

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201411031

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20150716.0943.005.html>

复杂网络在路形拓扑结构下可控的充要条件

晁永翠, 纪志坚, 王耀威, 董洁

青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071

摘要:分析了在路形拓扑结构下复杂网络的可控性问题。把系统的邻接矩阵进行适当分解, 找到邻接矩阵的各子矩阵之间在特征值和特征向量上的关系, 进而基于 PBH (Popov-Belevitch-Hautus) 判据, 得到了复杂网络在路形拓扑结构下系统可控的充要条件。特别地, 当控制节点为任意的某一个或多个节点时, 给出了路图可控的判别方法。此外, 文中提出了不可控特征值的概念, 并给出了相应特征值的具体表达形式。文中 2 个主要定理通过算例进行验证, 算例结果与定理结论一致。

关键词:复杂网络; 可控性; 图论; 拓扑; 线性定常系统; 特征值; 特征向量; 控制系统

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2015)04-0577-06

中文引用格式: 晁永翠, 纪志坚, 王耀威, 等. 复杂网络在路形拓扑结构下可控的充要条件[J]. 智能系统学报, 2015, 10(4): 577-582.

英文引用格式: CHAO Yongcui, JI Zhijian, WANG Yaowei, et al. Necessary and sufficient conditions for the controllability of complex networks with path topology[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2015, 10(4): 577-582.

Necessary and sufficient conditions for the controllability of complex networks with path topology

CHAO Yongcui, JI Zhijian, WANG Yaowei, DONG Jie

(School of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: The controllability of complex networks is analyzed in the paper for path topology. With adjacency matrix of the system being decomposed into submatrices, the relationship between eigenvalues and eigenvectors is revealed for the partitioned submatrices. Furthermore, necessary and sufficient conditions are derived by taking advantage of the PBH (Popov-Belevitch-Hautus) criteria. In particular, a method is proposed to determine path controllability when the controlled nodes are any single or multiple nodes, as well as the concept of uncontrollable eigenvalues is presented. The expressions for uncontrollable eigenvalues are provided as well. Two theorems in this paper is verified by examples and the results of examples are in agreement with the conclusion of the theorems.

Keywords: complex networks; controllability; graph theory; topology; linear time-invariant systems; eigenvalue; eigenvectors; control system

控制科学的发展表明, 可控性概念是对系统进行分析与综合的基础, 是系统的重要结构性质。20 世纪 60 年代, 卡尔曼 (R. E. Kalman)^[1] 首先提出状态可控性的概念。其后的研究表明, 可控性的概念

是判别被控系统是否可控的重要途径。近年来, 网络系统的可控性研究成为当前的一个热点研究领域, 该问题的研究受到了国内外科科研工作者的广泛关注^[2-6]。

本文致力于研究复杂网络系统的能控性, 该研究可促进包括系统的镇定控制^[7-8]、编队控制^[9-10]、入侵检测^[11-12] 和分布式估计^[13-16] 等诸多问题的理解。和传统控制不同, 网络系统是建立在个体间信

收稿日期: 2014-11-25. 网络出版日期: 2015-07-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61374062).

通信作者: 纪志坚. E-mail: jizhijian@pku.org.cn.

息的传递之上的。自然地,信息关系图的拓扑结构在系统行为的动态演化中起到了关键性作用,不同拓扑结构下的系统性能可能截然不同。因此,许多科研工作者尝试探讨与能控性相关的图论刻画。例如,系统能控的图论特征,这些特征使得直接从图的拓扑结构出发判断系统的能控性成为可能;再如,能控性中领航者的选取问题,如何确定领航者的位置和数量使得系统能控,这也是网络系统能控性中的典型问题。

复杂网络的研究已渗透到数理学科、生命学科和工程学科等众多不同的领域,对复杂网络可控性的研究具有挑战性^[17-18]。即便是最简单的路形拓扑结构,和其可控性相关的研究也不简单^[19]。文献[19]研究的是基于 Laplacian 矩阵的路图的能控性,与该问题相关的研究成果在文献[4, 6, 20]中也报道过。此外,还有基于邻接矩阵的网络系统可控性问题^[17-18],本文即是研究基于邻接矩阵的路图拓扑的可控性。

本文研究的是控制节点的选取,这不同于文献[17-18]中驱动节点个数的选取问题。在基于邻接矩阵的可控性研究,文献[17]中表述,网络中节点的度的大小影响驱动节点个数的选取,在选取驱动节点时,选取度数小的驱动节点更有利于系统可控性的实现。但针对更复杂的拓扑结构,控制节点的选取比驱动节点的选取更为复杂,相应的结果也更少。文献[18]提出了对于特定的链接与加权网络,使系统可控的最少数目控制节点的判别方法。然而,以上两篇文章都没有给出针对网络拓扑图中,通过控制某一个或几个节点,来具体判断系统是否可控的方法。该问题涉及到控制节点的选取,这通常是更为复杂的研究方面,也是本文着力解决的内容。

本文将针对路形拓扑结构,对每个节点展开分析,通过建立充要条件,来判断相应系统的可控性。更具体地,通过对路图的邻接矩阵及其子矩阵进行分析,发现其特征值之间的相互关系,从而得到路图可控性的充分必要条件,该结果的一个显著特征是建立了所提出的代数条件与拓扑图中每个节点的联系。

1 预备知识

文中 \mathbb{N} 为自然数集, \mathbf{e}_r 为第 r 个元素为1,其他元素均为0的列向量, $r \in \mathbb{N}$,例如 $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ 。记 $G(b_1, b_2, \dots, b_d)$ 为 d 个自然数 b_1, b_2, \dots, b_d 的最大公约数, $d \in \mathbb{N}$ 。 $G(b_1, b_2, \dots, b_d) > 1$ 表示 b_1, b_2, \dots, b_d 有除了1之外的其他公约数。 \mathbf{R}^n 表示 n 维实向量空间, $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示实 $m \times n$ 矩阵的

集合。对于一个有 n 个节点的无向图 G ,所有的节点被标记为 $1, 2, \dots, n$ 。顶点集和边集分别记为 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 与 $\mathcal{E} = \{(i, j) \in V \times V\}$, i 和 j 邻接。图 G 是由顶点集 V 和边集 \mathcal{E} 构成的二元组,记为 $G = (V, \mathcal{E})$ 。与顶点 v 相关联的边的总数称为顶点 v 的度。一个有 n 个节点的图 G ,若其顶点可以标号成(或重新标号成) $1, 2, \dots, n$,使得它的边集是 $\mathcal{E} = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$,则称图 G 为路图^[21]。由此可知,除了第一个节点1与最后一个节点 n 的度为1之外,其他所有节点的度都为2。节点1与节点 n 称为外节点,其他的节点称为内节点。设图 G 的邻接矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$,则 a_{ij} 定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (i, j) \in \mathcal{E} \text{ 或 } (j, i) \in \mathcal{E} \\ 0, \text{其他 } \mathcal{E} \end{cases}$$

在已有文献中,通常把由外部输入控制的节点称为控制节点,由 $I_c = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 表示被控的节点集。考虑如下一个有 n 个节点的线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 表示系统的状态, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是系统的邻接矩阵, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 是控制矩阵, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是输入矩阵。由于讨论的是无向图,所以 \mathbf{A} 是对称矩阵。对任一给定的初始状态,如果存在一个控制输入 \mathbf{u} ,使式(1)能在有限时间间隔内,从初始状态转移到任意指定的终端状态,则称该系统是可控的。目前,有许多判别线性系统可控的方法,例如 Gram 矩阵判据、PBH 判据^[22]、秩判据等。本文从 PBH 判据出发,分析系统的可控性,进而得到系统可控的充要条件。

引理 1 系统(1)可控的充要条件是不存在非零的向量 \mathbf{v} 满足以下等式:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

若存在向量 \mathbf{v} 使得上面的等式成立,则称相应的 λ 是系统不可控的特征值。

证明 根据 PBH 判据并结合 \mathbf{A} 的对称性即知结论成立。

2 主要结论

本节将首先对邻接矩阵进行分解,基于此给出子矩阵特征值的表达形式,然后,通过所提出的矩阵特征值之间的关系,得出相应的引理与定理。

2.1 邻接矩阵的分解

\mathbf{B} 矩阵的具体表达与一系列的控制节点相对应,如果 $I_c = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$,则 $\mathbf{B} = [\mathbf{e}_{i_1} \ \mathbf{e}_{i_2} \ \cdots \ \mathbf{e}_{i_m}]$ 。

由引理 1 可知,路图不可控意味着存在非零向量 \boldsymbol{v} 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$,且 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{v}=0$ 。矩阵 \boldsymbol{M}_ν 定义如下:

$$\boldsymbol{M}_\nu=\begin{bmatrix}0&1&&&\\1&0&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&0&1\\&&&1&0\end{bmatrix}$$

式中 ν 是矩阵的维数。

因为 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}\cdots\boldsymbol{e}_{i_m}]$,由 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{v}=0$ 可得向量 \boldsymbol{v} 的第 i_c 个向量元素为零,即 $(\boldsymbol{v})_{i_c}=0,i_c\in I_c$ 。因此,在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ 中, \boldsymbol{A} 可分解为

$$\begin{bmatrix}&0\\&\vdots\\&0\\&1\\0\cdots0&1&0&1&0\cdots0&0\\&1\\0\cdots0&0&&\boldsymbol{M}_{i_2-1}\\&\vdots\\&0\\&\vdots\\0\cdots0&0&0\cdots0&&\boldsymbol{M}_{n-i_m}\end{bmatrix}$$

向量 \boldsymbol{v} 可分解为

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{v}_1)_1\\ \vdots\\(\boldsymbol{v}_1)_{i_1-1}\\0\\(\boldsymbol{v}_2)_1\\ \vdots\\(\boldsymbol{v}_2)_{i_2-i_1-1}\\ \vdots\\(\boldsymbol{v}_{m+1})_{n-i_m}\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{i_1-1}\cdot\boldsymbol{v}_1&=\lambda\boldsymbol{v}_1\\(\boldsymbol{v}_1)_{i_1-1}+(\boldsymbol{v}_2)_1&=0\\ \boldsymbol{M}_{i_2-i_1-1}\cdot\boldsymbol{v}_2&=\lambda\boldsymbol{v}_2\\&\vdots\\(\boldsymbol{v}_m)_{i_m-i_{m-1}-1}+(\boldsymbol{v}_{m+1})_1&=0\\ \boldsymbol{M}_{n-i_m}\cdot\boldsymbol{v}_{m+1}&=\lambda\boldsymbol{v}_{m+1}\end{aligned}$$

式中: \boldsymbol{v}_σ 是向量 \boldsymbol{v} 的第 σ 个分块向量, $\sigma\in\mathbb{N}$ 。

引理 2 矩阵 \boldsymbol{A} 与矩阵 \boldsymbol{M}_ν 的特征向量的第一个元素与最后一个元素都不为 0。

证明 设 λ 为 \boldsymbol{A} 的一个特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=[\xi_1\xi_2\cdots\xi_n]^T$,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 可得

$$\begin{aligned}\lambda\xi_1-\xi_2&=0\\-\xi_{l-1}+\lambda\xi_l-\xi_{l+1}&=0, \quad 2\leq l\leq n-1\\-\xi_{n-1}+\lambda\xi_n&=0\end{aligned}$$

当 $\xi_1=0$ 时, $\xi_2=\xi_3=\cdots=\xi_n=0$,即 $\boldsymbol{\xi}$ 为零向量,这与 $\boldsymbol{\xi}$ 是特征向量矛盾。同理可证 $\xi_n\neq0$ 。矩阵 \boldsymbol{M}_ν 的情况同样证明。

引理 3 对于矩阵 \boldsymbol{M}_ν ,有

1)矩阵 \boldsymbol{M}_ν 的特征值的形式为

$$\lambda=2\cos\frac{q\pi}{\nu+1},q=1,2,\cdots,\nu$$

2)矩阵 \boldsymbol{M}_ν 的特征值必是矩阵 $\boldsymbol{M}_{\alpha\nu+\alpha-1}$ 的特征值,其中 $\alpha\in\mathbb{N}$ 。

证明 1)可由文献[18]附加材料中关于路图的例子得到。2)可由矩阵 \boldsymbol{M}_ν 特征值的表达式得到。

2.2 路图的可控性

将引理 1 与引理 2 结合可知,路图的每一个外节点为控制节点时,路图是可控的^[23]。然而,当控制节点为路图的内节点时,其能控性如何,是更值得探讨的问题,这也是本节欲解决的问题。首先给出以下两个引理,其中,第一个引理是关于单个控制节点的情况。

引理 4 对控制节点为 $r\in\{2,3,\cdots,n-1\}$ 的长度为 n 的路图,当且仅当矩阵 \boldsymbol{M}_{r-1} 与 \boldsymbol{M}_{n-r} 没有相同的特征值时,路图是可控的。此外,矩阵 \boldsymbol{M}_{r-1} 与 \boldsymbol{M}_{n-r} 相同的特征值为矩阵 \boldsymbol{A} 在控制节点为 r 时,系统不可控的特征值。

证明 为了简便,证其逆否命题。由 PBH 判据,当且仅当

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\tag{2}$$

且 $\boldsymbol{e}_r^T\boldsymbol{v}=0$ 时,路图是不可控的。由 $\boldsymbol{e}_r^T\boldsymbol{v}=0$ 得

$$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_1^T\quad0\quad\boldsymbol{v}_2^T]^T$$

式中: $\boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{R}^{r-1},\boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{R}^{n-r}$ 。代入式(2)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{r-1}\boldsymbol{v}_1&=\lambda\boldsymbol{v}_1\\(\boldsymbol{v}_1)_{r-1}+(\boldsymbol{v}_2)_1&=0\\ \boldsymbol{M}_{n-r}\boldsymbol{v}_2&=\lambda\boldsymbol{v}_2\end{aligned}\tag{3}$$

所以,系统不能控当且仅当不存在 \boldsymbol{A} 的一个特征向量 \boldsymbol{v} 使得式(3)成立。

充分性 若 λ_0 为 \boldsymbol{M}_{r-1} 与 \boldsymbol{M}_{n-r} 的共同特征值,且对应的特征向量分别为 \boldsymbol{v}_{10} 与 \boldsymbol{v}_{20} 。令

$$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_{10}^T\quad0\quad\rho\boldsymbol{v}_{20}^T]^T$$

式中: $\rho\in\boldsymbol{R},(\boldsymbol{v}_{10})_{r-1}+(\rho\boldsymbol{v}_{20})_1=0$,则可验证 \boldsymbol{v} 满足式(3),其中 $\lambda=\lambda_0$ 。所以系统不能控。

必要性 假设系统不能控,则由式(3)且 $\boldsymbol{v}_1\neq0,\boldsymbol{v}_2\neq0$ 得, λ 为矩阵 \boldsymbol{M}_{r-1} 与 \boldsymbol{M}_{n-r} 的共同特征值。

此外,假设 λ_1 是 M_{r-1} 与 M_{n-r} 共同的特征值,则存在一个如上的非零向量 $v = [\nu_{10}^T \ 0 \ \rho \nu_{20}^T]^T$ 满足 $Av = \lambda v, e_r^T v = 0$ 。因此 λ_1 是系统不可控的特征值。

引理4回答了控制节点为一个时,路图可控的充要条件,以下这个引理则给出了受控节点为多个时,路图可控的充要条件。

引理5 控制节点 $I_c = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 长度为 n 的路图,当且仅当矩阵 $M_{i_1-1}, M_{i_2-i_1-1}, \dots, M_{n-i_m}$ 没有相同的特征值时,路图是可控的。此外,矩阵共同的特征值为邻接矩阵 A 在控制节点为 I_c 时,系统不可控的特征值。

引理5的证明与引理4类似,此处不再赘述。

为了更清晰地表达以上关于可控性的条件,下面利用特征值的特殊形式与最大公约数理论,进一步给出路图可控的充分必要条件。

定理1 对于一个长度为 n 的路图,有以下陈述:

1) 当控制节点为 $r \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ 时,路图可控的充分必要条件为

$$G(r, n-r+1) = 1$$

2) 当控制节点集 $I_c = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 时,路图可控的充分必要条件为

$$G(i_1, i_2 - i_1, \dots, i_m - i_{m-1}, n - i_m + 1) = 1$$

证明

充分性 证其逆否命题,由引理4可知,当矩阵 M_{r-1} 与 M_{n-r} 有相同的特征值时,路图不完全可控。结合引理3可得

$$2\cos \frac{q_1 \pi}{(r-1)+1} = 2\cos \frac{q_2 \pi}{(n-r)+1} \quad (4)$$

式中: $q_1 \in \{1, 2, \dots, (r-1)\}$, $q_2 \in \{1, 2, \dots, (n-r)\}$ 。由于 q_1 与 q_2 取自这2个特定集合,式(4)等式两边余弦内的数值都小于 π ,得

$$\frac{q_1 \pi}{(r-1)+1} = \frac{q_2 \pi}{(n-r)+1}$$

化简为

$$\frac{q_1}{r} = \frac{q_2}{n-r+1} \quad (5)$$

又由于 q_1 与 q_2 的取值限制,使得式(5)成立的条件是整数 r 与 $n-r+1$ 不互质,即

$$G(r, n-r+1) > 1$$

必要性 证其逆否命题,当 $G(r, n-r+1) > 1$ 时,则存在正整数 c, t_1, t_2 ,使得 $ct_1 = r, ct_2 = n-r+1$, 其中 $t_1 < r, t_2 < n-r+1$ 。又有 $q_1 \in \{1, 2, \dots, (r-1)\}, q_2 \in \{1, 2, \dots, (n-r)\}$, 则当

$q_1 = t_1, q_2 = t_2$ 时,等式 $\frac{q_1}{ct_1} = \frac{q_2}{ct_2}$ 成立,即为式(5)的形式,则式(4)成立。即矩阵 M_{r-1} 与 M_{n-r} 有相同的特征值。所以路图是不可控的。

对陈述2),证其逆否命题。引理5与引理3结合,取子矩阵的特征值。接下来的证明与陈述1)中的相似。最后即可得到陈述2)中的结论。

由定理1中陈述1)同样也可得到当控制节点为外节点时路图是可控的这一结论。具体如下:控制节点 $r=1$ 或 n 时,根据陈述1)可得 $G(1, n) = 1$ 或 $G(n, 1) = 1$, 因为1与任何数都互质,可得当控制节点为外节点时路图是可控的。当控制节点 $r=2$ 或 $n-2$ 时,由陈述1)可知,需判断2与 $n-1$ 是否互质。当 $n-1$ 奇数,即 n 为偶数时,2与 $n-1$ 互质,路图可控;反之,路图不可控。可表述为以下推论。

推论1 对于一个长度为 n 的路图,当控制节点 r 为外节点的邻接点时,若 n 为偶数时,则路图是可控的;若 n 为奇数时,则路图不可控。

由定理1中陈述1)还可推出一些简便的判别路图可控性的方法。例如,当控制节点 $r = n/2$ ($r = (n+2)/2$) 且 n 为偶数时,路图是可控的。这是因为当 $r = n/2, n-r+1 = n/2+1$ ($r = (n+2)/2, n-r+1 = n/2$), 整数 r 与 $n-r+1$ 为相邻的2个数。我们知道,相邻的2个数肯定是互质的,所以路图是可控的。当 n 为奇数且 r 为偶数时,路图不可控。因为当 n 为奇数 r 为偶数时, $n-r+1$ 为偶数,即 $G(r, n-r+1) > 1$, 路图不可控。

定理2 对于一个长度为 n 的路图,若 n 可分解为 $n = mp + m + p$, 其中 $m, p \in \mathbb{N}$, 则当控制节点集为 $I_c^m = \{\kappa(p+1)\}_{\kappa \in \{1, \dots, m\}}$ 时,路图是不可控的,其中 $\kappa \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。此外,假设 κ 的取值从小到大依次为 b_1, b_2, \dots, b_s ($s \leq m$), 则系统有以下不可控的特征值

$$\lambda = 2\cos \frac{q\pi}{\beta(p+1)}, q \in \{1, 2, \dots, \beta p + \beta - 1\} \quad (6)$$

式中: $\beta = \min\{b_1, b_k - b_{k-1}, m - b_s + 1\}, k \in \{2, 3, \dots, s\}$ 。

证明 当 $n = mp + m + p$ 时,控制节点集为 $I_c^m = \{\kappa(p+1)\}_{\kappa \in \{1, 2, \dots, m\}}$, 即为定理1陈述2)中所有不可控的控制节点的集合。当整数 p 的取值不同时,即可得到不同的不可控的控制节点集。当 $\beta = \min\{b_1, b_k - b_{k-1}, m - b_s + 1\}, k \in \{2, 3, \dots, s\}$, 邻接矩阵 A 被分解为2种形式的子矩阵,即 $M_{\beta(p+1)-1}$ 与 $M_{(\beta+\mu)(p+1)-1}$ ($\mu \in \mathbb{N}$)。子矩阵的共同

特征值即为最小的子矩阵 $M_{\beta(p+1)-1}$ 特征值的部分或全部。即为式(6)表达的形式。若存在一个正整数 y 使 $\mu = y\beta$, 则不可控的特征值为最小的子矩阵 $M_{\beta(p+1)-1}$ 的全部特征值,即

$$\lambda = 2\cos \frac{q\pi}{\beta(p+1)}, q = \{1, 2, \cdots, \beta p + \beta - 1\}$$

为了更清晰地理解定理 2, 以下给出一个较为直观的解释。当 p 与 m 固定时, 对控制节点集 I_c^m 中的节点给与相同的标记。把全部的节点用 m 个控制节点分为 $m+1$ 份, 每份的节点数为 p 个(除控制节点外)。但事实上, 在选取控制节点时未必选择集合 I_c^m 内的所有的节点为控制节点, 所以有定理 2 中所述, 不可控的特征值为邻接矩阵 A 中被分解的最小的子矩阵 $M_{\beta(p+1)-1}$ 的特征值的部分或全部。

2.3 实例分析

以下给出 2 个例子。 $n = 11$ 与 $n = 14$ 的路图, 分别如图 1 中与图 2 所示。

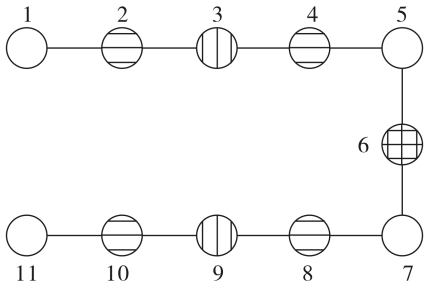


图 1 $n = 11$ 的路图
Fig.1 The path graph with $n = 11$

在图 1 中, 横线标记的节点是控制节点为 $I_c^{p_1 m_1}$ 的集合, 其中 $p_1 = 1, m_1 = 5$ 。竖线标记的节点是控制节点为 $I_c^{p_2 m_2}$ 的集合, 其中 $p_2 = 2, m_2 = 3$ 。当控制节点为 $I_c^{p_1 m_1}$ 时, 系统有相同的不可控的特征值 $\lambda = 0$, 而 1 与 -1 为系统在控制节点集为 $I_c^{p_2 m_2}$ 时 2 个不可控的特征值。

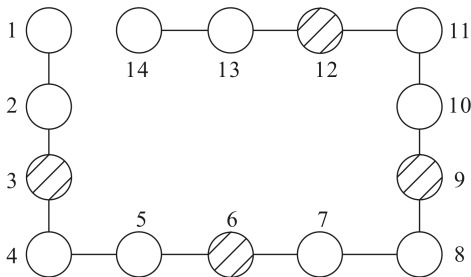


图 2 $n = 14$ 的路图
Fig.2 The path graph with $n = 14$

在图 2 中, 斜线标记的节点是控制节点为 I_c^m 的集合, 其中 $p = 2, m = 4$ 。当控制节点为节点 3 和节点 9 时, A 可被分解为 M_2 与 M_5 两种形式的子矩阵, 矩阵 M_2 与 M_5 的共同特征值即为矩阵 M_2 的全

部特征值。若控制节点为节点 6 时, A 可被分解为 M_5 与 M_8 两种形式的子矩阵, 矩阵 M_5 与 M_8 的共同特征值即为矩阵 M_5 的部分特征值。

3 结束语

本文给出了判断复杂网络系统中路图可控性的方法, 把 PBH 判据与对称的邻接矩阵相结合, 得到了路图可控的充要条件, 并应用数学中的简单理论, 对于路图可控性的充要条件进行了更为数字化的表示。在此基础上, 提出了系统不可控的特征值的表达形式。同理, 可推出环图可控性的充要条件。本文通过对路图的每个节点进行分析, 进而判断可控性, 使得直接从图的结构形式判断能控性成为可能。本文对于路图可控性的研究方法和结果, 为以后研究更为复杂的图拓扑结构的可控性提供了一个方向 and 基础。

参考文献:

[1] KAMLAN R E. Mathematical description of linear dynamical systems[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A: Control, 1963, 1(2): 152-192.

[2] NOTARSTEFANO G, PARLANGELI G. Controllability and observability of grid graphs via reduction and symmetries[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1719-1731.

[3] JI Zhijian, LIN Hai, YU Haisheng. Protocols design and uncontrollable topologies construction for multi-agent networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 60(3): 781-786.

[4] JI Zhijian, LIN Hai, YU Haisheng. Leaders in multi-agent controllability under consensus algorithm and tree topology[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(9): 918-925.

[5] JI Zhijian, WANG Zidong, LIN Hai, et al. Interconnection topologies for multi-agent coordination under leader-follower framework[J]. Automatica, 2009, 45(12): 2857-2863.

[6] RAHMANI A, JI Meng, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(1): 162-186.

[7] GUAN Yongqiang, JI Zhijian, ZHANG Lin, et al. Decentralized stabilizability of multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(5): 438-446.

[8] KIM H, SHIM H, BACK J, et al. Stabilizability of a group of single integrators and its application to decentralized formation problem[C] // Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Con-

- ference. Orlando, USA, 2011: 4829-4834.
- [9] SABATTINI L, SECCHI C, FANTINZZI C. Controllability and observability preservation for networked systems with time varying topologies [C] // Proceedings of the 19th World Congress on the International Federation of Automatic Control. Cape Town, South Africa, 2014: 1837-1842.
- [10] MESBAHI M, EGERSTEDT M. Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks[M]. Princeton: Princeton University Press, 2010: 117-151.
- [11] SUNDARAM S, HADJICOSTIS C N. Distributed function calculation via linear iterative strategies in the presence of malicious agents [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(7): 1495-1508.
- [12] PASQUALETTI F, BICCHI A, BULLO F. Consensus computation in unreliable networks: A system theoretic approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(1): 90-104.
- [13] LI Zhongkui, REN Wei, LIU Xiangdong, et al. Distributed containment control of multi-agent systems with general linear dynamics in the presence of multiple leaders[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(5): 534-547.
- [14] FARINA M, FERRARI-TRECCATE G, SCATTOLINI R. A moving horizon scheme for distributed state estimation [C]// Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control. Shanghai, China, 2009: 1818-1823.
- [15] JI Zhijian, WANG Zidong, LIN Hai, et al. Controllability of multi-agent system with time-delay in state and switching topology[J]. International Journal of Control, 2010, 83(2): 371-386.
- [16] LIU Bo, CHU Tianguang, WANG Long, et al. Controllability of leader-follower dynamic network with switching topology [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(4): 1009-1013.
- [17] LIU Yangyu, SLOTINE J J, BARABÁSI A L. Controllability of complex networks[J]. Nature, 2011, 473(7346): 167-173.
- [18] YUAN Zhengzhong, ZHAO Chen, DI Zengru, et al. Exact controllability of complex networks[J]. Nature Communications, 2013, 4: Article number 2447.
- [19] PARLANGELI G, NOTARSTEFANO G. On the reachability and observability of path and cycle graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(3): 743-748.
- [20] PARLANGELI G, NOTARSTEFANO G. On the observability of path and cycle graphs [C] // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, USA, 2010: 1492-1497.
- [21] CHARTRAND G, ZHANG Ping. 图论导引[M]. 范益政, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2007: 1-17.
- [22] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections [C] // Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Nassau, Bahamas, 2004: 2467-2472.
- [23] PARLANGELI G, NOTARSTEFANO G. Graph reduction based observability conditions for network systems running average consensus algorithms [C] // Proceedings of the 18th Mediterranean Conference on Control and Automation. Marrakesh, Morocco, 2010: 689-694.

作者简介:



晁永翠,女,1990年生,硕士研究生,主要研究方向为复杂网络的可控性。



纪志坚,男,1973年生,教授,博士生导师,博士,主要研究方向为群体系统动力学与协调控制、复杂网络、切换动力系统的分析与控制、系统生物以及基于网络的控制系统等。主持国家自然科学基金项目3项,发表学术论文70余篇,其中SCI收录23篇,EI收录50余篇。



王耀威,男,1989年生,硕士研究生,主要研究方向为多智能体系统。

[责任编辑:刘畅]