第 12 卷第 6 期
2017 年 12 月

智 能 系 统 学 报
CAAI Transactions on Intelligent Systems

Vol.12 No.6
Dec. 2017

DOI: 10.11992/tis.201605012
网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20171128.1715.002.html

切换系统的鲁棒二次公共 Lyapunov 函数矩阵寻找算法

张晓宇，李平

（华北科技学院 电子信息工程学院，北京 101601）

摘　要：为了获得不确定线性切换系统稳定性判别的公共二次 Lyapunov 函数寻找方法，提出了鲁棒公共二次 Lyapunov 函数的概念，运用矩阵不等式分析，得到了在鲁棒稳定矩阵集对合和不对合的情况下，鲁棒公共二次 Lyapunov 函数存在的充分性条件以及 LMI 形式的递推搜寻算法。获得的结果便于计算机实现，对不确定切换系统鲁棒稳定性判别具有一定价值。应用仿真测试验证了其正确性。

关键词：切换系统；不确定；公共 Lyapunov 函数；二次 Lyapunov 函数；控制；鲁棒；稳定；LMI

中图分类号：TP273　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673−4785(2017)06−0899−07

中文引用格式：张晓宇，李平. 切换系统的鲁棒二次公共 Lyapunov 函数矩阵寻找算法[J]. 智能系统学报，2017，12(6): 899–905.

英文引用格式：ZHANG Xiaoyu, LI Ping. Matrix search algorithm of robust common quadratic Lyapunov function for switched systems[J]. CAAI transactions on intelligent systems, 2017, 12(6): 899–905.

Matrix search algorithm of robust common quadratic Lyapunov function for switched systems

ZHANG Xiaoyu, LI Ping

(School of Electronics and Information Engineering, North China Institute of Science and Technology, Beijing 101601, China)

Abstract: To obtain a searching algorithm for the common quadratic Lyapunov function (CQLF) of an uncertain switched system (SS), the concept of the common robust quadratic Lyapunov function (CRQLF) is proposed. In addition, sufficient conditions for the CRQLF, and its corresponding recurrence search algorithm method in LMI forms, are obtained using a matrix inequality analysis when the stable matrix set is both involuntary and voluntary. These results enable easy computer implementation, and are valuable for making robust stability judgments of uncertain SSs. Furthermore, the application simulation test certificates their validity.

Keywords: switched system; uncertain; common Lyapunov function; quadratic Lyapunov function; control; robust; stability; LMI

线性切换系统稳定性判断有几种方法，其中公共 Lyapunov 函数（common Lyapunov function, CLF）方法是在多 Lyapunov 函数方法之后被提出来的。其出发点是若切换系统所有子系统存在一个单 Lyapunov 函数，并且这个 Lyapunov 函数在整个状态空间中沿着特定的切换序列或者是任意切换都能递减，则整个系统稳定[1-2]。Beldiman 等[3]指出通过对原来稳定的非线性切换系统线性化后，其线性化的系统是渐近稳定的。目前研究焦点是如何构造 CLF，或者如何判断存在 CLF。Dogruel 首先提出了 CLF 方法，证明了切换系统如果存在一个 Lyapunov 函数 $V(x(t))>0$，使得所有的子系统满足 $\dot{V}(x(t))<0$ 则对于任意的切换信号切换系统都全局渐近稳定[2]。之后，围绕着 CLF 存在的代数条件，学者们展开了一系列的研究。Ooba 等[4]提出了一对不可交换系统 CLF 存在的条件。文献[5]证明了若子系统均渐近稳定，且各个子系统的状态矩阵两两相乘时满足交换条件，则系统存在公共二次 Lyapunov 函

收稿日期：2016−05−16.　**网络出版日期：**2017−11−28.
基金项目：国家自然科学基金项目（61304024）；河北省科技计划项目（15272118）；中央高校基本科研业务费基金项目（3142017046, 3142016022, 3142015101）.
通信作者：张晓宇. E-mail: ysuzxy@aliyun.com.

数(common quadratic Lyapunov function, CQLF)。Liberzon 利用 Lie 代数研究了线性切换系统存在 CLF 的代数条件[6], 证明了如果由$\boldsymbol{A}_i$, $i=1,2,\cdots,N$生成的 Lie 代数可解, 则切换系统存在 CQLF。在此基础上, Margaliota 进一步研究了非线性切换系统的稳定性[7]。

显然, CLF 只是切换系统稳定的充分条件, 反之, 如果切换系统在任意切换信号下全局渐近稳定, 是否存在 CLF? 针对这一问题, Dayawansa 证明了若线性切换系统在任意切换信号下全局指数稳定, 则线性切换系统存在 CLF[8]。Cheng 等[9]应用 CLF 分析了几类切换系统的稳定性, 提出了确保闭环切换系统稳定的 CLF。

CQLF 的存在性必然有一定条件, 而且和切换系统的分析和控制器设计密切相关。对 CLF 存在的充分和必要条件讨论可以参考文献[10]。CLF 的构造方法也已经取得了许多成果。基本都是假设$\boldsymbol{A}_i$, $i=\{1,2,\cdots,N\}$是渐近稳定的, 即$\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots\boldsymbol{A}_N\}$构成稳定矩阵集。文献[5]考虑了一组可交换稳定矩阵, 提出了一种构造 CQLF 的方法。文献[11]对寻找 CLF 方法进行了讨论, 并且给出了几个 CQLF 存在的条件。文献[11]给出了稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$中, 矩阵两两不能互换但满足对合条件时, 其 CQLF 的相应构造方法。

本文将讨论不确定线性切换系统的稳定性判定 CQLF 问题。如果单独考虑带有不确定性的线性切换系统稳定性, 即鲁棒稳定性问题, 其 CQLF 的构造将会更加困难。为了克服这个困难, 本文提出了公共鲁棒稳定矩阵集的概念, 并进一步扩展推出鲁棒稳定矩阵集的 CQLF 矩阵的判定定理和构造定理。本文的结果对于任意切换规则下的不确定线性切换系统鲁棒控制问题具有以下重要意义: 1)有了一套实用的搜寻 CQLF 的具体 LMI 算法; 2)有了一个判断任意切换规则下系统鲁棒二次稳定的充分性条件。

1　问题描述

考虑如下的不确定切换系统

$$\dot{x}(t)=(\boldsymbol{A}_\sigma+\Delta\boldsymbol{A}_\sigma)x(t) \tag{1}$$

式中: $x(t)\in\mathbf{R}^n$为系统状态变量, $\Delta\boldsymbol{A}_\sigma$表示参数不确定性, $\sigma(t):\mathbf{R}\to\mathbf{N}\cong\{1,2,\cdots,N\}$是关于时间 t 的分段常值函数, 称作切换信号(规则)。定义切换序列

$$\begin{gathered}\boldsymbol{Q}:=x_0;(i_0,t_0),(i_1,t_1),\cdots,(i_N,t_N),\cdots,\\ \forall i_k\in\mathbf{N},k\in\mathbf{Z}^+,\end{gathered}$$

意味着当$t\in[t_k,t_{k+1})$时运行第 i_k 个子系统。对于切换信号$\sigma(t)=i$, $i\in\mathbf{N}$, 记第 i 个子系统的参数为

$$\boldsymbol{A}_\sigma\triangleq\boldsymbol{A}_i,\Delta\boldsymbol{A}_\sigma\triangleq\Delta\boldsymbol{A}_i$$

因此, 在第 k 次切换, 对于$t_k\leqslant t<t_{k+1}$, 设$\sigma(t)=i$, 即$i_k=i\in\mathbf{N}$。然后根据式(1), 系统描述为

$$\dot{x}(t)=(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)x(t) \tag{2}$$

切换系统式(2)满足以下假设。

假设 1[14]　不确定参数$\Delta\boldsymbol{A}_i$满足

$$\Delta\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{H}_{a,i}\boldsymbol{F}_{a,i}(t)\boldsymbol{E}_{a,i} \tag{3}$$

式中: $\boldsymbol{H}_{a,i}\in\mathbf{R}^{n\times r_a}$, $\boldsymbol{E}_{a,i}\in\mathbf{R}^{r_a\times n}$均为已知常数矩阵, 未知时变矩阵$\boldsymbol{F}_{a,i}(t)$满足

$$\boldsymbol{F}_{a,i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_{a,i}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$$

接下来给出本文用到的常用引理。

引理 1[13]　(Schur 补引理)对于给定对称矩阵$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11}&\boldsymbol{S}_{12}\\ \boldsymbol{S}_{21}&\boldsymbol{S}_{22}\end{bmatrix}$, 以下 3 个条件是等价的:

1)$\boldsymbol{S}<0$;

2)$\boldsymbol{S}_{11}<0,\boldsymbol{S}_{22}-\boldsymbol{S}_{21}\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}<0$;

3)$\boldsymbol{S}_{22}<0,\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{21}<0$。

引理 2[14]　设 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是具有适当维数的实常数矩阵, $\boldsymbol{F}(t)$满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$。那么对于任意常数$\varepsilon>0$, 有

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\leqslant\varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$$

2　已有结果

假设稳定矩阵集$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N\}$(矩阵集中每一个矩阵对应的线性子系统都是稳定的集合, 成为稳定矩阵集)并且$\boldsymbol{A}$是对合的, $[\boldsymbol{A}_N,\boldsymbol{A}_i]=\sum_{k=1}^N\gamma_i^k\boldsymbol{A}_k$, $\forall i\in\mathbf{N}$。这里$\gamma_i^k>0$是标量系数参数。任选$\boldsymbol{P}_{N-1}>0$, 并设定

$$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N=-\boldsymbol{P}_{N-1}$$

引理 3[12]　对于稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$, 如果$\forall i=1,2,\cdots,N-1$满足以下条件

$$\begin{cases}\max(\gamma_i^j)<2\min|\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A}_N)|\\ -\boldsymbol{P}_{i,N-1}+\gamma_i^N\boldsymbol{P}_{N-1}-\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{N-1}\gamma_i^k\boldsymbol{P}_{k,N}>0\end{cases} \tag{4}$$

式中: $\boldsymbol{P}_{i,j}=\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i$, $\forall i,j\in\mathbf{N}$, 则$\boldsymbol{P}_N$是$\boldsymbol{A}$的 CQLF。

当稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$不是对合的, 也即关系式$[\boldsymbol{A}_N,\boldsymbol{A}_i]=\sum_{k=1}^N\gamma_i^k\boldsymbol{A}_k$, $\forall i\in\mathbf{N}$不再成立时, $\boldsymbol{A}$的 CQLF 如何构造呢? 仍然首先任选$\boldsymbol{P}_{N-1}>0$, 并仍然设定$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N=-\boldsymbol{P}_{N-1}$。而且,

$$[\boldsymbol{A}_N,\boldsymbol{A}_j]=\boldsymbol{C}_{N,j},\ \forall j\in\mathbf{N} \tag{5}$$

引理 4[12]　对于稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$, 定义$\boldsymbol{C}_{N,j}$, $\forall j\in\mathbf{N}$如式(5)。如果$\forall i=1,2,\cdots,N-1$, 满足

$$\boldsymbol{P}_{i,N-1}+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{C}_{N,i}+\boldsymbol{C}_{N,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N<0 \tag{6}$$

则$\boldsymbol{P}_N$构成$\boldsymbol{A}$的一个 CQLF。

3　主要结果

3.1　鲁棒二次稳定

引理 5　若$\forall\varepsilon_i>0$, 线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{H}_{a,i} \\ * & -\varepsilon_i\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0,\ \forall i\in\mathbf{N} \tag{7}$$

有正定对称阵解$\boldsymbol{P}_i$, 则每个子系统(2)是鲁棒二次稳定的。其中$\boldsymbol{G}_i$和$\boldsymbol{I}_i$是系统不确定性引起的 Lyapunov 方程矩阵项

$$\boldsymbol{G}_i=\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{H}_{a,i}\boldsymbol{H}_{a,i}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{L}_i=\varepsilon_i\boldsymbol{E}_{a,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{a,i} \tag{8}$$

证明 选取各子系统(2)的 Lyapunov 函数:

$$V_i(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}(t)$$

沿子系统(2)求其时间导数:

$$\dot{V}_i(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\Delta\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\right]\boldsymbol{x}$$

根据假设 1 和引理 2, 对于任意$\varepsilon_i>0$有不等式:

$$\boldsymbol{P}_i\Delta\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\leqslant\boldsymbol{G}_i=\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{H}_{a,i}\boldsymbol{H}_{a,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\varepsilon_i\boldsymbol{E}_{a,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{a,i}$$

成立。将其代入$\dot{V}_i(x(t))$有不等式:

$$\dot{V}_i(\boldsymbol{x}(t))\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{L}_i\right]\boldsymbol{x}$$

成立。根据引理 7, 显然若满足, 则有

$$\dot{V}_i(\boldsymbol{x}(t))<-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t)$$

成立, 其中$\boldsymbol{Q}_i$是某一正定矩阵。那么每个子系统(2)是鲁棒二次稳定的。

切换系统(2)的系数矩阵满足如下假设。

假设 2 稳定矩阵集$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N\}$的每个稳定矩阵是鲁棒二次稳定的, 即满足引理 5。此时我们称$\boldsymbol{A}$是一个鲁棒稳定矩阵集。

定义

$$\boldsymbol{P}_{i,j}=\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i,\ \forall i,j\in\mathbf{N} \tag{9}$$

以及

$$\boldsymbol{U}_{i,N}=\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{L}_i \tag{10}$$

3.2 鲁棒 CLF 矩阵

若鲁棒稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$中的矩阵是对合的, 即仍然认为$[\boldsymbol{A}_N,\boldsymbol{A}_i]=\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^k\boldsymbol{A}_k,\ \forall i\in\mathbf{N}$, 这里$\gamma_i^k>0$是标量系数参数。对于任选$\boldsymbol{P}_{N-1}>0$, 仍然设定

$$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{N,N}=-\boldsymbol{P}_{N-1} \tag{11}$$

根据上述 CQLF 引理 3, 我们得到以下推论。

推论 1 对于满足引理 5 的鲁棒稳定矩阵集$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N\}$, 如果$\forall i=1,2,\cdots,N-1$满足以下条件

$$\begin{cases} \max(\gamma_i^i)<2\min|\mathrm{Re}\lambda(A_N)| \\ -\boldsymbol{P}_{i,N-1}+\gamma_i^N\boldsymbol{P}_{N-1}-\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{N-1}\gamma_i^k\boldsymbol{P}_{k,N}+\gamma_i^i\boldsymbol{U}_{i,N}+ \\ \quad\gamma_i^N\boldsymbol{U}_{N,N}+\boldsymbol{U}_{i,N}\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}-\boldsymbol{U}_{N,N}\boldsymbol{A}_i- \\ \quad\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{N,N}>0 \end{cases} \tag{12}$$

则$\boldsymbol{P}_N$是$\boldsymbol{A}$的鲁棒二次 CLF 矩阵, 即$\forall i\in\mathbf{N}$满足 Riccati 不等式:

$$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{L}_i<0 \tag{13}$$

证明

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N})(\boldsymbol{A}_N+\gamma_i^i\boldsymbol{I}/2)+(\boldsymbol{A}_N+\gamma_i^i\boldsymbol{I}/2)^{\mathrm{T}}\times(\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N})=\\&(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N})\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\\&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N})+\gamma_i^i(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N})=\\&\boldsymbol{P}_N\left(\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{A}_i-\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^k\boldsymbol{A}_k\right)+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\\&\left(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}-\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^k\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{P}_N+\gamma_i^i(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\\&\boldsymbol{U}_{i,N})+\boldsymbol{U}_{i,N}\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}=\\&(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N)-\\&\gamma_i^N(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N)-\sum_{k=1,k\neq i}^{N-1}\gamma_i^k(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_k+\\&\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N)+\boldsymbol{U}_{i,N}(\boldsymbol{A}_N+\gamma_i^i)+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}=\\&-\boldsymbol{P}_{i,N-1}+\gamma_i^N\boldsymbol{P}_{N-1}-\sum_{k=1,k\neq i}^{N-1}\gamma_i^k\boldsymbol{P}_{k,N}+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}+\\&\boldsymbol{U}_{i,N}(\boldsymbol{A}_N+\gamma_i^i)-\boldsymbol{U}_{N,N}(\boldsymbol{A}_i-\gamma_i^N)-\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{N,N}\end{aligned}$$

若式(12)第 2 个条件$\forall i=1,2,\cdots,N-1$成立, 表明两个矩阵$\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N}$和$\boldsymbol{A}_N+\dfrac{\gamma_i^i}{2}\boldsymbol{I}$转置正定。由式(12)的第 1 个不等式知$\boldsymbol{A}_N+\dfrac{\gamma_i^i}{2}\boldsymbol{I}$是稳定的, 因此$\forall i=1,2,\cdots,N-1$,

$$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{L}_i<0 \tag{14}$$

成立, 即$\boldsymbol{P}_N$对于每一个矩阵$\boldsymbol{A}_i$都满足包含不确定项$\boldsymbol{U}_{i,N}$的 Riccati 不等式(14), 因此$\boldsymbol{P}_N$是$\boldsymbol{A}$的鲁棒二次 CLF。

若鲁棒稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$中的矩阵不是对合的, 根据 CQLF 引理 4, 我们得到以下推论。

推论 2 对于鲁棒稳定矩阵集$\boldsymbol{A}$, 定义$C_{N,j},\forall j\in\mathbf{N}$, 如(5)。若$\forall i=1,2,\cdots,N-1$满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}_{i,N-1}+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{C}_{N,i}+\boldsymbol{C}_{N,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{N,N}\boldsymbol{A}_i+\\&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{N,N}-\boldsymbol{U}_{i,N}\boldsymbol{A}_N-\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}<0\end{aligned} \tag{15}$$

则$\boldsymbol{P}_N$构成$\boldsymbol{A}$的一个鲁棒二次 CLF 矩阵。即

$$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{L}_i<0 \tag{16}$$

证明

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N})\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N})=\\&(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N})\boldsymbol{A}_N+\\&\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N})=\\&\boldsymbol{P}_N(\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{C}_{N,i})+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\\&\left(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}_{N,i}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N}\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}=\\&(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N)-\\&\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{C}_{N,i}-\boldsymbol{C}_{N,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{i,N}\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}=\\&-\left(\boldsymbol{P}_{i,N-1}+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{C}_{N,i}+\boldsymbol{C}_{N,i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{U}_{N,N}\boldsymbol{A}_i+\right.\\&\left.\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{N,N}-\boldsymbol{U}_{i,N}\boldsymbol{A}_N-\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i,N}\right)\end{aligned}$$

若不等式(15)条件成立, 则$\forall i=1,2,\cdots,N-1$,

$$(\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N})\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N})>0$$

成立, 表明两个矩阵$\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N}$和$\boldsymbol{A}_N$的转置积正定。已知$\boldsymbol{A}_N$是稳定的, 因此$\boldsymbol{P}_{i,N}+\boldsymbol{U}_{i,N}<0$成立, 也即$\forall i=1,2,\cdots,N-1$式(17)成立

$$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}_N+\boldsymbol{L}_i<0 \tag{17}$$

那么$\boldsymbol{P}_N$是$\boldsymbol{A}$的一个 CQLF, 且$\boldsymbol{P}_N$对于每一个矩阵

A_i都满足包含不确定项$U_{i,N}$的 Riccati 不等式(17),因此P_N是A的鲁棒 CQLF。

3.3　递推 CQLF 矩阵

根据引理 4,我们进一步得到稳定矩阵集的如下 CQLF 的构造算法定理。

定理 1　若稳定矩阵集$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$存在 CLF,则$\forall i=1,2,\cdots,k-1,k\in\mathbf{N}$满足

$$\begin{cases} P_{k,k}<0 \\ A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k>0 \end{cases} \tag{18}$$

的正定对称阵P_k,即$A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$的 CQLF 矩阵。其中$C_{i,j}$是矩阵集两两矩阵交换差:

$$C_{i,j}=A_iA_j-A_jA_i$$

证明

$$P_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}P_{i,k}=(P_kA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_k)A_k+$$
$$A_k^{\mathrm{T}}(P_kA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_k)=P_k(A_kA_i-C_{k,i})+$$
$$A_i^{\mathrm{T}}P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_kA_i+(A_kA_i-C_{k,i})^{\mathrm{T}}P_k=$$
$$(P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_k)A_i+A_i^{\mathrm{T}}(P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_k)-$$
$$P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k=A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-$$
$$P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k$$

如果不等式(18)满足,则显然有

$$P_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}P_{i,k}>0$$

因为A_k是稳定的,则有

$$P_{i,k}=A_i^{\mathrm{T}}P_k+P_kA_i<0,\forall i=1,2,\cdots,k$$

成立。因此P_k是$A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$的 CQLF。

假设一个鲁棒稳定矩阵集A,其中的每个稳定矩阵是鲁棒稳定的,即满足 Lyapunov 方程(7)。仍然定义(9),(10),但是不定义(11)。而且矩阵集A不是对合的。根据上述 CQLF 定理 1,我们得到以下鲁棒二次 CLF 的构造算法定理。

定理 2　假设鲁棒稳定矩阵集$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$存在 CLF。若存在任意正数$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$以及$\forall i=1,2,\cdots,k-1,k\in\mathbf{N}$满足不等式

$$\begin{cases} P_{k,k}+U_{k,k}<0, \\ A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+ \\ \quad U_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}U_{i,k}>0 \end{cases} \tag{19}$$

的正定对称阵P_k,则P_k是$A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$的鲁棒二次 CLF 矩阵。即$\forall i=1,2,\cdots,k$满足 Riccati 不等式

$$P_kA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_k+U_{i,k}<0 \tag{20}$$

其中是矩阵集中两两矩阵交换差。

证明

$$(P_{i,k}+U_{i,k})A_k+A_k^{\mathrm{T}}(P_{i,k}+U_{i,k})=$$
$$(P_kA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_k+U_{i,k})A_k+$$
$$A_k^{\mathrm{T}}(P_kA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_k+U_{i,k})=$$
$$P_k(A_kA_i-C_{k,i})+A_i^{\mathrm{T}}P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_kA_i+$$
$$(A_kA_i-C_{k,i})^{\mathrm{T}}P_k+U_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}U_{i,k}=$$
$$(P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_k)A_i+A_i^{\mathrm{T}}(P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_k)-$$
$$P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+U_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}U_{i,k}=$$
$$A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+$$
$$U_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}U_{i,k}$$

如果不等式(19)满足,则显然有

$$(P_{i,k}+U_{i,k})A_k+A_k^{\mathrm{T}}(P_{i,k}+U_{i,k})>0$$

因为A_k是稳定的,则$\forall i=1,2,\cdots,k-1$有

$$P_{i,k}+U_{i,k}=A_i^{\mathrm{T}}P_k+P_kA_i+U_{i,k}<0$$

成立。因此P_k是$A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$的鲁棒二次 CLF。

由于实际系统矩阵往往不容易两两可交换,或者说构成对合矩阵集。因此,在实际控制应用中,引理 3、推论 1 并不实用。而引理 4 和本文给出的定理 1、定理 2、推论 2 满足大多数实际应用计算情况。

3.4　鲁棒二次 Lyapunov 函数矩阵寻找算法

定理 2 在实际应用中更加广泛,因此我们进一步给出实用的鲁棒二次 CLF 寻找算法。

推论 3　给定系统(2)的鲁棒稳定矩阵集$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$。若A存在 CQLF,则$\forall k\in\mathbf{N}(k>1)$,若有矩阵$P_k=P_k^{\mathrm{T}},P_k>0$及任意$\varepsilon_i>0$满足 LMIs

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P_kA_k+A_k^{\mathrm{T}}P_k+L_k & P_kH_{a,k} \\ * & -\varepsilon_kI \end{bmatrix}<0, \\ \begin{bmatrix} \Xi_{i,k} & (I-A_k^{\mathrm{T}})P_kH_{a,i} \\ * & \varepsilon_iI \end{bmatrix}>0,i=1,2,\cdots,k-1 \end{cases} \tag{21}$$

那么P_k是矩阵集$A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$的鲁棒二次 CLF 矩阵。其中

$$\begin{aligned} \Xi_{i,k}=&A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}- \\ &C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+L_iA_k+A_k^{\mathrm{T}}L_i \end{aligned} \tag{22}$$

证明　式(21)中第 1 个 LMI 证明P_k是A_k的鲁棒二次 Lyapunov 函数矩阵,等价于式(19)的第 1 个不等式。若式(21)第二个 LMI 满足,有

$$\Xi_{i,k}-\left(I-A_k^{\mathrm{T}}\right)P_kG_iP_k(I-A_k)>0$$

将式(22)代入,有不等式:

$$A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+$$
$$L_iA_k+A_k^{\mathrm{T}}L_i+A_k^{\mathrm{T}}P_kG_iP_k+$$
$$P_kG_iP_kA_k-P_kG_iP_k-A_k^{\mathrm{T}}P_kG_iP_kA_k>0$$

再根据,上式即

$$A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+U_{i,k}A_k+$$
$$A_k^{\mathrm{T}}U_{i,k}-P_kG_iP_k-A_k^{\mathrm{T}}P_kG_iP_kA_k>0$$

由式(8)可见,$G_i^{\mathrm{T}}=G_i,G_i\geqslant0,L_i^{\mathrm{T}}=L_i,L_i\geqslant0$。由上不等式显而易见,不等式

$$A_i^{\mathrm{T}}P_{k,k}+P_{k,k}A_i-P_kC_{k,i}-C_{k,i}^{\mathrm{T}}P_k+$$
$$U_{i,k}A_k+A_k^{\mathrm{T}}U_{i,k}>0$$

成立。这样 LMI(21)就等价于定理 2 中式(19)。那么推论 3 与定理 2 是等价的。

推论 3 给出了便于计算机计算寻找 CQLF 矩阵的递推算法。我们可以首先给出某一个子系统的鲁棒二次 Lyapunov 函数矩阵$\boldsymbol{P}_1$, 然后令$k=2,3,\cdots$, 运用 MATLAB 的 LMI 工具箱求解 LMIs, 每次求出的$\boldsymbol{P}_k$即是子系统$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k\}$的鲁棒二次 CLF 矩阵。

需要指出的是, 定理 1、定理 2、推论 3 均是充分条件, 如果这些定理不能满足, 并不能说明鲁棒二次 CLF 矩阵不存在。

4 应用仿真

现代农业中, 温室大棚提供了经济作物适宜的生长环境。其中温度和湿度是最为重要的因素, 各类农作物的需求各不相同。因此, 合理的温室温度和湿度控制成为智能温室大棚的主要和关键工程问题。文献[15]选择较为传统的近似线性化方法, 在选取的温湿度工作点对非线性模型进行泰勒展开, 这样就获得了所有工作点的线性化模型组。针对每个子模型设计相应的最优跟踪控制器, 根据然后进行了跟踪切换控制。

本文依据文献[15], 考虑大棚的温度T_i和湿度ω_i为温室大棚的状态变量, 对温室大棚建模为

$$C_T\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t}=C_1(T_p-T_i)-(C_2(C_3G+\varphi_1)+C_4)\times (T_i-T_o)+C_5(T_1-T_i)+C_6T_{\mathrm{rad}}$$

$$C_H\frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t}=C_8C_9(C_{10}C_{11}T_i-\omega_i)-C_{12}(T_p-T_i)-(C_3G+\varphi_1)(\omega_i-\omega_o)+C_H(C_5T_1+C_{14})$$

式中: 管道加热温度 G, 通风率 G, 土壤表层温度 T_1, 室外温度ω_o, 室外湿度ω_o, 太阳辐射能量T_{rad}、泄漏风量φ_1。选择状态变量 G 为 G 和 G, 输入变量 G 分别为 G 和 G, 其余视作干扰v_1,v_2,v_3,v_4, 且假定上述所有变量均可测, 状态空间模型为

$$\dot{x}_1=-(b_1+b_3+b_4)x_1+b_1u_1+(-b_2x_1+b_2v_2)u_2+b_5v_3+b_3v_1+b_4v_4$$

$$\dot{x}_2=c_4x_1+c_1x_2+c_6v_2+c_8u_1+c_2u_2v_2+c_2u_2x_2+c_5v_1+c_3v_4+c_7$$

式中:

$$b_1=C_1/C_T,\ b_2=C_2C_3/C_T$$
$$b_3=(C_{21}\varphi+C_4)/C_T,\ b_4=C_5/C_T$$
$$b_5=C_6/C_T$$
$$c_1=(C_{15}-C_8C_9-\varphi_1)/C_H,\ c_2=C_3/C_H$$
$$c_4=C_8C_9C_{10}/C_H,\ c_5=C_{15}/C_H$$
$$c_6=\varphi_1/C_H$$

各个参数物理意义及数值参考文献[15]。将上述模型在工作点$S(x_{10},x_{20})$近似线性化, 可得线性化后模型为

$$\dot{x}_1=-(b_1+b_3+b_4)x_1+b_1u_1+(-b_2x_{10}+b_2v_2)u_2+b_5v_3+b_3v_1+b_4v_4$$

$$\dot{x}_2=c_4x_1+c_1x_2+c_8u_1+c_2v_2u_2+c_2x_{20}u_2+c_6v_2+c_5v_1+c_3v_4+c_7$$

根据文献[15], 我们简单以温度、湿度的 3 个工作点: $S(26,20)$、$S(26,28)$、$S(28,28)$来进行线性化(在文献[15]基础上增加一个工作点)。设计其反馈控制器, 得到闭环控制后系统的 3 个参数矩阵:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-0.038\,9 & 0\\ -0.082 & -0.163\,2\end{bmatrix}$$

(这里设计反馈控制系数与文献[15]不同)

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-0.158 & 0.002\,2\\ -0.067\,4 & -0.339\,1\end{bmatrix}$$

(这里设计最优反馈控制系数与文献[15]相同)

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}-0.158 & 0.002\,2\\ -0.067\,4 & -0.339\,1\end{bmatrix}$$

这样, 对于这个温室大棚的控制问题, 我们看做是一个在不同工作点线性化后的线性不确定切换系统。在各个不同工作点进行了最优反馈控制设计后的闭环系统, 是多个工作点附近的稳定子系统。这样, 各个工作点闭环控制后的系统参数矩阵$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$就构成一个稳定矩阵集以及具有 3 个子系统的切换系统(1), $\boldsymbol{N}\triangleq\{1,2,3\}$。

注: 这里闭环控制后的参数矩阵$\boldsymbol{A}_1$不再沿用文献[15]中的数值, 是因为在文献[15]中声称$\boldsymbol{A}_1$和$\boldsymbol{A}_2$闭环后参数为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0.148\,2 & 0.374\,6\\ 0.374\,6 & 1.892\,7\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0.148\,2 & 0.374\,6\\ 0.374\,6 & 1.892\,7\end{bmatrix}$$

的 CLF 是

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.148\,2 & 0.374\,6\\ 0.374\,6 & 1.892\,7\end{bmatrix}$$

但经过验证 $\boldsymbol{P}$ 不满足$\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1<0$以及$\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+$, 因此 $\boldsymbol{P}$ 并不是 CLF。

我们把本文的理论和方法, 进行应用, 目标是判断在各个工作点线性化、最优反馈控制后的各个子系统构成的整体是否是鲁棒稳定的。我们把各个干扰部分进行取近似化为

$$\Delta\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0.001\sin(0.02\pi t) & 0\\ 0 & 0.014\mathrm{e}^{-0.1t}\end{bmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0.000\,1\cos(0.01t) & 0.000\,2\cos(0.01t)\\ 0 & 0.005\mathrm{e}^{-0.2t}\end{bmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.026\mathrm{e}^{-0.01t^2}\end{bmatrix}.$$

根据假设 1, 将各个子系统不确定性分解。各个不确定性矩阵为

子系统 1 中:

$$\boldsymbol{H}_{a,1}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_{a,1}=\begin{bmatrix}\sin(0.02\pi t) & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-0.1t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{a,1}=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.014\end{bmatrix}$$

子系统 2 中：

$$\boldsymbol{H}_{a,2}=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_{a,2}=\begin{bmatrix}\cos(0.01t) & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-0.2t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{a,2}=\begin{bmatrix}0.01 & 0.02\\ 0 & 0.05\end{bmatrix}$$

子系统 3 中：

$$\boldsymbol{H}_{a,3}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_{a,3}=\mathrm{e}^{-0.01t^2},\boldsymbol{E}_{a,3}=\begin{bmatrix}0 & 0.26\end{bmatrix}$$

k=2 时子系统 1、2 的公共 Lyapunuov 矩阵为 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}99.7989 & 15.5099\\ 15.5099 & 11.8976\end{bmatrix}$。

k=3 时子系统 1、2、3 的公共 Lyapunuov 矩阵为 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}39.1449 & 2.7141\\ 2.7141 & 1.5411\end{bmatrix}$。

这样，找到了温室大棚这 3 个工作点的鲁棒二次 CLF，说明在任意切换规则下系统渐近稳定。

我们不考虑设计跟踪设定温度、湿度曲线问题，只考虑镇定问题。因此为了验证 CQLF 方法的有效和正确性，设系统的初始状态为$\boldsymbol{x}(t_0)=\begin{bmatrix}30 & 40\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，开始以工作点$\boldsymbol{S}(28,28)$的模型$\boldsymbol{A}_3$运行，20 s 后以工作点$\boldsymbol{S}(26,28)$的模型$\boldsymbol{A}_2$运行，再经过 20 s以工作点$\boldsymbol{S}(26,20)$的模型$\boldsymbol{A}_1$运行。随后我们任意切换。系统仿真结果如图 1、2 所示。从图中可以看出，在不确定参数存在的情况下切换系统状态在任意切换信号下状态都能镇定。

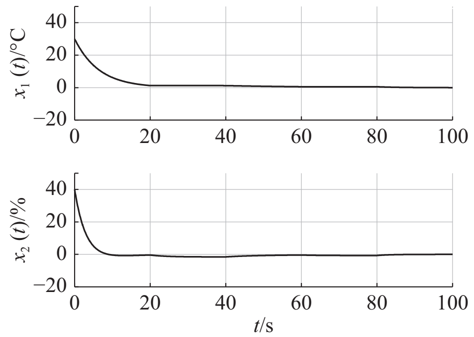

图 1　切换规则下系统状态曲线

Fig. 1　The state curves under switching signal

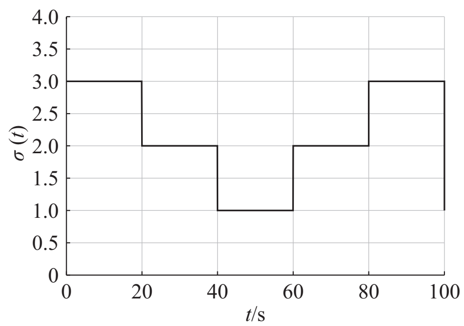

图 2　切换信号曲线

Fig. 2　The switching signal curve

5　结束语

对不确定线性切换系统的 CLF 问题进行了讨论。若系统矩阵构成鲁棒稳定矩阵集，给出了 CQLF 矩阵的递推判定方法和构造算法。构造算法是递推式的 LMI 形式，求解方便，实用性强。在温室大棚的温湿度控制问题的典型应用仿真验证了结果的可行性。

参考文献：

[1] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE transaction on control systems, 1999, 19(5): 59–70.

[2] DOGRUEL M, OZGUNER U. Stability of a set of matrices: an application to hybrid systems[C]//Proc of IEEE International Symposium on Intelligent Control. [S.l.], 1995: 59–64.

[3] BELDIMAN O, BUSHNELL L. Stability, linearization and control of switched systems[C]//Proc of American Control Conference. San Diego, CA, 1999: 2950–2955.

[4] OOBA T, FUNAHASHI Y. Two conditions concerning common quadratic Lyapunov functions for linear systems[J]. IEEE trasactions on automatic control, 1997, 42(5): 719–721.

[5] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN J A. A common Lyapimov function for stable LTI systems with commuting A-matrices[J]. IEEE transactions on automatic control, 1994, 39(12): 2469–2471.

[6] LIBERZON D, MORSE J P. Stability of switched systems: a Lie algebraic condition[J]. Systems and control letters, 1999, 37(3): 117–122.

[7] MARGALIOTA M, LIBERZON D. Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions[J]. Systems and control letters, 2006, 55(1): 8–16.

[8] CHENG D Z, ZHU Y H, HU Q X. Stabilization of switched systems via common Lyapunov function[C]//Proc of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). [S.l.], 2006: 183–187.

[9] DAYAWANSA W P, MARTIN C F. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching[J]. IEEE transactions on automatic control, 1999, 44(4): 751–760.

[10] LIN H, ANTSAKLIS P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results[J]. IEEE transactions on automatic control, 2009, 54(2): 308–322.

[11] CHENG D Z, GUO L, HUANG J. On quadratic Lyapunov functions[J]. IEEE transactions on automatic control, 2003, 48(5): 885–890.

[12] ZHU Y H, CHENG D Z, QIN H S. Constructing common Lyapunov functions for a class of stable matrices[J]. Acta automatica sinica, 2007, 33(2): 202–204.
[13] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. Linear Matrix Inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 7–35.
[14] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
YU Li. Robust control-linear matrix inequality methods [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
[15] 王向东, 何南思. 温室大棚温湿度跟踪切换最优控制器[J]. 沈阳工业大学学报, 2014, 36(5): 543–549.
WANG Xiangdong, HE Nansi. Tracking switching optimal controller for temperature and humidity of greenhouse [J]. Journal of Shenyang university of technology, 2014, 36(5): 543–549.

作者简介:

张晓宇, 男, 1978 年生, 教授, 博士, 主要研究方向为滑模变结构控制、非线性系统智能自适应控制、复杂动态系统分析、综合及应用。主持完成国家自然科学基金青年基金项目 1 项、河北省自然科学基金项目 1 项、河北省科技计划项目 1 项、各类纵向科研项目 5 项、横向科研项目 3 项。已发表学术论文 70 余篇, 其中有 20 余篇被 SCI、EI 检索。

李平, 女, 1992 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为安全生产自动化和信息化。