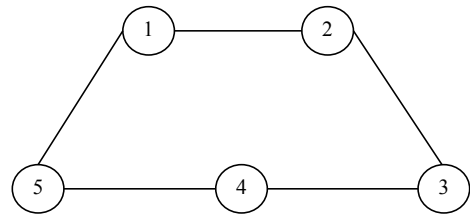
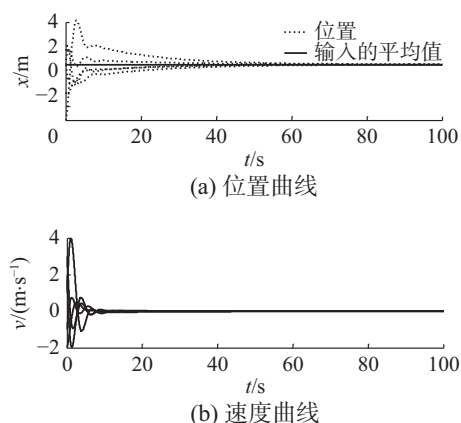
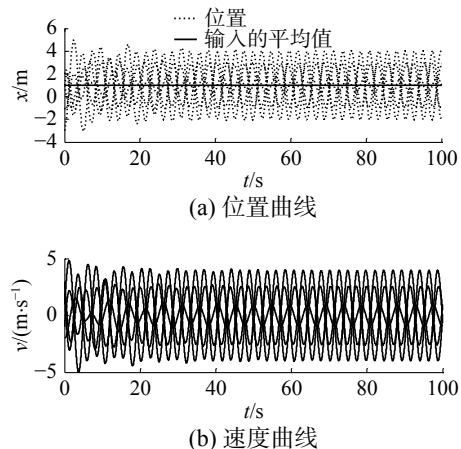
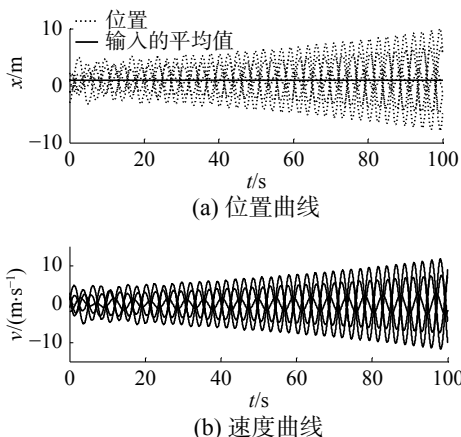


图 1 包含 4 个多智能连接拓扑 G

Fig. 1 Graphical topology of four agents

随机设定智能体初始位置和初始速度, 且内部状态的初始值设为 $\eta(0) = [2 \ -1 \ -3 \ 2 \ 0]^T$, 满足 $\sum_{i \in I} \eta_i(0) = 0$ 。智能体的常量输入为: $\varphi = [8 \ -2 \ -20 \ 1]^T$, 则定常输入的平均值为 $\alpha = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \varphi_i = 1$ 。给定控制参数分别为: $k = 1, r = 0.3, k_p = 0.4$ 。根据定理 1, 可得 $0 < k_l < 0.483$ 。当 $0 < k_l < 0.483$ 时, 智能体的位置轨迹渐近达到所有常量输入的平均一致和速度轨迹趋于零, 如图 2 所示。当 $k_l \geq 0.483$ 时, 智能体的位置和速度发生振荡 ($k_l = 0.483$) 如图 3 所示或发散 ($k_l > 0.483$) 如图 4 所示。

图2 智能体的位置和速度 ($k_l = 0.03$)Fig. 2 Positions and velocities of agents with $k_l = 0.03$ 图3 智能体的位置和速度 ($k_l = 0.483$)Fig. 3 Positions and velocities of agents with $k_l = 0.483$ 图4 智能体的位置和速度 ($k_l = 0.5$)Fig. 4 Positions and velocities of agents with $k_l = 0.5$

3.2 时延二阶多智能体系统

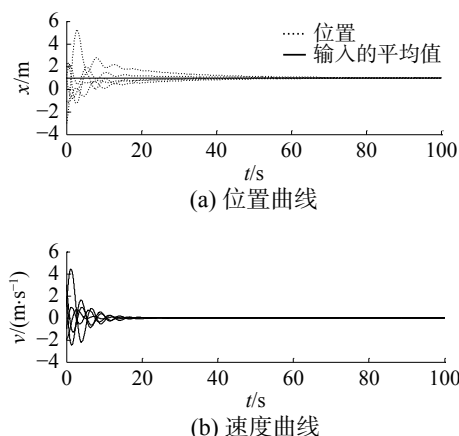
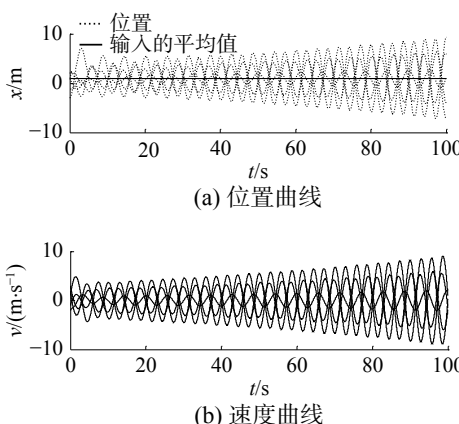
针对具有通信时延的多智能体系统式 (16), 选择和 3.1 小节中的相同连接拓扑、连接权重以及控制参数: $k = 1$ 、 $\gamma = 0.3$ 、 $k_p = 0.4$ 、 $k_l = 0.03$ 。显然, 定理 2 中的条件 1) 成立。根据式 (20) 和式 (31) 计算得: $y_{2,3} = 0.311$ 、 $w_{2,3} = \sqrt{y_{12}} = 0.5577$ 、 $T_{2,3} = 2.5414$; $y_{4,5} = 1.233$ 、 $w_{4,5} = \sqrt{y_{15}} = 1.1105$ 、 $T_{4,5} = 0.7244$ 。再根据定

理 2 中的条件 2), 系统式 (16) 渐近达到平均一致滤波的时延为 $T < 0.7244$ s。同时, 在上述给定参数情况下, 计算幅频特性的导数, 得

$$\frac{d\varphi(w)}{dw} = -T + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{k_p}{k_l}\right)^2 w^2\right] [k^2 w^2 + (\gamma - w^2)^2]} \times \left\{ \frac{k_p}{k_l} \left(1 - k \frac{k_p}{k_l}\right) w^4 + \left[\frac{k_p}{k_l} (k^2 - 2\gamma) - k - k \left(\frac{k_p}{k_l}\right)^2 \gamma\right] w^2 + \frac{k_p}{k_l} \gamma^2 - k\gamma \right\} = -T + \frac{-164w^4 - 49w^2 + 0.9}{(1 + 177.8w^2)(w^4 + 0.4w^2 + 0.09)}$$

显然, $\frac{d\varphi(w)}{dw} < 0$ 对所有的 $w \in [\sqrt{y_{15}}, +\infty)$ 和 $T \geq 0$ 成立。因此, $T < 0.7244$ s 是系统式 (16) 渐近达到平均一致滤波的充分条件。

给定任意选择智能体的初始状态, 且选择 $x(t) = x(0)$, $t \in [-T, 0]$; 选择内部状态的初始值为 $\eta(0) = [2 \ -1 \ -3 \ 2 \ 0]^T$, 满足 $\sum_{i \in I} \eta_i(0) = 0$ 。因此, 当通信时延满足 $T < 0.7244$ s, 智能体的位置轨迹渐近达到常量输入的平均值, 且速度轨迹趋于零 (如图 5 所示)。图 6 给定的通信时延是 $T > 0.7244$ s, 各个智能体的状态逐步发散, 不满足平均一致性。

图5 智能体的位置和速度 ($T = 0.32$ s)Fig. 5 Positions and velocities of agents with communication delay $T = 0.32$ s图6 智能体的位置和速度 ($T = 0.75$ s)Fig. 6 Positions and velocities of agents with communication delay $T = 0.75$ s

4 结束语

针对具有定常输入的二阶多智能体系统的平均一致性滤波问题,本文研究对称连通拓扑结构下的一致性算法的设计与分析。本文设计一种PI型一致性滤波算法。利用Routh判据,分析二阶多智能体系统实现渐近平均一致滤波的充要条件。当系统存在通信时延的情况下,采用同步匹配的一致性算法形式,并利用Nyquist稳定判据得到二阶多智能体系统渐近收敛平均一致滤波的时延相关收敛条件,在特定参数条件下,该时延条件也是充要条件。

参考文献:

- [1] BATTISTELLI G, CHISCI L, FANTACCI C, et al. Consensus-based multiple-model Bayesian filtering for distributed tracking[J]. IET radar, sonar and navigation, 2015, 9(4): 401–410.
- [2] TINATI M A, REZAI T Y. Multi-target tracking in wireless sensor networks using distributed joint probabilistic data association and average consensus filter[C]//Proceedings of 2009 International Conference on Advanced Computer Control. Singapore, 2009: 51–56.
- [3] OLFATI-SABER R. Distributed Kalman filtering and sensor fusion in sensor networks[C]//ANTSAKLIS P, TABUADA P. Networked Embedded Sensing and Control. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006: 157–167.
- [4] OLFATI-SABER R, SHAMMA J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C]//Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Seville, Spain, 2005: 6698–6703.
- [5] OLFATI-SABER R. Distributed Kalman filtering for sensor networks[C]//Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA, 2007: 5492–5498.
- [6] YANG Peng, FREEMAN R A, LYNCH K M. Multi-agent coordination by decentralized estimation and control[J]. IEEE transactions on automatic control, 2008, 53(11): 2480–2496.
- [7] FREEMAN R A, YANG Peng, LYNCH K M. Stability and convergence properties of dynamic average consensus estimators[C]//Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA, 2006: 338–343.
- [8] BAI He, FREEMAN R A, LYNCH K M. Robust dynamic average consensus of time-varying inputs[C]//Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, GA, USA, 2011: 3104–3109.
- [9] ELWIN M L, FREEMAN R A, LYNCH K M. A systematic design process for internal model average consensus estimators[C]//Proceedings of the 52nd IEEE Annual Conference on Decision and Control. Florence, Italy, 2013: 5878–5883.
- [10] FRANCIS B A, WONHAM W M. The internal model principle of control theory[J]. Automatica, 1976, 12(5): 457–465.
- [11] LI Shuai, GUO Yi. Dynamic consensus estimation of weighted average on directed graphs[J]. International journal of systems science, 2015, 46(10): 1839–1853.
- [12] LI Shuai, GUO Yi. Distributed consensus filter on directed graphs with switching topologies[C]//Proceedings of 2013 American Control Conference. Washington, DC, USA, 2013: 6151–6156.
- [13] SUN Yuangong, WANG Long, XIE Guangming. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. Systems & control letters, 2008, 57(2): 175–183.
- [14] WANG Wei, SLOTINE J J E. Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation[J]. IEEE transactions on automatic control, 2006, 51(4): 712–717.
- [15] LIU Chenglin, LIU Fei. Consensus Problem of Delayed Linear Multi-Agent Systems: Analysis and Design[M]. Singapore: Springer, 2017.
- [16] YANUMULA V K, KAR I, MAJHI S. Consensus of second-order multi-agents with actuator saturation and asynchronous time-delays[J]. IET control theory and applications, 2017, 11(17): 3201–3210.
- [17] LIU Xiaoyu, DOU Lihua, SUN Jian. Consensus for networked multi-agent systems with unknown communication delays[J]. Journal of the franklin institute, 2016, 353(16): 4176–4190.
- [18] XU Xiang, LIU Lu, FENG Gang. Consensus of single integrator multi-agent systems with directed topology and communication delays[J]. Control theory and technology, 2016, 14(1): 21–27.
- [19] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE transactions on automatic control, 2004, 49(9): 1520–1533.
- [20] WANG Jing, ELIA N. Consensus over networks with dynamic channels[C]//Proceedings of 2008 American Control Conference. Seattle, WA, USA, 2008: 2637–2642.
- [21] LIN Peng, JIA Yingmin, DU Junping, et al. Distributed consensus control for second-order agents with fixed topo-

logy and time-delay[C]//Proceedings of 2007 Chinese Control Conference. Hunan, China, 2007: 577-581.

- [22] YANG Wen, BERTOZZI A L, WANG Xiaofan. Stability of a second order consensus algorithm with time delay[C]//Proceedings of the 47th IEEE conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2009: 2926-2931.

作者简介:



郑敏, 女, 1992 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为分布式滤波。



刘成林, 男, 1981 年生, 副教授, 主要研究方向为多自主系统协调控制。主持国家自然科学基金面上项目和江苏省自然科学基金面上项目各 1 项, 发表学术论文多篇, 被 SCI 检索 20 余篇。



刘飞, 男, 1965 年, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为先进控制理论与应用、过程监控等。主持国家 863、国家自然科学基金等省部级以上课题 12 项, 企业技术开发 20 多项, 完成省部级鉴定科技成果 8 项, 获省部及行业协会科技奖 5 项, 申请/获得专利及软件著作权 8 项, 论文被 SCI、EI 检索 100 余篇。

2018 年第三届智能机器人系统亚太会议 (ACIRS 2018) 2018 3rd Asia-Pacific Conference on Intelligent Robot Systems (ACIRS 2018)

2018 3rd Asia-Pacific Conference on Intelligent Robot Systems (ACIRS 2018) will be held during July 21-23, 2018 in Singapore.

ACIRS 2018 provides a forum for scientific advances in the theory and practice of Intelligent Robot Systems. It is a highly selective, single-track meeting that will be soliciting submissions presenting significant, original, and previously unpublished research. ACIRS 2018 aims to be one of the leading international conferences in the Asia Pacific region, and will provide an exciting environment for researchers to present and discuss the latest technologies, algorithms, system architectures, and applications.

All full paper submissions will also be peer reviewed and evaluated based on originality, technical and/or research content/depth, correctness, relevance to conference, contributions, and readability. The full paper submissions will be chosen based on technical merit, interest, applicability, and how well they fit a coherent and balanced technical program.

Accepted papers of ACIRS 2018 will be published in Conference Proceedings and will be submitted to EI Compendex and Scopus.