第 9 卷第 5 期 智 能 系 统 学 报 Vol.9 №.5
2014 年 10 月 CAAI Transactions on Intelligent Systems Oct. 2014

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201310076

逻辑及数学演算中的不动项与不可判定命题(Ⅱ)

张金成

(中央党校函授学院 广德教学点,安徽 广德 242200)

摘　要:不动点是一个广泛而深刻的数学现象,它已经渗透到数学的各个领域。文中把不动点推广到逻辑思维领域,证明 Russel 悖论是集合论中的不动项,Gödel 不可判定命题是自然数系统 **N** 中的不动项,Cantor 对角线方法构造的项是不动项,不可判定的 Turing 机也是不动项。进一步可以证明,当一个已知集合 U 可以分割成正、反集合时,不动项不在正集或反集之中,不动项一定是 U 外不动项, U 外不动项的逻辑性质相对于 U 已经发生变异,是未定义项, U 外不动项命题是不可判定的,这是系统的固有现象。自然数系统 **N** 中同样存在不动项,不动项的存在与不可判定,并不影响正、反集合的递归性与系统的完全性,因此,Gödel 不完全定理的证明不成立,Cantor 对角线方法证明是错误的,Turing 停机问题证明也是错误的。“系统 **N** 能否完全”、实数是否可数、Turing 停机问题是否可判定都必须重新思考。

关键词:正项;反项;不动项;悖论; U 外不动项;不可判定命题;不完全定理;对角线方法;不可数;停机问题。

中图分类号: B813; TP18　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-4785(2014)05-0618-14

中文引用格式:张金成. 逻辑及数学演算中的不动项与不可判定命题(Ⅱ)[J]. 智能系统学报, 2014, 9(5): 618-631.

英文引用格式:**ZHANG Jincheng. Fixed terms and undecidable propositions in logical and mathematical calculus (Ⅱ)[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems**, 2014, 9(5): 618-631.

Fixed terms and undecidable propositions in logical and mathematical calculus (Ⅱ)

ZHANG Jincheng

(Correspondence School, Communist Party College, Guangde 242200, China)

Abstract: As a kind of broad and deep mathematical phenomenon, fixed point has penetrated into all fields of mathematics. This paper extends the fixed point to the logical thinking. It proves that Russell's paradox is the fixed term in accordance with the set theory. It also proves that Gödel's undecidable proposition is the fixed term within the natural number system **N**. The term formed by Cantor's diagonal method is fixed term and undecidable Turning is also fixed term. Furthermore, it can be proven that when a known set U is divided into a positive set and an inverse set and if the fixed term is neither in the positive set nor in the inverse set, then this fixed term must be that outside U. Thus, it is an inherent phenomenon of the system that the logical property of the fixed term excluded from U has changed relative to U and the theorem of fixed term outside U is undecidable. In addition, there are also fixed terms in the natural number system **N**, where the existence and undecidability do not exert effect on the recursive nature of positive and inverse sets and the completeness of system. Therefore, the mathematical proof for Gödel's theorem cannot be true and Cantor's diagonal method is proved to be false and Turning's halting problem is proved to be false. Whether the system **N** can be complete, real number is countable or not, whether Turning's halt problem can be decided should be reconsidered.

Keywords: positive term; inverse term; fixed term; paradox; fixed term outside U; undecidable proposition; incomplete theorem; diagonal method; uncountable set; halting problem

收稿日期:2013-11-26.

通信作者:张金成.E-mail:656790205@qq.com.

4 正反命题与谓词演算系统

4.1 正反命题演算系统 L^{α}

在经典系统 L 上引入“正反集对偶变换公理 $P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$”,组建一个新的逻辑系统——命题系统 L^{α}:

1)初始符号(略);

2)命题的形成规则(略);

3)定义(略);

4)公理。

(1)正集公理

$$L1^{+}: A^{+\alpha}\to(B^{+\alpha}\to A^{+\alpha});$$

$$L2^{+}: (A^{+\alpha}\to(B^{+\alpha}\to C^{+\alpha}))\to((A^{+\alpha}\to B^{+\alpha})\to(A^{+\alpha}\to C^{+\alpha}));$$

$$L3^{+}: (\neg A^{+\alpha}\to\neg B^{+\alpha})\to((\neg A^{+\alpha}\to B^{+\alpha})\to A^{+\alpha})$$

(2)正反集对偶变换公理

$L0$: $P^{+\alpha}\leftrightarrow\neg P^{-\alpha}$ (P 是 $+\alpha$, $-\alpha$ 的一个完全划分);

(3)反集公理

$$L1^{-}: A^{-\alpha}\to(B^{-\alpha}\to A^{-\alpha});$$

$$L2^{-}: (A^{-\alpha}\to(B^{-\alpha}\to C^{-\alpha}))\to((A^{-\alpha}\to B^{-\alpha})\to(A^{-\alpha}\to C^{-\alpha}));$$

$$L3^{-}: (\neg A^{-\alpha}\to\neg B^{-\alpha})\to((\neg A^{-\alpha}\to B^{-\alpha})\to A^{-\alpha})$$

5)演绎推理规则

分离规则:若 $\vdash A$ 且 $\vdash A\to B$;则 $\vdash B$;

定义 1 系统 L^{α}

由以上 1)~5)几个部分组成的公理系统,可以叫做系统 L^{α}。

定理 1 经典逻辑的定理封闭域上的有效性

在系统 L^{α} 中,相同集 $+\alpha$, $-\alpha$ 中的命题演算,所有经典逻辑的定理与演算模式都是有效的。

证明 略。

定理 2 正、反集上的等价替换

系统 L^{α} 中,设 $F(M,N)$ 表示含有变项 M、N 的命题公式,则如果在相同集中的经典命题 $\vdash F(P^{\alpha},\neg P^{\alpha})$ 成立(即 $\vdash F(P^{+\alpha},\neg P^{+\alpha})$ 且 $\vdash F(P^{-\alpha},\neg P^{-\alpha})$ 成立),则在不同集中 $\vdash F(P^{+\alpha},P^{-\alpha})$,且 $\vdash F(\neg P^{-\alpha},\neg P^{+\alpha})$ 也成立。

证明 略。

系统 L^{α} 的语义很简单,用二值真值表定义为

定义 2 单一正集上的真值表

表 1 单一正集上“蕴含”的真值

Table 1 The truth value table of “implication” for the single positive se

$A^{+\alpha}$	$\neg A^{+\alpha}$
1	0
0	1

表 2 单一正集上“否定”的真值

Table 2 The truth value table of “negation” for the single positive se

$A^{+\alpha}$	$B^{+\alpha}$	$A^{+\alpha}\to B^{+\alpha}$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	1

定义 3 单一反集上的真值表(如表 3、4)。

表 3 单一反集上“蕴含”的真值

Table 3 The truth value table of “implication” for the single inverse se

$A^{-\alpha}$	$\neg A^{-\alpha}$
1	0
0	1

表 4 单一正集上“否定”的真值

Table 4 The truth value table of “negation” for the single positive se

$A^{-\alpha}$	$B^{-\alpha}$	$A^{-\alpha}\to B^{-\alpha}$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	1

定义 4 跨正反集上的真值表(如表 5)。

表 5 跨正反集上的真值表

Table 5 The truth value table for the crossing the positive and inverse sets

$P^{+\alpha}$	$P^{-\alpha}$
1	0
0	1

在表中可以看出经典二值真值表定义仍然不变,增加了一个跨正反集上的真值表定义。

在系统 L^{α} 中,利用以上“真值表”可以证明,下列公式是不可证的。

公式 $P^{+\alpha},\neg P^{-\alpha}\vdash B^{+\alpha}$, $P^{+\alpha}\wedge\neg P^{-\alpha}\vdash B^{-\alpha}$, $P^{+\alpha}\to(\neg P^{-\alpha}\to B^{+\alpha})$, $P^{+\alpha}\to(\neg P^{-\alpha}\to B^{-\alpha})$ 都不是系统 L^{α} 的定理[3]。

4.2 正反谓词演算系统 K^{α}

1) 基本符号(略)

2) 定义(略)

3) 公理

(1) 正集公理

$$K1^{+}: A^{+\alpha} \to (B^{+\alpha} \to A^{+\alpha});$$

$$K2^{+}: (A^{+\alpha} \to (B^{+\alpha} \to C^{+\alpha})) \to ((A^{+\alpha} \to B^{+\alpha}) \to (A^{+\alpha} \to C^{+\alpha}));$$

$$K3^{+}: (\neg A^{+\alpha} \to \neg B^{+\alpha}) \to (B^{+\alpha} \to A^{+\alpha});$$

$$K4^{+}: \forall(x_i) A^{+\alpha} \to A^{+\alpha};$$

$$K5^{+}: \forall(x_i) A^{+\alpha}(x_i) \to A^{+\alpha}(t);$$

$$K6^{+}: \forall(x_i)(A^{+\alpha} \to B^{+\alpha}) \to (A^{+\alpha} \to \forall(x_i) B^{+\alpha});$$

(2) 正反集对偶变换公理

$K0$: $P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg P^{-\alpha}$($P$ 是 $+\alpha$, $-\alpha$ 的一个对称划分);

(3) 反集公理

$$K1: A^{-\alpha} \to (B^{-\alpha} \to A^{-\alpha});$$

$$K2: (A^{-\alpha} \to (B^{-\alpha} \to C^{-\alpha})) \to ((A^{-\alpha} \to B^{-\alpha}) \to (A^{-\alpha} \to C^{-\alpha}));$$

$$K3: (\neg A^{-\alpha} \to \neg B^{-\alpha}) \to (B^{-\alpha} \to A^{-\alpha});$$

$$K4: \forall(x_i) A^{-\alpha} \to A^{-\alpha};$$

$$K5: \forall(x_i) A^{-\alpha}(x_i) \to A^{-\alpha}(t);$$

$$K6: \forall(x_i)(A^{-\alpha} \to B^{-\alpha}) \to (A^{-\alpha} \to \forall(x_i) B^{-\alpha});$$

4) 系统内推理规则

$R1$ 分离规则:若 $\vdash A$ 且 $\vdash A \to B$,则 $\vdash B$;

$R2$ 概括规则:若 $\vdash A$,则 $\vdash \forall x_i A$。

定义 5 系统 K^{α}

由以上 1)~4)几个部分组成的公理系统,叫做系统 K^{α}。

在系统 K^{α} 中,具有与 L^{α} 类似的定理(证明与 L^{α} 相同),即:

定理 3 经典逻辑的定理封闭域上的有效性

在系统 K^{α} 中,相同集 $+\alpha$, $-\alpha$ 中的命题演算,所有经典逻辑的定理与演算模式都是有效的。

定理 4 正、反集上的等价替换

系统 K^{α} 中,设 $F(M,N)$ 表示含有变项 M、N 的命题公式,则如果在相同集中的经典命题 $F(P^{\alpha}, \neg P^{\alpha})$ 成立(即 $F(P^{+\alpha}, \neg P^{+\alpha})$ 且 $F(P^{-\alpha}, \neg P^{-\alpha})$ 成立),则在不同集中 $F(P^{+\alpha}, P^{-\alpha})$,且 $\vdash F(\neg P^{-\alpha}, \neg P^{+\alpha})$ 也成立。

在不同集中,含有量词的公式,可以用下列公式转换:

$$\forall(x) P^{+\alpha} \leftrightarrow \forall(x) \neg P^{-\alpha};$$

$$\forall(x) P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg \exists(x) P^{-\alpha};$$

$$\neg \forall(x) P^{+\alpha} \leftrightarrow \exists(x) P^{-\alpha};$$

$$\exists(x) P^{+\alpha} \leftrightarrow \exists(x) \neg P^{-\alpha};$$

$$\exists(x) P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg \forall(x) P^{-\alpha};$$

$$\neg \exists(x) P^{+\alpha} \leftrightarrow \forall(x) P^{-\alpha}。$$

$$\forall(x) P^{-\alpha} \leftrightarrow \forall(x) \neg P^{+\alpha};$$

$$\forall(x) P^{-\alpha} \leftrightarrow \neg \exists(x) P^{+\alpha};$$

$$\neg \forall(x) P^{-\alpha} \leftrightarrow \exists(x) P^{+\alpha};$$

$$\exists(x) P^{-\alpha} \leftrightarrow \exists(x) \neg P^{+\alpha};$$

$$\exists(x) P^{-\alpha} \leftrightarrow \neg \forall(x) P^{+\alpha};$$

$$\neg \exists(x) P^{-\alpha} \leftrightarrow \forall(x) P^{+\alpha}。$$

K^{α} 的语义解释(略)[3]

4.3 系统 L^{α}、K^{α} 的完全性与不可判定命题

根据"$P^{+\alpha} \leftrightarrow \neg P^{-\alpha}$, $P^{-\alpha} \leftrightarrow \neg P^{+\alpha}$"可以得到,任一个含有 $-\alpha$ 反集的命题公式全部可以转化成正集 $+\alpha$ 命题公式,即可以转化成经典命题演算公式,即以上正反命题演算系统 L^{α} 与经典命题演算系统 L 等价。

注记 1 P^{e} 是 U 外不动项命题,是未定义命题,不参与演算。

定理 5 L^{α} 等价系统

系统 L^{α} 在 $+\alpha$ 与 $-\alpha$ 中的全部公式可以翻译成经典命题演算系统 L 的公式,即系统 L^{α} 在 $+\alpha$ 与 $-\alpha$ 中与经典命题演算系统 L 等价。

证明 略

定理 6 K^{α} 等价系统

系统 K^{α} 中全部公式可翻译成经典谓词演算系统的公式,即系统 K^{α} 与经典谓词演算系统 K 等价。

证明 略

由于系统 K^{α} 与经典谓词演算系统 K 等价,所以经典逻辑的元定理在系统 K^{α} 仍然成立,根据"定理 5、6"很容易证明以下定理。证明方法同经典谓词逻辑系统方法,这里不再给出。

系统 L 的一致性、可判定性、完全性等元定理,在系统 L^{α} 中都是有效的;

系统 K 的一致性、不可判定性、完全性等元定理,在系统 K^{α} 中都是有效的;

定理 7 P^{e} 是域外命题

命题 P^{e} 在系统 L^{α} 中是未定义命题,是域外命题;

证明 设 P 是 U 的一个完全划分,

在命题演算 L^{α} 中,若 $+\alpha = -\alpha = e$(P 是 $+\alpha$, $-\alpha$ 的一个完全划分),$P^{e} \leftrightarrow \neg P^{e}$;$e = \{x_P\}$ 是不动项,$x_P \notin U$ 是未定义项,因此 P^{e} 是未定义命题。

因此,在命题演算 L^{α} 中,若 $+\alpha = -\alpha = e$,则 P^{e} 是不动命题,e,P^{e} 在 U 上无定义;

未定义命题与其他命题的混合演算,如 $P^{e} \wedge \neg P^{e} \to Q^{+\alpha}$;$P^{e} \wedge \neg P^{e} \to Q^{-\alpha}$;$P^{e} \vee \neg P^{e}$;$(P^{e} \vee \neg P^{e}) \wedge (P^{+\alpha} \vee P^{-\alpha})$ 等都是无意义的,不合法的。

定理 8 系统 L^{α} 完全性定理

在系统 L^{α} 中,若 $\vDash P^{\alpha}$ 或 $V(P^{\alpha}) = 1$ 则 $L^{\alpha} \vdash P^{\alpha}$;

证明 因为 $L^{\alpha} \Leftrightarrow L$,而系统 L 是完全的,即:

若 $\vDash P^{\alpha}$,则 $L \vdash P^{\alpha}$;所以,若 $\vdash P^{\alpha}$ 或 $V(P^{\alpha}) = 1$ 则 $L^{\alpha} \vdash P^{\alpha}$;

所以,系统 L^{α} 也是完全的。

定理 9 P^{e} 是不可判定命题

命题 P^{e} 在系统 L^{α} 中是不可判定命题(证明略,因为不动命题是不可判定命题)。

注记 2 悖论 P^{e} 不参与系统演算

1)虽然系统 L^{α} 中出现了悖论 P^{e} ,但是, P^{e} 是未定义命题,不参与系统演算,不会导致系统 L^{α} 演算崩溃,系统 L^{α} 仍然是有效的。

2)虽然系统 L^{α} 中出现了不可判定 P^{e} ,但是, P^{e} 与系统完全性无关,系统 L^{α} 仍然是完全的,系统 L^{α} 的定理集合是可判定的。

定理 10 $P(x_P)$ 是域外命题

命题 $P(x_P)$ 在系统 K^{α} 中是未定义命题;

证明同上,在谓词演算中,若 $x_i = \widetilde{x_i} = x_P$,则 $P(x_P)$ 是不动命题, x_P 、$P(x_P)$ 在 U 上无定义。

与系统 L^{α} 一样,未定义命题 $P(x_P)$ 与其他命题的混合演算,如 $P(x_P) \wedge \neg P(x_i)$ 、$P(x_P) \wedge \neg P(x_P) \rightarrow Q(x_i)$ 、$P(x_P) \vee \neg P(x_P)$ 等都是无意义的,不合法的。

定理 11 系统 K^{α} 完全性定理

系统 K^{α} 中,若 $\vDash P^{\alpha}$ 或 $V(P^{\alpha}) = 1$ 则 $K^{\alpha} \vdash P^{\alpha}$;

证明 因为 $K^{\alpha} \Leftrightarrow K$,而系统 K 是完全的,即

若 $\vDash P^{\alpha}$,则 $K \vdash P^{\alpha}$;所以,若 $\vDash P^{\alpha}$ 或 $V(P^{\alpha}) = 1$ 则 $K^{\alpha} \vdash P^{\alpha}$;

所以,系统 K^{α} 也是完全的。

定理 12 $P(x_P)$ 是不可判定命题

命题 $P(x_P)$ 在系统 K^{α} 中是不可判定命题(证明略,因为不动命题是不可判定命题)。

注记 3 悖论 $P(x_P)$ 不参与系统演算

1)虽然系统 K^{α} 中出现了悖论 $P(x_P)$,但是, $P(x_P)$ 是未定义命题,不参与系统演算,不会导致系统 K^{α} 演算崩溃,系统 K^{α} 仍然是有效的。

2)虽然系统 K^{α} 中出现了不可判定 $P(x_P)$,但是, $P(x_P)$ 与系统完全性无关,系统 K^{α} 仍是完全的。

4.4 经典逻辑定理的适用范围

定义 6 超协调逻辑系统

正反命题演算系统“ L^{α} ” 与正反谓词系统“ K^{α} ”也称超协调逻辑系统。

在超协调系统中,可以发现经典逻辑是定义在一个已知集合 U 上的,不能无限制地使用到 U 外,经典逻辑的推理有一个使用范围。

定理 13 经典逻辑的适用范围

$U = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是一个已经定义集合,经典逻辑的所有定理只适用于已经定义的集合 U 上。

证明 设 $U = +\alpha \cup -\alpha$ 是一个已定义集合;

假设在这个已定义集合外,可以适用经典逻辑的所有定理,根据 U 外不动项定理,

那么,有矛盾命题 $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ 成立;

根据邓—斯各特定理($\vdash A$, $\vdash \neg A$,那么 $\vdash B$),这个逻辑系统中一切命题都是定理,这是一个崩溃的系统;

所以,经典逻辑的所有定理只适用于已经定义的集合 U 上。

定理 14 “反证法”的适用范围

$U = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是一个已经定义集合,“反证法”只适用于已经定义的集合 U 上。

证明 因为,反证法是经典逻辑的一条定理,即:如果 $A \vdash B$ 且 $A \vdash \neg B$,那么 $\vdash \neg A$;

根据定理 13,“反证法”只适用于已经定义的集合 U 上。

定理 15 不动项矛盾用于“反证法”的限制

$U = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是一个已经定义集合,不动项矛盾不能作为“反证法”在已定义的集合 U 上的推理依据。

证明 因为根据 U 外不动项定理,不动项矛盾是已定义集合外的矛盾;

假设不动项矛盾能作为“反证法”在已定义的集合上的推理依据。

那么,有矛盾命题 $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ 成立,而且这是一个 U 外恒成立的矛盾;

根据邓—斯各特定理($\vdash A$, $\vdash \neg A$,那么 $\vdash B$),这个逻辑系统中一切命题都是定理,这是一个崩溃的系统;

如果不动项矛盾能作为“反证法”在已定义的集合 U 上的推理依据,将建立不起来任何足道的系统;

所以,不动项矛盾不能作为“反证法”在已定义的集合 U 上的推理依据。

在逻辑系统 L^{α}、K^{α} 中,若 $U = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是已定义集合, P 是 U 上的任意一个有定义的性质,若 $x_i \in U$,则 $P(x_i)$、$\neg P(x_i)$ 是有定义、有意义的命题;若 $x_i \notin U$,则 $P(x_i)$、$\neg P(x_i)$ 是无定义、无意义的命题。

推论 1 构造悖论,不能作为“反证法”在已定义的集合 U 上的推理依据。

例 1 构造悖论的错误证明方法

举出一个具体的例子, U 为全体整数集合 $U = J$, 假设在 $n = n$ 中,任意 $n \in J$;把 $U = J$ 分成偶数集合与奇数集合:

$$+\alpha = \{x \mid x = 2n, n \in U\}$$

$$-\alpha = \{x \mid x = 1 - 2n, n \in U\}$$

$P(x)$ 代表谓词“ x 是偶数”, $\neg P(x)$ 代表谓词“ x 是奇数”; $n \in +\alpha$,或者 $n \in -\alpha$; 定义一个新数 $T = 1 - n$;自指代 $T = n$, $n = 1 - n$, n 是偶数 $\leftrightarrow$ n 是奇数;产生悖论,不可判定命题 $P(n) \leftrightarrow \neg P(n)$;即

$$n = n \vdash P(n) \leftrightarrow \neg P(n)$$

根据反证法得到, $\vdash n \neq n$,这显然是荒唐的结论。

例 2 相对无意义的命题

设 U 为全体整数集合, $P(x)$:表示 x 是偶数;则 $P(0)$, $P(2)$, $P(7)$,… 等都是有定义、有意义的命题; $P(\frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{3})$, $P(\frac{2}{3})$,… 都是无定义、无意义的命题。

$U = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是一个已经定义集合,如果 $A \vdash P(x_i) \wedge \neg P(x_i)$,且 $x_i \in U$,可以使用“反证法”, $\vdash \neg A$,这是正确的证明方法。

注记 5 “反证法”的正确推理形式

一般地,设 $U = +\alpha \cup -\alpha$ 是一个已定义集合, $x_i \in U$, $K(x_i)$ 是 U 内的任意一个命题,根据 U 外不动项定理, $\vdash P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$ 。

1) U 外不动项所产生的矛盾,使用“反证法”只能得出 $x_P \notin U$ 。即把 $x_P \in U$ 看成假设时,可以使用“反证法”进行推理,正确的推理形式是:

$K(x_i), x_P \in U \vdash P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$,

$\vdash \neg (x_P \in U)$ 。

2) U 外不动项所产生的矛盾,不能作为任何“ U 内演算的推理依据” 即把 $x_P \in U$ 看成真命题时,使用“反证法”是错误的。不正确的推理形式是:

$K(x_i) \vdash P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$, $\vdash \neg K(x_i)$ 。

3)一般使用“自指代”所产生的矛盾,都是域外矛盾,不能作为反证法的依据。

可以回顾一下,历史上“直觉主义”者,也认识到无限制地使用“反证法”会有问题,他们转向完全的“构造数学”,他们也看到一些问题,但是,没有把问题完全搞清。这里真正看到“反证法”的使用范围。

5 无穷集合的幂集中的不可判定命题

集合论的创立者 Cantor 证明:无穷集合的幂集合不能与原来的集合建立一一对应关系。可以回顾一下其证明过程,使用 Cantor 的对角线方法。

如果 PM 为 M 的幂集,且 $M \sim PM$ (M 与 PM 之间可以建立一一对应关系,即双射关系),则存在 T , $T \subseteq M$,且 $T \notin PM$ 。

对于一个 M 子集而言,如果能够决定 M 的元素中哪些属于该子集,那么 M 的子集就确定了。可以给出一个一般准则,由它可以对 M 的任何元素 x ,决定该元素是否属于该子集。

在假设 $M \sim PM$ 中,任意 $x \in M$ 对应一个 $y \in PM$,即: $x \in M \leftrightarrow y \in PM$,

y 是 M 的子集之一, $y \subseteq M$,

$x \in y$,或者 $x \notin y$;规定: $x \in y \leftrightarrow x \notin T$; $x \notin y \leftrightarrow x \in T$;

假定 $T \in PM$, $M \sim PM$,存在

$x_0 \in M \leftrightarrow T \in PM$;

按规定: $x_0 \in T \leftrightarrow x_0 \notin T$; $x_0 \notin T \leftrightarrow x_0 \in T$;

矛盾,所以, $T \notin PM$ 。

注:这证明在很多“数理逻辑”书中都可以见到,如《元数学导论》[7]。

5.1 无穷集合演算中的不动项

在以上证明过程中,构造的集合 T ,如果按照正反集合分析法,实际上是一个不动项,证明如下。

定理 16 无穷集合演算中存在不动项

如果无穷集合与它的幂集合之间能建立一一映射,那么,幂集合演算中存在一个不动项。

证明 首先把以上证明过程,整理如下:

假设在双射关系 $F:M \sim PM$ 中,任意 $x \in M$ 对应一个 $F(x) \in PM$,

即: $x \in M \leftrightarrow F(x) \in PM$, $F(x)$)是 M 的子集之一, $F(x) \subseteq M$;

$x \in F(x)$,或者 $x \notin F(x)$;

规定: $x \in F(x) \leftrightarrow x \notin T_M$;

$x \notin F(x) \leftrightarrow x \in T_M$;

假定 $T_M \in PM$, $M \sim PM$,存在

$x_0 \in M \leftrightarrow F(x_0) \in PM$,(设 $T_M = F(x_0)$;

按规定: $x_0 \in F(x_0) \leftrightarrow x_0 \notin F(x_0)$; $x_0 \notin F(x_0) \leftrightarrow x_0 \in F(x_0)$ 。再把 PM 分为正反集合,设:

$$+\alpha = \{X : x \in M, x \in X, X \in PM, X = F(x)\}$$

$$-\alpha = \{X : x \in M, x \notin X, X \in PM, X = F(x)\}$$

$$U = PM = +\alpha \cup -\alpha$$

按规定: $x \in F(x) \leftrightarrow x \notin T_M$; $x \notin F(x) \leftrightarrow x \in T_M$,自我指代: $T_M = F(x_0)$,即 $x_0 \in F(x_0) \leftrightarrow x_0 \notin F(x_0)$, $x_0 \in T_M \leftrightarrow x_0 \notin T_M$, $P[F(x)]$ 表示 $x \in F(x)$;则 $\neg P[F(x)]$ 表示 $x \notin F(x)$ 。

命题 $x_0 \in F(x_0) \leftrightarrow x_0 \notin F(x_0)$, $T_M = F(x_0)$,可以表示为 $P(T_M) \leftrightarrow \neg P(T_M)$; T_M 是不动项。

如果 $(T_M \in PM)$,则有悖论 $P(T_M) \leftrightarrow \neg P(T_M)$;即:如果双射关系 $F:M \sim PM$ 成立,那么, T_M 是不动项。

这是“Cantor 的对角线方法”证明,在这个证明中,他把 T_M 看成是一个已知项 $T_M \in U$,实际上 $T_M \in U$ 未必成立,他只证明了以下结果:

如果双射关系 $F:M \sim PM$ 成立,且 $T_M \in U$,那么, $P(T_M) \leftrightarrow \neg P(T_M)$;即 $(F:M \sim PM) \wedge (T_M \in U) \vdash P(T_M) \leftrightarrow \neg P(T_M)$ 。

上面命题中出现了两个假设,到底是哪个假设引起的矛盾,还要分析。

这个定理和下面的定理等价,下面证明“Cantor 的对角线方法”表现更清晰。

定理 17　自然数集合演算中存在不动项

如果自然数集合与它的幂集合之间能建立一一映射,那么,它的幂集合演算中存在一个不动项。

证明　这个定理可以看成定理 16 的特例,证明过程与定理 16 相同。

双射关系 $F:\omega \sim P(\omega)$, ω 是自然数集合, $P(\omega)$ 是 ω 的幂集合。

假设在 $F:\omega \sim P(\omega)$ 中,任意 $n \in \omega$ 对应一个 $F(n) \in P(\omega)$,

即: $n \in \omega \leftrightarrow F(n) \in P(\omega)$, $F(n)$)是 ω 的子集之一, $F(n) \subseteq \omega$;

$n \in F(n)$,或者 $n \notin F(n)$;

按规定: $n \in F(n) \leftrightarrow n \notin T_\omega$ 。$n \notin F(n) \leftrightarrow n \in T_\omega$;

假定 $T_\omega \in P(\omega)$, $F:\omega \sim P(\omega)$,存在

$k \in \omega \leftrightarrow F(k) \in P(\omega)$,(设 $T_\omega = F(k)$;

按规定: $k \in F(k) \leftrightarrow k \notin F(k)$;

$k \notin F(k) \leftrightarrow k \in F(k)$ 。

再把 $P(\omega)$ 分为正反集合,设:

$+\alpha = \{x:n \in x, n \in \omega, x \in P(\omega), x = F(n)\}$

$-\alpha = \{x:n \notin x, n \in \omega, x \in P(\omega), x = F(n)\}$

$$U = P(\omega) = +\alpha \cup -\alpha$$

按规定: $n \in F(n) \leftrightarrow n \notin T_\omega$, $n \notin F(n) \leftrightarrow n \in T_\omega$;

自我指代: $T_\omega = F(k)$;

即 $k \in F(k) \leftrightarrow k \notin F(k)$, $k \in T_\omega \leftrightarrow k \notin T_\omega$ 。

$P[F(n)]$ 表示 $n \in F(n)$;则 $\neg P[F(n)]$ 表示 $n \notin F(n)$ 。

命题 $k \in F(k) \leftrightarrow k \notin F(k)$, $T_\omega = F(k)$ 可以表示为 $P(T_\omega) \leftrightarrow \neg P(T_\omega)$; T_ω 是不动项;

如果 $(T_\omega \in P(\omega))$,则有悖论 $P(T_\omega) \leftrightarrow \neg P(T_\omega)$;

即如果双射关系 $F:\omega \sim P(\omega)$ 成立,那么 T_ω 是不动项。

同样以上证明有两个假设,可以表示为

如果双射关系 $F:\omega \sim P(\omega)$ 成立,且 $(T_\omega \in P(\omega))$,那么, $P(T_\omega) \leftrightarrow \neg P(T_\omega)$;

即: $(F:\omega \sim P(\omega)) \wedge (T_\omega \in P(\omega)) \vdash$

$P(T_\omega) \leftrightarrow \neg P(T_\omega)$ 。

注记 6　“Cantor 的对角线方法”

假设自然数和它的幂集合有一一对应关系,即 $n \in \omega \leftrightarrow F(n) \in P(\omega)$,可以把自然数的所有子集排成如下集合序列。

$F(1) = \{1, *, 3, 4, *, \cdots\}$,该集合包含 1,3,4,不包含 2,5,(空缺的用“ * ”标注);

$F(2) = \{1, *, 3, *, *, \cdots\}$,该集合包含 1,3,不包含 2,4,5;

$F(3) = \{1, *, 3, *, 5, \cdots\}$,该集合包含,1,3,5,不包含 2,4;

$F(4) = \{1, 2, 3, *, 5, \cdots\}$,该集合包含 1,2,3,5,不包含,4;

$F(5) = \{*, 2, 3, *, 5, \cdots\}$,该集合包含 2,3,5,不包含 1,4;

…

$F(n) \subseteq \omega$, $F(n)$ 都是 ω 的子集, $F(n) \in P(\omega)$;

定义一个新集合 T_ω : $n \in F(n) \leftrightarrow n \notin T_\omega$, $n \notin F(n) \leftrightarrow n \in T_\omega$;

显然集合 $T_\omega = \{*, 2, *, 4, *, \cdots\}$ 是上面集合序列对角线元素的集合在 ω 上的补集;

T_ω 也是 ω 的子集, $T_\omega \in P(\omega)$,它也在上表中,设它对应 $F(k)$, $T_\omega = F(k)$;

得到矛盾: $k \in F(k) \leftrightarrow k \notin F(k)$ 。

注记 7　Cantor 的两个定理

1)自然数集合的任意一个子集都可以与一个 0 与 1 的序列建立一一映射关系。

证明　用一个函数来表示某自然数的集值域,在属于该集的自然数处它取值 0,在不属于该集的自然数处它取值 1。某自然数集合代表的函数值的序列便是由 0 与 1 组成的无穷序列。为表示方便把自然数集合中的 0 排除,仅为 $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$, $P(\omega)$ 为 ω 的幂集合。

例: $A_1 = \{1, *, 3, 4, *, \cdots\}$ 该集合包含 1,3,4,不包含 2,5,(空缺的用“ * ”标注)该序列为 $F(A_1) = 01001\cdots$;

$A_2 = \{1, *, 3, *, *, \cdots\}$ 该集合包含 1,3,不包含 2,4,5,该序列为 $F(A_2) = 01011\cdots$;

$A_3 = \{1, *, 3, *, 5, \cdots\}$ 该集合包含,1,3,5,不包含 2,4,该序列为 $F(A_3) = 01010\cdots$;

$A_4 = \{1, 2, 3, *, 5, \cdots\}$ 该集合包含 1,2,3,5,不包含,4,该序列为 $F(A_4) = 00010\cdots$;

$A_5 = \{*, 2, 3, *, 5, \cdots\}$ 该集合包含 2,3,5,不包含 1,4,该序列为 $F(A_5) = 10010\cdots$;

…

所以,自然数集合的任意一个子集都可以表示成一个 0 与 1 的序列,即自然数集合的任意一个子集都可以与一个 0 与 1 的序列建立一一映射关系。

2)全体实数与全体自然数集合的子集具有一一映射关系。

以上两个定理已经被 Cantor 等证明,自然数集合的任意一个子集都可以表示成一个 0 与 1 的序列,任意实数都可以表示二进制 0 与 1 的序列,它们

之间具有一一映射关系[7]。

定理 18 实数集合演算中存在不动项

如果自然数集合与实数集合之间能建立一一映射,那么,实数集合演算中存在一个不动项。

证明 由于全体实数都可以化成二进制形式,只用 0,1 两个数字表示,注记 7 构造的 $F(A_i)$ 序列实际上可以看成与实数之间有一个一一对应关系,用 x_i 表示这些实数,用 Cantor 对角线法构造的不动项,也可以看成实数领域的不动项。

把这些序列列成无穷方阵:

$$F(A_1) = x_1 = 01001\cdots$$
$$F(A_2) = x_2 = 01011\cdots$$
$$F(A_3) = x_3 = 01010\cdots$$
$$F(A_4) = x_4 = 00010\cdots$$
$$F(A_5) = x_5 = 10010\cdots$$
$$\cdots$$

用对角线法在上面方阵中构造一个对角线数:01010⋯ ,把这个对角线数 0 与 1 互相交换得 T_R ,$T_R = 10101\cdots$, T_R 和上表中任何一个都不同。

用 T_n 表示 T_R 的第 n 个数字, x_{nn} 表示 x_n 的第 n 行,第 n 个数字,则 T_R 的定义可以表示为

$x_{nn} = 0 \leftrightarrow T_n = 1$, $x_{nn} = 1 \leftrightarrow T_n = 0$。

如果 T_R 也是实数, $T_R \in R$,设它排列在第 k 行,现在考查 T_R 是序列 x_k 中第 k 位 T_k ,按定义得到以下矛盾:

$T_k = 0 \leftrightarrow T_k = 1$, $T_k = 1 \leftrightarrow T_k = 0$。

设 $+\alpha = \{x_n : x_{nn} = 1, x_n \in R\}$,即所有第 n 行,第 n 项为 1 的实数序列;

$-\alpha = \{x_n : x_{nn} = 0, x_n \in R\}$,即所有第 n 行,第 n 项为 0 的实数序列。

按规定: $x_{nn} = 0 \leftrightarrow T_n = 1$, $x_{nn} = 1 \leftrightarrow T_n = 0$;

自我指代: $x_k = T_R$, $x_{kk} = T_k$,(T_k 是 T_R 的第 k 项);

即: $T_k = 0 \leftrightarrow T_k = 1$, $T_k = 1 \leftrightarrow T_k = 0$;

$P(x_k)$: $x_{kk} = 1$(x_k 的第 k 项为 1);$\neg P(x_k)$: $x_{kk} = 0$(x_k 的第 k 项为 0)。

如果 $T_R \in R$,则有" T_R 的第 k 项为 1" ⇔ " T_R 的第 k 项为 0";

即有 $T_R \in +\alpha \leftrightarrow T_R \in -\alpha$, $P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$;

即如果 $T_R \in R$,则有悖论: $P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$ 。

所以,如果自然数集合与实数集合之间能建立一一映射,那么,实数集合演算中存在一个不动项。

同样以上证明有两个假设,可以表示为:

如果双射关系 $F:\omega \sim R$ 成立,且 $T_R \in R$,那么,$P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$;即

$(F:\omega \sim R) \wedge (T_R \in R) \vdash P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$

运用这种对角线方法,在有理数集合上,同样可以构造出不动项矛盾。

因为不动项命题都是不可判定命题,所以,以下推论成立。

推论 2 如果双射关系 $F:M \sim PM$ 成立,且 $T_M \in PM$,那么, $P(T_M)$ 是不可判定命题。

推论 3 如果双射关系 $F:\omega \sim P(\omega)$ 成立,且 $T_\omega \in P(\omega)$,那么, $P(T_\omega)$ 是不可判定命题。

推论 4 如果双射关系 $F:\omega \sim R$ 成立,且 $T_R \in R$,那么, $P(T_R)$ 是不可判定命题。

5.2 "对角线方法"的逻辑分析

Cantor 对角线方法是经典集合论、证明论、模型论、递归论中的一个重要方法,如:实数不可数、图灵机不可判定、存在非递归函数等很多定理的证明都是使用这种方法。然而,以下的证明表明,对角线方法产生的是 U 外不动项,这说明使用对角线方法证明的定理的证明是错误的。

定理 19 广义 U 外不动项定理

设全集 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ 是一个已经定义的集合, P 是定义在 U 上的一个性质,命题 P 是关于 $+\alpha$ 、$-\alpha$ 的一个划分,即: $+\alpha = \{x \mid P(x)\}$, $-\alpha = \{x \mid \neg P(x)\}$,构造项 T 满足以下关系, $x \in +\alpha \leftrightarrow \neg P(T)$, $x \in -\alpha \leftrightarrow P(T)$;如果 U 上的演算是一致的,那么, T 是 U 外项。

证明 $x \in +\alpha \leftrightarrow P(x)$,

假设 $T \in +\alpha \Rightarrow P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$;

同理, $x \in -\alpha \leftrightarrow \neg P(x)$,

假设 $T \in -\alpha \Rightarrow \neg P(T) \leftrightarrow P(T)$;

因为, $U = +\alpha \cup -\alpha$,

所以,假设 $T \in U \Rightarrow P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$;

所以, $\Rightarrow T \notin U$ 。

"广义 U 外不动项定理"可以简化为:

P 、T 在 U 上可定义,

$T \in U$, $\vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ 。

在以上定理中,如果 $+\alpha$, $-\alpha$ 之间存在双射关系,即 f: $+\alpha \sim -\alpha$,

则 $x \in +\alpha \leftrightarrow f(x) \in -\alpha$,

$x \in +\alpha \leftrightarrow \neg P(T)$, $f(x) \in -\alpha \leftrightarrow P(T)$,

所以, $P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$,

即为" U 外不动项定理",可以看出"广义 U 外不动项定理"是" U 外不动项定理"的推广形式," U 外不动项定理"是它的特例。

例 3 "广义 U 外不动项定理"的具体例子

以上定理 16~18 中,"Cantor 对角线证明方法"可以看成把 U 分成对称的 $+\alpha$, $-\alpha$,定义新项" T "满足 $x \in +\alpha \leftrightarrow \neg P(T)$, $x \in -\alpha \leftrightarrow P(T)$,都是"广义 U 外不动项定理"的具体例子。

定理 16 规定: $x \in F(x) \leftrightarrow x \notin T_M$;

$x \notin F(x) \leftrightarrow x \in T_M$;

定理 17 规定: $n \in F(n) \leftrightarrow n \notin T_N$;

$n \notin F(n) \leftrightarrow n \in T_N$;

定理 18 规定: $x_{nn} = 0 \leftrightarrow T_n = 1$,

$x_{nn} = 1 \leftrightarrow T_n = 0$。

以上构造项 T_M 、T_ω 、T_R 都满足:

$x \in +\alpha \leftrightarrow \neg P(T)$, $x \in -\alpha \leftrightarrow P(T)$

所以, T_M 、T_ω 、T_R 都是 U 外不动项。

"对角线方法"还可以看成一种非对称的分类方法,也是"广义 U 外不动项定理" 的特例。

定理 20　"对角线证明方法"的非对称分类

如果集 U 上的演算是一致的, $+\alpha = U$, $-\alpha = \varnothing$,构造项 T 满足 $x \in U \leftrightarrow \neg P(T)$,那么, T 不是 U 的元素,即: $T \notin U$ 。

证明　在以上"广义 U 外不动项定理"中假设 $+\alpha = U$,则 $-\alpha = \varnothing$, $+\alpha = \{x \mid P(x)\}$,代入即有 $T \notin U$,或者列出以下过程:

1)假设 $U = \{x \mid P(x)\}$,—— $P(x)$ 表示 x 在列表中,假设所有 U 的元素有一个列表,即存在与双射关系: $F:\omega \sim U$ 。

2) $x \in U \leftrightarrow P(x)$,—— $x \in U$ 等价一个谓词 $P(x)$ " x 在列表中",即:存在双射关系: $F:\omega \sim U$ 。

3) $x \in U \leftrightarrow \neg P(T)$,——对角线方法构造一个新元素 T , T 与 U 中所有元素都不同。

4) $P(x) \leftrightarrow \neg P(T)$,——(2)(3)。

5)假设 $T \in U$ ——问 $T \in U$ 吗? 假设 $T \in U$ 成立,那么存在某个 x , $x = T$ 。

6) $P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$,——(5)代入,得到矛盾。

根据"广义 U 外不动项定理"的形式: P 、T 在 U 上可定义, $T \in U \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ 。

" P 、T 在 U 上可定义",即" U 上元素上可列表",即双射关系 $F:\omega \sim U$ 成立。

"对角线证明方法"可以简化为

$(F:\omega \sim U) \wedge (T \in U) \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ 。

注记 8　"对角线证明方法"的二元谓词表示法

设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\} = \{x \mid P(x)\}$, $P(x_i)$ 表示谓词表中的第 i 个元素。

表中的第 i 个元素 x_i 的第 n 项记为 $P(x_i, n)$,可以把按对角线方法排列如下:

$P(x_1,1), P(x_1,2), P(x_1,3), P(x_1,4), \cdots$

$P(x_2,1), P(x_2,2), P(x_2,3), P(x_2,4), \cdots$

$P(x_3,1), P(x_3,2), P(x_3,3), P(x_3,4), \cdots$

$P(x_4,1), P(x_4,2), P(x_4,3), P(x_4,4), \cdots$

$\cdots$

定义一个新的项 T ,满足 T 的第 n 项,不同于 x_n 的第 n 项,

即: $P(T,n) \leftrightarrow \neg P(x_n, n)$,

问 $T \in U$ 吗? 假设 $T \in U$ 成立,那么存在某个 x_k , $x_k = T$,

即: $P(x_k, k) \leftrightarrow \neg P(x_k, k)$ 或

$P(T,k) \leftrightarrow \neg P(T,k)$ 矛盾,所以, $T \notin U$ 。

对角线方法使用全集(补集合为空集非对称分类方法),所有"对角线方法"都是一个类型,它们都是"广义 U 外不动项定理" 的特例。所以,"Cantor 对角线方法"构造的实数也是"广义 U 外不动项定理"的特例。

推论 5　如果实数集 $\mathbf{R}$ 上的演算是一致的,那么,"康托的对角线方法"所构造的项 T 满足: $(F:\omega \sim R) \wedge (T \in R) \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ 。

定理 21　"对角线证明方法"的 3 个结论

设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$,如果 U 内演算是一致的,"对角线证明方法"可以得到以下 3 个结论:

(A) $\vdash (F:\omega \sim U) \wedge \neg (T \in U)$;

(B) $\vdash \neg (F:\omega \sim U) \wedge T \in U$;

(C) $\vdash \neg (F:\omega \sim U) \wedge \neg (T \in U)$ 。

证明　在以上"广义 U 外不动项定理"中假设 $+\alpha = U$,则

$$-\alpha = \varnothing$$

$$+\alpha = \{x \mid P(x)\}$$

$$F:\omega \sim U, T \in U \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$$

$$\vdash \neg [(F:\omega \sim U) \wedge (T \in U)] \tag{1}$$

由于 $\neg (M \wedge N) \leftrightarrow$

$(M \wedge \neg N) \vee (\neg M \wedge N) \vee (\neg M \wedge \neg N)$

由式(1)可以得到以下 3 个结论:

(A) $F:\omega \sim U \vdash \neg (T \in U)$,表示如果双射关系成立,那么 $T \notin U$;即

$\vdash (F:\omega \sim U) \wedge \neg (T \in U)$

(B) $T \in U \vdash \neg (F:\omega \sim U)$,表示如果 $T \in U$ 成立,那么 双射关系不成立;即

$\vdash \neg (F:\omega \sim U) \wedge (T \in U)$

(C) $\vdash \neg (F:\omega \sim U) \wedge \neg (T \in U)$,表示 $T \in U$, 双射关系都不成立。

注记 9　Cantor 的断定

在"对角线证明方法"A、B、C 3 个结论中,如果 $T \in U$ 成立,那么, 双射关系 $F:\omega \sim U$ 一定不成立,这就是 Cantor 的断定,即 B 结论正确;

另外一种情况是:如果 $T \notin U$,那么,双射关系 $F:\omega \sim U$ 可能成立,也可能不成立,即:A、C 都可能正确,这说明矛盾 $P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ 和双射关系 $F:\omega \sim U$ 无关,矛盾是由 $T \in U$ 引起的。

下面的证明表明:矛盾恰恰是由 $T \in U$ 引起的, Cantor 的断定是错误的。

定理 22　不动项矛盾与双射关系无关

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$，如果 U 内演算是一致的，则 Cantor“对角线证明方法” $F:\omega\sim U$，$T\in U\vdash P(T)\leftrightarrow\neg P(T)$，不动项矛盾的存在与双射关系：$F:\omega\sim U$ 无关。

即：(A) $\vdash(F:\omega\sim U)\wedge\neg(T\in U)$，或者，(C) $\vdash\neg(F:\omega\sim U)\wedge\neg(T\in U)$。

证明 只要否定“结论(B) $\vdash\neg(F:\omega\sim U)\wedge T\in U$”即可，用反证法，只要举出一个反例即可，取 $U=J$ 整数集合。

1) 假设 $U=J=\{x\mid P(x)\}$，$P(x)$ 表示 x 是整数，假设所有 J 的元素有一个列表，即：存在与双射关系：$F:\omega\sim J$。

2) $x\in J\leftrightarrow P(x)$，$x\in J$ 等价一个谓词 $P(x)$“x 在列表中”，即存在双射关系：$F:\omega\sim J$。

3) $x\in J\leftrightarrow\neg P(T)$，对角线方法构造一个新元素 T，T 与 J 中所有元素都不同，

把 $U=J$ 分成偶数集合与奇数集合：

$$+\alpha=\{x\mid x=2n,n\in J\}$$

$$-\alpha=\{x\mid x=1-2n,n\in J\}$$

$x\in J$，即：$x\in+\alpha$，或者 $x\in-\alpha$ 定义一个新数 $x\in+\alpha\Leftrightarrow T=1-x$，$x\in-\alpha\Leftrightarrow T=1-x$，$x\in J\Leftrightarrow T=1-x$ 等价 $x\in J\Leftrightarrow T\notin J$，即：$x\in J\leftrightarrow\neg P(T)$。

4) $P(x)\leftrightarrow\neg P(T)$，——(2)(3)，

5) 假设 $T\in J$——问 $T\in J$ 吗？假设 $T\in J$ 成立，那么存在某个 x，$x=T$。

6) $P(T)\leftrightarrow\neg P(T)$，——(5)代入，得到矛盾，

$x\in J\Leftrightarrow T=1-x$，$T\in J\Leftrightarrow T=1-T$。

7) $F:\omega\sim J$，$T\in J\vdash$

$P(T)\leftrightarrow\neg P(T)$ ——(1)(5)(6)。

由于 $T=1-T$，$T=\frac{1}{2}$，即：$T\in J$ 不正确。

所以：A) $\vdash(F:\omega\sim U)\wedge\neg(T\in U)$，或者，C) $\vdash\neg(F:\omega\sim U)\wedge\neg(T\in U)$ 成立。

即：不动项矛盾的存在与双射关系：$F:\omega\sim U$ 无关。

根据不动项的性质，以下推论都成立：

推论 6 如果集 U 上的演算是一致的，“对角线方法构造项 T”一定在 U 外，$T\notin U$。

推论 7 如果集 U 上的演算是一致的，“对角线方法构造项 T”是未定义项。

推论 8 如果集 U 上的演算是一致的，“对角线方法构造项 T”，$P(T)$ 是不可判定命题。

推论 9 如果集 U 上的演算是一致的，“对角线方法构造项 T”，$P(T)$ 的不可判定与 U 内项是否可以判定无关。

推论 10 如果集 U 上的演算是一致的，“对角线方法构造项 T”，$P(T)\leftrightarrow\neg P(T)$ 矛盾来源于 U 外。

推论 11 如果集 U 上的演算是一致的，“对角线方法构造项 T”不能作为任何“U 内演算的推理依据”。

推论 12 如果集 U 上的演算是一致的，那么，满足对角线方法的构造项 T，断定 $T\in U$ 的所有“对角线方法”证明错误。

注记 10 广义域外不动项定理解释

1) 在以上定理证明过程中，根据“反证法的使用规则”，把 $x_P\in U$ 看成假设时，可以使用“反证法”进行推理，只能得出 $x_P\notin U$；把 $x_P\in U$ 看成真命题时，使用“反证法”是错误的。

2)“U 外不动项定理”与“广义 U 外不动项定理”都是用二分法把全集 U 分成两类性质集合，命题 P 是关于 U 的一个划分，$U=+\alpha\cup-\alpha$，即：$+\alpha=\{x\mid P(x)\}$，$-\alpha=\{x\mid\neg P(x)\}$。

3)“U 外不动项定理”与“广义 U 外不动项定理”的本质是：一个 U 中已经定义的项与其否定项不能自指代。如果自指代，就会变异成一个新项“T”，这个新项“T”不再是 U 的元素，即：$T\notin U$。

4)“U 外不动项定理”与“广义 U 外不动项定理”的区别是：“U 外不动项定理”要求 $+\alpha$，$-\alpha$ 之间存在双射关系，即：$f:+\alpha\sim-\alpha$；“广义 U 外不动项定理”没有这个要求。

5)“Cantor 对角线方法”可以看成是 U 上的一个特殊的分类。从“U 外不动项定理”的分类看，使用自然数标号与它对应的第 n 项分类，这个分类恰与双射关系 $U\sim\omega$ 联系在一起；从“广义 U 外不动项定理”的分类看，$+\alpha=R$，$-\alpha=\varnothing$，所构造的项 T 不同于 R 中的每一个数，$T\notin R$，这个分类可以不涉及双射关系 $U\sim\omega$。

5.3 无穷集合幂集合不可数证明错误

还可以举出一个具体的例子：

例 4 有理数集合上的对角线方法

假设在没有发现无理数之前，不知道有无理数，只知道所有的数都为有理数。按照 Cantor 对角线方法，同样可以证明：有理数集合是不可数的。

假设把有理数区间[0,1]里的所有数按照某种顺序排列起来，那么总能找到至少一个 0 到 1 之间的有理数不在列表里。把列表上的数全写成 0 到 1 之间的小数：

$$a_1=0.0143634628\cdots$$

$$a_2=0.3794907237\cdots$$

$$a_3=0.2334343423\cdots$$

$$a_4=0.0005948211\cdots$$

$$a_5=0.9590129145\cdots$$

$$\cdots$$

那么就构造这么一个小数 T，小数点后第 1 位

不等于 a_1 的第 1 位，小数点后第 2 位不等于 a_2 的第 2 位，总之小数点后第 i 位不等于 a_i 的第 i 位。这个数属于有理数区间[0,1]，但它显然不在你的列表里。这样，就证明了有理数集合是不可数的。

也许你会说，你构造的这个数 T 已经不是有理数，是一个和有理数具有不同性质的新的数。当然，现在知道有理数外还有无理数，即 $(T \notin Q)$。

即 ω 是自然数集合，Q 全体正有理数集合，假设双射关系 $F:\omega \sim Q$ 成立。

按照对角线方法，同样可以找到一个数 T，导致矛盾 $P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$，($P(T)$ 表示数 T 在列表中)。

即 $(F:\omega \sim Q),(T \in Q) \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$，

$(F:\omega \sim Q) \vdash (T \notin Q)$，即否定了 $(T \in Q)$。

在证明实数不可数时，ω 是自然数集合，R 为全体实数集合，假设双射关系 $F:\omega \sim R$ 成立，按照对角线方法，同样可以找到一个数 T_R，导致矛盾 $P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$，($P(T_R)$ 表示数 T_R 在列表中)。即

$(F:\omega \sim R),(T_R \in R) \vdash P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$

$(T_R \in R) \vdash \neg (F:\omega \sim R)$，否定了双射关系 $F:\omega \sim R$。

对比这 2 个推理过程：

$$(F:\omega \sim Q),(T \in Q) \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T) \tag{1}$$

$$(F:\omega \sim R),(T_R \in R) \vdash P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R) \tag{2}$$

在前一个矛盾(1)中否定了 $T \in Q$，没有否定 $F:\omega \sim Q$；而后一个矛盾(2)中却否定了 $F:\omega \sim R$，而没有否定 $T_R \in R$。

对角线证明方法具有统一的形式，矛盾只能有一个统一的产生根源，实际上，前一个否定是正确的，后一个否定是错误的。

即矛盾是由 $T_R \in R$ 引起的，并不是双射关系 $F:\omega \sim R$ 产生的，这说明“如果实数域演算是一致的，那么 $T_R \notin R$。

例 5　有理数集合上的域外不动项

U 为全体正有理数集合 $U = Q$，假设双射关系 $F:\omega \sim Q$ 成立，ω 是自然数集合，Q 为全体正有理数集合。

假设在 $F:\omega \sim Q$ 中，任意 $n \in \omega$ 对应一个 $F(n) \in Q$，即：$n \in \omega \leftrightarrow F(n) \in Q$。

把 $U = Q$ 分成正反集合，

正集：平方大于 2 的有理数集合，即：$+\alpha = \{x \mid x^2 > 2, x \in Q\}$。

反集：平方小于 2 的有理数集合，即：$-\alpha = \{x \mid x^2 < 2, x \in Q\}$。

$F(n) \in +\alpha$，或者 $F(n) \in -\alpha$；

定义一个新数 $F(n) \in +\alpha \Leftrightarrow T = \dfrac{2}{F(n)}$，$F(n) \in -\alpha \Leftrightarrow T = \dfrac{2}{F(n)}$；

因为 $F:\omega \sim Q$ 成立，

所以，存在 $k \in \omega \leftrightarrow F(k) \in Q$；

按规定 $F(k) \in +\alpha \Leftrightarrow T = \dfrac{2}{F(k)}$，

$F(k) \in -\alpha \Leftrightarrow T = \dfrac{2}{F(k)}$；

自指代，让 $T = F(k)$，$T = \dfrac{2}{T}$，T 平方大于 2$\leftrightarrow$ T 平方小于 2。

产生悖论，不可判定命题 $P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$。

由于这个矛盾的产生，就责怪双射关系 $F:\omega \sim Q$ 不能成立，这显然是错误的。其实，$T = \dfrac{2}{T}$，$T = \sqrt{2}$，$\sqrt{2}$ 是 U 外不动项。

例 6　实数集合上的域外不动项

仿照 Cantor 的对角线方法，U 为不为 0 的全体实数集合 $U = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，

假设双射关系 $F:\omega \sim U$ 成立，ω 是自然数集合。

假设在 $F:\omega \sim U$ 中，任意 $n \in \omega$ 对应一个 $F(n) \in U$，即：$n \in \omega \leftrightarrow F(n) \in U$。

把 U 分成正数集合与负数集合：

$$+\alpha = \{x \mid x > 0, x \in U\} = (0, +\infty)$$

$$-\alpha = \{x \mid x < 0, x \in U\} = (-\infty, 0)$$

$$F(n) \in +\alpha，或者\ F(n) \in -\alpha$$

定义一个新数 $F(n) \in +\alpha \Leftrightarrow T = -\dfrac{1}{F(n)}$，

$F(n) \in -\alpha \Leftrightarrow T = -\dfrac{1}{F(n)}$；

因为 $F:\omega \sim U$ 成立，所以，存在：

$$k \in \omega \leftrightarrow F(k) \in U$$

按规定 $F(k) \in +\alpha \Leftrightarrow T = -\dfrac{1}{F(k)}$，$F(k) \in -\alpha \Leftrightarrow T = -\dfrac{1}{F(k)}$；

自指代 $T = F(k)$，$T = -\dfrac{1}{T}$，T 是正数 $\leftrightarrow$ T 是负数；

产生悖论，不可判定命题 $P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$。

由于这个矛盾的产生，就责怪双射关系 $F:\omega \sim U$ 不能成立，这显然是错误的。其实，$T = -\dfrac{1}{T}$，$T = \sqrt{-1}$，$\sqrt{-1}$ 是 U 外不动项。

以上证明表明，即使一一对应关系成立，矛盾仍然存在，Cantor 的对角线方法也是一样，以下将证明：产生矛盾的根源是不动项 $x_P \in U$，而不是那个假设的双射关系。在以上 Cantor 证明的 3 个关系，可以总结如下：

1) $(F:M \sim PM) \wedge (T_M \in PM) \vdash P(T_M) \leftrightarrow \neg P(T_M)$；

2) $(F:\omega \sim P(\omega)) \wedge (T_\omega \in P(\omega)) \vdash P(T_\omega) \leftrightarrow \neg P(T_\omega)$；

3) $(F:\omega \sim R) \wedge (T_R \in R) \vdash P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$。

在以上 Cantor 证明的 3 个关系中，Cantor 误认为 $T_M \in PM$，$T_\omega \in P(\omega)$，$T_R \in R$ 都是真命题，这样他误认为证明了以下 3 个命题：

4) $(F:M \sim PM) \vdash P(T_M) \leftrightarrow \neg P(T_M)$；

5) $(F:\omega \sim P(\omega)) \vdash P(T_\omega) \leftrightarrow \neg P(T_\omega)$；

6) $(F:\omega \sim R) \vdash P(T_R) \leftrightarrow \neg P(T_R)$。

进而把矛盾产生的根源当成“假设双射关系”引起的，所以，否定双射关系，得到以下结论：

7) $\vdash \neg (F:M \sim PM)$，即无穷集合不能与它的幂集合建立一一对应关系；

8) $\vdash \neg (F:\omega \sim P(\omega))$，即自然数集合不能与它的幂集合建立一一对应关系；

9) $\vdash \neg (F:\omega \sim R)$，即自然数集合不能与实数集合建立一一对应关系。

产生矛盾的根源 Cantor 误认为是 $(F:M \sim PM)$，$(F:\omega \sim P(\omega))$，$(F:\omega \sim R)$ 引起的。

所以，Cantor 证明的 3 个关系 $\vdash \neg (F:M \sim PM)$，$\vdash \neg (F:\omega \sim P(\omega))$，$\vdash \neg (F:\omega \sim R)$ 都是错误的。

使用正反集合分析，以上证明满足正反集合的条件，正反集合上的不动项，都是 U 外不动项，产生矛盾的根源实际上是 $T_M \in PM$，$T_\omega \in P(\omega)$，$T_R \in R$ 引起的。所以，在以上推理中，Cantor 实际上只证明了以下 3 个关系：

10) $(F:M \sim PM) \vdash \neg (T_M \in PM)$；

11) $(F:\omega \sim P(\omega)) \vdash \neg (T_\omega \in P(\omega))$；

12) $(F:\omega \sim R) \vdash \neg (T_R \in R)$。

由以上分析可以得到以下推论：

推论 13 如果无穷集合演算是一致的，则 $(F:M \sim PM) \vdash \neg (T_M \in PM)$，即：双射关系 $F:M \sim PM$ 仍然可能成立，无穷集合的幂集合可能是可数集合。

推论 14 如果自然数集合演算是一致的，则 $(F:\omega \sim P(\omega)) \vdash \neg (T_\omega \in P(\omega))$，即：$(F:\omega \sim P(\omega))$ 仍然可能成立，自然数集合的幂集合可能是可数集合。

推论 15 如果实数集合演算是一致的，则 $(F:\omega \sim R) \vdash \neg (T_R \in R)$，即：双射关系 $F:\omega \sim R$ 仍然可能成立，实数集合可能是可数的。

注记 11 实数不可数”证明错误

1) 不动项命题矛盾的存在，不影响集合之间元素的一一对应关系，所以，Cantor 对角线法关于无穷集合的幂集不可数证明；自然数的幂集不可数证明；实数不可数的证明都是错误。

2) 如果能够构造出实数与自然数的一一映射关系，那么，实数就是一个可数集合，Cantor 没有找到这种一一映射关系，并不代表这种对应关系就不存在。前面的证明中，已经知道，不动项 T_R 是一个 U 外不动项，$e = \{T_R\}$ 它相对于已经定义的集合，是一个未定义项，根据不动项的两种形式，这里意味着，要么，在实数集合之外存在着一种尚未定义、没有构造的新数 T_R；要么 $e = \varnothing$，这个构造数 T_R 根本就不存在。

推论 16 如果无穷集合、自然数集合、实数集合演算是一致的，则 Cantor 关于“无穷集合的幂集不可数，自然数的幂集不可数，实数不可数”等命题的证明是错误。

6 递归论中的一些定理的错误证明

6.1 N 上存在非递归函数证明错误

我们知道，Cantor 使用对角线方法，证明“系统 **N** 是不完全”的 Gödel 定理，自然数的幂集合是不可数集合，实数集合是不可数集合。因为“Cantor 对角线方法”是数学证明中的一个重要方法，与此相关的重要定理还有“存在非递归集合”、“存在非递归函数”、Tuing 机“停机问题”不可判定定理。而对角线方法产生的项是域外不动项，这些定理的证明都是错误的。

定理 23 设全部的一元递归函数集合：

$$U = \{f_0(n), f_1(n), f_2(n), f_3(n), \cdots\}$$

则存在不动项函数 $h(k)$，$h(k) \notin U$。

证明 一元函数集合，定义域、值域都是可数集合：

$$U = \{f_0(n), f_1(n), f_2(n), f_3(n), \cdots\}$$

全部函数的枚举如下：

$f_0(0), f_1(0), f_2(0), f_3(0), \cdots$

$f_0(1), f_1(1), f_2(1), f_3(1), \cdots$

$f_0(2), f_1(2), f_2(2), f_3(2), \cdots$

$f_0(3), f_1(3), f_2(3), f_3(3), \cdots$

$\cdots$

取对角线值的序列，并加 1，改为别的值，$h(n) = f_n(n) + 1$，

假设 $h(n) = f_n(n) + 1$，在这个序列之中，得到如下矛盾，$h(k) = f_k(k) = f_k(k) + 1$。

以上证明是“对角线构造方法”,根据定理,$h(k)$ 是不动项函数,$h(k) \notin U$。

根据以上定理,以下推论成立。

推论 17　不动项函数 $h(k)$ 定在 U 外,$h(k) \notin U$。

推论 18　不动项函数 $h(k)$ 是未定义项。

推论 19　不动项函数 $h(k)$ 是否递归函数,是不可判定命题。

推论 20　不动项函数 $h(k)$ 是否递归函数的不可判定与 U 内项是否可以判定无关。

推论 21　不动项函数 $h(k)$ 矛盾来源于 U 外。

推论 22　不动项函数 $h(k)$ 不能作为任何“U 内演算的推理依据”。

注记 12　ω 上存在非递归函数,是“对角线证明方法”,证明错误。

1)递归函数集合是可数的,考察一元递归函数的一个枚举 $f_0, f_1, f_2, \cdots$,定义一个函数 $g: \omega^2 \to \omega$,$g(m,n) = f_m(n)$,假设 $g(m,n) = f_m(n)$ 是递归的,$h(m) = g(m,m) + 1$, $m \in \omega$ 是递归的,

$h(k) = f_k(k) = g(k,k) + 1 = f_k(k) + 1$,矛盾,所以,$g(m,n) = f_m(n)$ 不是递归函数[3]。

2)不存在一元递归函数的能行可枚举,是“对角线证明方法”。

假设存在一元递归函数的能行可枚举,设 $f_0, f_1, f_2, \cdots$,是所有一元递归函数的能行枚举,考察下列算法:给定 $n \in \omega$,的枚举 $f_0, f_1, f_2, \cdots$,直到找到 f_n,计算 $f_n(n)$

$h(n) = f_n(n) + 1$, $n \in \omega$ 是递归的,

$h(k) = f_k(k) = f_k(k) + 1$,矛盾,所以,不存在一元递归函数的能行可枚举[3]。

3)以下定理是“对角线证明方法”,证明错误:

设 $D(x,y)$ 是一元原始递归函数的通用函数,则 $D(x,y)$ 不是二元原始递归函数。

证明　$D(x,y)$ 是一元原始递归函数的通用函数,所以,全体一元原始递归函数都包含在函数序列 $D(x,0)$, $D(x,1)$, $D(x,2)$, $D(x,3)$, $\cdots$ 中,可以做以下无穷列表:

表 6　跨正反集上的真值表

Table 6　The truth value table for crossing the positive and inverse sets

x	y				
	0	1	2	3	…
0	$D(0,0)$	$D(0,1)$	$D(0,2)$	$D(0,3)$	…
1	$D(1,0)$	$D(1,1)$	$D(1,2)$	$D(1,3)$	…
2	$D(2,0)$	$D(2,1)$	$D(2,2)$	$D(2,3)$	…
3	$D(3,0)$	$D(3,1)$	$D(3,2)$	$D(3,3)$	…
…	…	…	…	…	…

定义一个一元函数 $g(x) = D(x,x) + 1$,如果 $D(x,y)$ 是二元原始递归函数,$g(x)$ 也是一元原始递归函数,设 $g(x) = D(x,n)$,$n \in \omega$ 是递归的,令

$$x = n, g(n) = D(n,n)$$

$g(n) = D(n,n) = D(n,n) + 1$,矛盾,所以,$D(x,y)$ 不是二元原始递归函数[6]。

推论 23　ω 上存在非递归函数的证明错误。

推论 24　不存在一元递归函数的能行可枚举,证明错误。

6.2　Turing 机“停机问题”证明错误

Turing 证明,Turing 机“停机问题”是不可判定的,即:不存在算法对以下问题类提供答案,{Turing 机 T_m 在输入 n 后是否会停机 | $m,n \in N$}。

回顾一下图灵机“停机问题”的证明过程。

按照哥德尔编码,给 Turing 机指定一个编码,按编码的大小,把所有的 Turing 机一个不漏的枚举如下:$T_0, T_1, T_2, \cdots, T_m, \cdots$。

定义一个一元函数:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & T_n \text{ 输入 } n \text{ 后停机;} \\ 1, & T_n \text{ 输入 } n \text{ 后不停机。} \end{cases}$$

Turing 机 T_m 在输入 n 后是否会停机的各种情况排列如表 7(表中的所有情况与二进制表示的实数等价)。

表 7　对角线方法“Turing 停机问题”定义

Table 7　The “Turing halting problem” define table of diagonal metho

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	…
$f(0)$	0	1	0	0	1	…
$f(1)$	0	1	0	1	1	…
$f(2)$	0	1	0	1	0	…
$f(3)$	0	0	0	1	0	…
$f(4)$	1	0	0	1	0	…
…	…	…	…	…	…	…

假设 $f(n)$ 是 Turing 可计算函数,那么存在某个 Turing 机 T 来计算 $f(n)$ 的值,即

对任意 $n \in \omega$,$f(n) = 0 \Leftrightarrow T$ 输入 n 后输出 0;$f(n) = 1 \Leftrightarrow T$ 输入 n 后输出 1。

把上表对角线上的元素挑出来。就可以得到一个序列:0,1,0,1,0,…,而根据这个序列完全可以构造这样一个反序列:1,0,1,0,1,… 利用反序列,构造一个新的 Turing 机 T_g。

T 输入 n 后输出 $1 \Leftrightarrow T_g$ 输入 n 后会停机。

T_g 是一个新的图灵机,T_g 必然出现在 $T_0, T_1, T_2, \cdots, T_m, \cdots$ 中,设 $T_g = T_k$。

T_k 输入 k 后会停机 $\Leftrightarrow T$ 输入 k 后输出 $1 \Leftrightarrow$

$f(k)=1 \Leftrightarrow T_k$ 输入 k 后不停机。

得出矛盾,所以 $f(n)$ 是 Turing 不可计算函数。

即:不存在算法对问题类{ Turing 机 T_m 在输入 n 后是否会停机 $| m,n \in N$ }提供答案[10]。

以上证明,与“自然数幂集合不可数”,“实数不可数”的证明是一样的。通过分析,可以知道,构造的矛盾是不动项矛盾。

定理 24 设 $U=\{T_0,T_1,T_2,\cdots,T_m,\cdots\}$,Turing 机 T_g 是不动项。

证明 P 是定义在 U 上的一个性质,命题 P 是关于正集 $+\alpha$ 、反集 $-\alpha$ 的一个二项划分,

$P(T_n) \Leftrightarrow T_n$ 在输入 n 后会停机;

$\neg P(T_n) \Leftrightarrow T_n$ 在输入 n 后不会停机。

即 $+\alpha=\{T_n | P(T_n), T_n \in U\}$,

$-\alpha=\{T_n | \neg P(T_n), T_n \in U\}$;

建立映射关系:

$$x \in +\alpha \leftrightarrow y \in -\alpha$$

$$y=f(x)$$

$$P(x) \leftrightarrow \neg P(y)$$

当 x_P 满足 $x=f(x)$, $P(x_P) \leftrightarrow \neg P(x_P)$, x_P 是不动项。

以上构造的 T_g 满足 $P(T_g) \leftrightarrow \neg P(T_g)$,即: T_g 是不动项,证毕。

还可以从“广义 U 外不动项定理”考虑:

构造项 T_g 满足以下关系, $x \in +\alpha \leftrightarrow \neg P(T_g)$, $x \in -\alpha \leftrightarrow P(T_g)$;

根据“广义 U 外不动项定理”,Turing 机 T_g 是不动项。

也可以从以下构造的二元项考虑:

$$\begin{aligned} U=\{&(T_0,1),(T_1,1),(T_2,1),\cdots,(T_m,1),\cdots \\ &(T_0,2),(T_1,2),(T_2,2),\cdots,(T_m,2),\cdots \\ &\cdots \\ &(T_0,n),(T_1,n),(T_2,n),\cdots,(T_m,n),\cdots \\ &\cdots\} \end{aligned}$$

U 是所有 Turing 机对所有输入后的状态,这些状态可分为正反两个集合。

$P(T_n,n) \Leftrightarrow T_n$ 在输入 n 后会停机,

$\neg P(T_n,n) \Leftrightarrow T_n$ 在输入 n 后不会停机。

$P(T_g,k) \leftrightarrow \neg P(T_g,k)$, (T_g,k) 是不动项。

根据 U 外不动项的一般性质,以下推论成立:

推论 25 Turing 机不动项 T_g 一定在 U 外, $T_g \notin U$。

推论 26 Turing 机 T_g 是未定义项。

推论 27 Turing 机 T_g 是不可判定命题。

推论 28 Turing 机 T_g 的不可判定与 U 内项是否可以判定无关。

推论 29 Turing 机 T_g 矛盾来源于 U 外。

推论 30 Turing 机 T_g 不能作为任何“ U 内演算的推理依据”。

根据以上推论,Turing 机 T_g 的不可判定与 U 内项是否可以判定无关, T_g 不能作为任何“ U 内演算的推理依据”,即: T_g 矛盾使用“反证法”不成立。故 Turing 机“停机问题”不可判定证明是错误的。

6.3 一批错误结论及其根源

我们知道经典逻辑定理只能在一个封闭的域上使用,由于 U 外不动项矛盾的存在,“反证法”不能无限制使用。

如果命题 P , $P(x_i)$ 是系统 L^α 或 K^α 的一个推论,即 $L^\alpha \vdash P$, $K^\alpha \vdash P(x_i)$,这个推理只有在一个已经定义的集合 $U=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$ 上成立,我们不能忘记它成立的前提 $x_i \in U$ 。

任何一个推理都存在一个已经定义集合:

$$U=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$$

在这个集合中使用自指代运算产生悖论是必然的,即 $M \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ 。

这个悖论不足以否定这个集合内的任何前提,即不能得到 $\vdash \neg M$ 。

这个悖论只能得到“ U 上的演算不是封闭的”,即 $\vdash T \notin U$ 。

之所以会产生如此“反证法”错误,因为“项 T ”原来在 U 中并没有出现,是在自指代运算中不知不觉就跑出了 U 的范围,特别是一些高度抽象的项(命题项、函数项),从表面上不能鉴别它是否在 U 中,只能通过逻辑推理来判断,当“项 T ”在演算中跑出了 U 的范围,经典逻辑的定理“反证法”就不成立了,“悖论证明方法、对角线证明方法”就是这种错误。

从经典逻辑封闭性要求看,如果写成:

“ $T \in U$, $M \vdash P(T) \leftrightarrow \neg P(T)$ ”;

从而得到:“ $M \vdash \neg (T \in U)$ ”,“反证法”依然正确。

但是,由于“项 T ”事先并不存在,很难开始就在前提中加入这个条件。

由于经典逻辑的缺陷,Russell、Cantor、Gödel,Turing 实际上发现了 U 外不一致性,发现了 U 外矛盾不动项,即构造了一个悖论,但是他们没有认识到,他们误以为悖论可以用于“反证法”,证明了“实数不可数”,“不完全定理”,“停机问题不可判定”。

“不动项定理”表明,形形色色排除悖论的努力都是徒劳的,只要有“自指代”,就可能产生悖论。命题逻辑系统 L,谓词演算系统 K,只要使用“自指

代”,同样会有悖论,集合论 ZF 系统中也没有禁止“自指代”,ZF 系统根本防止不了悖论,同样会产生悖论。

“不动项定理”表明,解释清晰后的“悖论”,不但无害,反而有益。无害是因为,悖论是 U 外项命题,不会对原有的集合 U 上的演算产生破坏;有益是因为,悖论命题是 U 外的一种未定义命题,可能是 U 外的一种新知,这给科学发现指明了一种探求方向。

“不动项定理”还表明,经典逻辑只适用于已经定义的集合,不动项矛盾(悖论)不能作为“反证法”在已定义的集合上的推理依据。可以检查一下,以往的数学证明中,哪些“反证法”证明使用了不动项矛盾,这些证明都是错误的,这里我检查了一些证明,把一些错误的证明结果列表如下:

1)(Gödel 不完全定理)如果系统 N 是 ω 一致的,那么,存在公式 μ 不是 N 的定理,且 $\neg\mu$ 也不是 N 的定理。即:系统 N 是不完全的[2]。

2)任何充分丰富一致的系统,如果系统公理的哥德尔数集合是递归集合,那么它是不完全的。特别地,如果 ZF 一致的,那么它是不完全的[2]。

3)停机问题是不可判定的,即:不存在算法对以下问题类提供答案:

$\{$Turing 机 T_m 在输入 n 后是否会停机 $\mid m,n \in N\}$[2]。

4)不存在所有单变元递归函数的能行枚举[2]。

5)自然数集合上存在非递归集合。

6)自然数集合上存在非递归函数。

7)自然数集合上存在半递归谓词(存在递归可枚举集合)。

8)(Cantor 定理)如果 PM 为 M 的幂集,且 $M \sim PM$,则存在 T,$T \subseteq M$,且 $T \notin PM$。无穷集合的幂集不可数[3]。

9)自然数集合与它的幂集合不可能建立一一映射关系。即:自然数集合的幂集不可数[3]。

10)自然数集合与实数集合不可能建立一一映射关系。即:实数集合不可数[3]。

11)对任何集合 M,$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{PM}}$(任何集合的基数小于其幂集的基数)。即:超穷数存在,层次无穷存在[3];

12)(Cantor 连续统假设)在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间不存在任何基数。

13)(Gödel-Rosser 定理)N 的任何递归无矛盾扩张 N^* 都不完备。即:如果 N^* 是系统 N 一致的扩充,并且 N^* 系统公理的哥德尔数集合是递归集合,那么 N^* 是不完全的[4]。

14)设从 N 可证的公式 Gödel 数全体构成的集合记为 $TH = \{g(P) \mid N \vdash P\}$,若 N 无矛盾,则 TH 是非递归集合[4]。

15)所有 N 中的恒真公式 Gödel 数全体构成的集合记为 $TR = \{g(P) \mid |P|_N = 1\}$,则 TR 是非递归集合[4]。

16)(Tarski 定理)TR 不是算术集合[4]。

…

《数理逻辑》中以此定理为基础的演绎理论都是错误的。

除此以外,以往的数学证明中,还存在大量“反证法”证明使用了不动项矛盾,或者使用对角线证明方法。这值得认真梳理与清理,这将包括哲学、递归论、模型论、证明论、计算机理论、实变函数论等众多科学领域,也许,大家难以相信,这些证明都是错误的。

注　论文(Ⅰ)、(Ⅱ)有大量省略,原稿有更详细论证,需要请与作者联系。

参考文献:

[1]陈汝栋. 不动点理论及应用[M].北京:国防工业出版社,2012:1-4.
[2]戴牧民,陈海燕.公理集合论导引[M].北京:科学出版社,2011:15-17.
[3]张金成. 容纳矛盾的逻辑系统与悖论[J]. 系统智能学报,2012,7(3):208-209.
[4]HAMILTON A G. Logic for Mathematicians[D]. Cambridge: University of Cambridge, 1978:29-40,82-92.
[5]李未.数理逻辑[M].北京:科学出版社,2008:105-110.
[6]张立昂.可计算性与计算的复杂性[M].北京:北京大学出版社,2011:80-85.
[7]克林 S C. 元数学导论[M]. 莫绍揆,译.北京:科学出版社,1984:4-12.
[8]何华灿. 泛逻辑学原理[M].北京:科学出版社,2001:1-15.
[9]Boolos. 可计算性与数理逻辑[M]. 北京: 电子工业出版社,2002:152-160.
[10]汪芳庭.数理逻辑[M]. 北京:科学出版社,2001:159-163.

作者简介:

张金成,男,1966 年生,主要研究方向为悖论、数理逻辑、数学基础、可计算理论,发表学术论文 13 篇。