第 9 卷第 4 期　　智 能 系 统 学 报　　Vol.9 №.4
2014 年 8 月　　CAAI Transactions on Intelligent Systems　　Agu. 2014

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201308047
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3969/j.issn.1673-4785.201308047.html

投资组合优化的可行性规则人工蜂群算法

刘永波
(泸州职业技术学院 信息工程系,四川 泸州 646005)

摘　要:给出含交易费用和投资者风险偏好的最佳证券投资组合约束优化模型,并应用人工蜂群算法(ABC)求解该问题。应用可行性规则处理优化问题的约束条件,形成可行性规则人工蜂群算法(FRABC)。应用 Markov 链理论证明 FRABC 算法为全局收敛算法。给出了证券投资组合优化仿真实例。实验结果表明,FRABC 算法可行有效,且寻优结果优于自适应遗传算法。在相同计算开销的条件下,FRABC 算法的各项性能指标也明显好于遗传算法、粒子群算法及基本人工蜂群算法等对比算法。

关键词:投资组合;约束优化;人工蜂群算法;可行性规则;Markov 链
中图分类号: TP301.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-4785(2014)04-491-08

中文引用格式:刘永波. 投资组合优化的可行性规则人工蜂群算法[J]. 智能系统学报, 2014, 9(2): 491-498.
英文引用格式:**LIU Yongbo. An artificial bee colony algorithm with the feasibility rule for portfolio investment optimizations[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems**, 2014, 9(2): 491-498.

An artificial bee colony algorithm with the feasibility rule for portfolio investment optimizations

LIU Yongbo
(Department of Information Engineering, Luzhou Vocational and Technical College, Luzhou 646005, China)

Abstract: This current work was carried out to approach the portfolio investment optimization problem by using an artificial bee colony (ABC) algorithm, in order to provide references for related researches. A constrained optimization model was constructed to formulate the portfolio investment optimization problem concerning securities subject to transaction fees and risk preferences of investors. This study employs feasibility rules to handle the constrained conditions of the optimization problem and forms an ABC algorithm with the feasibility rule (FRABC). It has been concluded by means of the Markov chain theory that the developed FRABC algorithm is globally convergent. A realistic case of the portfolio investment optimization is given to show that this method is valid and feasible, and the results are better than the ones obtained by the adaptive genetic algorithm (AGA). The proposed FRABC algorithm performs better, in terms of the final results, than the compared algorithms such as the genetic algorithm, particle swarm optimization algorithm and the basic ABC algorithm with the feasibility rule, under the assumed condition that the computational costs for the two algorithms are the same.

Keywords: portfolio investment; constrained optimization; artificial bee colony algorithm; feasibility rule; Markov chain

证券投资是证券市场运行环节中的重要组成部分,而证券组合理论又是最重要的证券投资理论之一,著名学者 Markowitz 建立了求解最佳证券投资组合的解析模型。由于最佳证券组合的求解实际上属于一类组合优化问题,通常归结为二次规划模型[1-2],是一类典型的带约束 NP-hard 问题。可运用运筹学中的非线性规划法求解这类问题,但其求解过程往往十分复杂,而且对求解者的数学理论基础

收稿日期:2013-08-29.　**网络出版日期**:2014-06-21.
通信作者:刘永波.E-mail: yongbo_liu@ 126.com.

有较高要求[3-4]。

为了避免繁琐的数学规划求解,已有许多学者应用智能算法求解证券组合优化问题。张伟等[1]应用二进制编码遗传算法(genetic algorithm, GA)求解该问题,具有简洁、直观的优势,但效率不够高;何洋林等[2]应用整数编码自适应遗传算法(adaptive GA, AGA)求解该问题,提高了求解效率;Soleimani等[3]应用GA求解含最大、最小交易量约束的投资组合优化模型;夏梦雨等[4]则应用粒子群算法(particle swarm optimization, PSO)求解该问题;刘晓峰等[5]应用PSO求解允许卖空证券投资和不允许卖空证券投资2种情形下的优化模型;刘衍民等[6]应用具有约束处理机制的PSO求解自融资投资组合优化模型;李磊等[7]应用2种版本的文化算法(cultural algorithm, CA)求解此模型;江家宝等[8]以最大化个人经济效益或最大化周期结束时个人财富为目标,建立多阶段投资组合优化模型,再应用差分进化算法(differential evolution, DE)求解该问题。最近,有学者应用混合智能算法求解这类问题。李国成等[9]提出基于混沌搜索、PSO和引力搜索算法的混合元启发式搜索算法,并应用该算法求解基数约束投资组合问题;Lwin等[10]提出融合种群增量学习和DE的混合算法,再应用此方法求解约束投资组合模型。近年来,还有学者应用多目标进化算法(multiobjective evolutionary algorithm, MOEA)[11]求解投资组合优化问题。比如,Branke等[12]应用基于包络的MOEA求解组合投资问题的Pareto最优解。

由于人工蜂群算法(artificial bee colony algorithm, ABC)[13-15]具有良好的寻优性能,近年来受到广泛关注,故本文探索应用ABC算法求解证券组合优化问题。在引入约束优化问题可行性规则的基础上,提出面向证券组合优化问题的可行性规则人工蜂群算法(ABC algorithm with the feasibility rule, FRABC)。文中分析了FRABC算法的计算复杂度和全局收敛性。最后,给出数值实例,通过分析可知:FRABC算法的全局最优解好于AGA。同时,还与GA、PSO算法和基本ABC算法(basic ABC algorithm, BABC)进行对比实验,测试结果表明,FRABC算法具有良好稳健性,且性能指标优于4种对比算法。

1 投资组合优化数学模型

文献[3]提出了基于我国证券市场现状的含交易费用的改进资产分配优化模型,简要描述如下。

设投资者可购买的证券集合为$\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$,其中n为证券种数;证券$s_i(i=1,2,\cdots,n)$的收益率为r_i(随机变量),其期望收益率为$R_i=E(r_i)$,$\sigma_{ij}=\mathrm{cov}(r_i,r_j)$为随机变量$r_i$和$r_j$的协方差($i, j=1,2,\cdots,n$)。若允许的最小和最大投资金额分别为$C_1$和$C_2$,则投资金额$C\in[C_1,C_2]$。证券通常是以最小交易量“手”为基本单位买入和卖出的,设1手$=Z$股($Z\in Z^+$)。若证券s_i的现时报价为p_i元/股,交易量为x_i手($x_i\in N$),其投资组合向量为$\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm{T}}$,则总投资金额为$C(x)=Z\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$。于是证券$s_i$的投资比例为$\mu_i=Zx_ip_i/C(x)$,投资组合$x$的资金权重向量为$\boldsymbol{\mu}=[\mu_1\ \ \mu_2\ \ \cdots\ \ \mu_n]^{\mathrm{T}}$。

通常假设交易费用函数是投资金额的固定比例函数,即总交易费用为$\sum_{i=1}^{n}\xi_i|\mu_i-\mu_{0,i}|$,其中$\boldsymbol{\mu}_0=[\mu_{0,1}\ \ \mu_{0,2}\ \ \cdots\ \ \mu_{0,n}]^{\mathrm{T}}$为投资者拥有的初始资金权重向量,$\xi_i$为证券$s_i$交易费用占交易金额的固定比例。目前,我国证券市场的交易费用由印花税和佣金组成(基本忽略过户费等其他费用),设印花税、佣金占交易金额的比例分别为ξ_{1i}和ξ_{2i}。但佣金有最低额度要求,设最低为$c_{\min i}$元,则证券s_i的佣金为$\max\{c_{\min i},\ \xi_{2i}Zx_ip_i\}$元。当$\boldsymbol{\mu}_0=0$时,投资组合$x$的预期净收益率为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}R_i\mu_i-\sum_{i=1}^{n}\xi_{1i}\mu_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}\max\{c_{\min i},\xi_{2i}Zx_ip_i\}}{C(x)}\tag{1}$$

投资组合x的风险为

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\mu_i\mu_j\tag{2}$$

投资者期望收益率高且风险小,因此,计入交易费用的加权优化模型为

$$\max F(x)=wf(x)-(1-w)g(x)\tag{3}$$

$$\text{s.t.}\quad g_1(x)=C_1-Z\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\leqslant 0\tag{4}$$

$$g_2(x)=Z\sum_{i=1}^{n}x_ip_i-C_2\leqslant 0\tag{5}$$

式中:x_i为整数,$0\leqslant x_i\leqslant\bar{x}_i$,$i=1,2,\cdots,n$;$w\in[0,1]$,为投资者的风险偏好因子。$w$的取值越大,表示投资者敢于承担的风险越高;反之,表示投资者敢于承担的风险越小,其投资趋于保守。$\bar{x}_i$为允许投资证券s_i的最大手数。

2 约束优化的人工蜂群算法

2.1 二级标题约束优化的可行性规则

对于最大化问题式(3),具有总投资金额区间约束条件式(4)和式(5),属于约束优化问题,其求解难点在于如何处理约束条件[6]。本文采用可行

性规则处理该约束条件，首先引入比较 2 个候选解的可行性规则[16]：

规则 1　若 2 个候选解都是可行解，则目标函数值大的获胜。

规则 2　若 2 个候选解都是不可行解，则约束违反度小的获胜。

规则 3　若一个是可行解而另一个是不可行解，则可行解获胜。

在规则 2 中，需要应用候选解的约束违反度比较 2 个不可行解。本文将候选解 x 的约束违反度定义为

$$G(x) = \max\{0,\ g_1(x)\} + \max\{0,\ g_2(x)\} \quad (6)$$

显然，当 x 为可行解时，有 $G(x)=0$。

2.2　可行性规则人工蜂群算法

在 Karaboga 与 Basturk[13-14] 提出的 ABC 算法中，蜂群分为引领蜂群体、跟随蜂群体和侦察蜂群体，且依靠 3 种群体之间的交流、转换和协作来实现采蜜。同时，模型中应用蜜源来代表候选解，蜜蜂采蜜的过程即为搜寻最优解的过程。有关概念见文献[13-15]，文中不赘述。

设蜂群规模为 N，其中引领蜂和跟随蜂群体规模分别为 N_L 和 N_F（通常取相同规模，即 $N_L=N_F=N/2$）。因式(3)系非负整数规划问题，故在搜索过程中还需对决策变量取整。FRABC 算法的流程如下：

1）初始化种群。按式(7)随机生成 N_L 个候选解，并置采蜜时刻 $t=0$。

$$x_{k,i}^{(0)} = \mathrm{round}(\mathrm{rand}(\ ) \cdot \bar{x}_i)$$
$$k = 1,2,\cdots,N_L;i = 1,2,\cdots,n \quad (7)$$

式中：rand( ) 为(0,1)内服从均匀分布的随机数，round(·)为四舍五入取整函数。

将在蜜源 x_k 的邻域内未发现更优新蜜源的连续搜索次数记为 δt_k，初始时置 $\delta t_k=0$。

2）引领蜂采蜜。采蜜至第 t 时刻，每只引领蜂均在其当前蜜源的邻域内搜索，按式(8)生成新蜜源：

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_{k,i}^{(t)} + \mathrm{round}(\varphi_k(x_{k,i}^{(t)} - x_{m,i}^{(t)})) \\ \qquad \mathrm{rand}(\ ) < p_{\mathrm{sea}} \lor i = i_r \\ x_{k,i}^{(t)}, \text{其他} \end{cases}$$
$$k = 1,2,\cdots,N_L;i = 1,2,\ \cdots,n \quad (8)$$

式中：$m \in \{1,2,\cdots,N_L\} \setminus \{k\}$，$i_r \in \{1,2,\cdots,n\}$，$m$、$i_r$ 均为随机生成的自然数；φ_k 为(−1,1)内服从均匀分布的随机数（对每只引领蜂只作一次采样，即生成新蜜源 $\tilde{x}$ 时，每维分量采用相同的 φ_k）；$p_{\mathrm{sea}} \in (0,1)$，为每维分量的搜索概率；应保证 $\tilde{x}_i \in [0,\bar{x}_i]$。文献[2]提出的 ABC 算法中，$t$ 时刻生成的新蜜源 $\tilde{x}$ 与原蜜源 $x(t)_k$ 相比，仅随机改变一维分量，其搜索能力有限。本文对每维分量都按一定概率执行搜索，以扩大搜索范围。

通过计算目标函数值 $f(\tilde{x})$ 和约束违反度 $G(\tilde{x})$ 来评价新蜜源 $\tilde{x}$，并应用可行性规则比较 $\tilde{x}$ 和 $x(t)_k$。若 $\tilde{x}$ 优于 $x(t)_k$，则以 $\tilde{x}$ 替换 $x(t)_k$，置 $x(t+1)_k=\tilde{x}$，$\delta t_k=0$；否则，置 $x(t+1)_k=x(t)_k$，$\delta t_k=\delta t_k+1$。

对 N_L 只引领蜂($k=1,2,\cdots,N_L$)，执行 N_L 次上述邻域搜索。

3）跟随蜂采蜜。跟随蜂的邻域搜索与蜜源更新方式与引领蜂一致。采蜜至第 t 时刻，每只跟随蜂均应用轮赌法选择被跟随的引领蜂。第 k 只引领蜂 $x(t+1)_k$ 被选中的概率为

$$\Pr\{x = x(t)_k\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8 \times \dfrac{F(x(t+1)_k) - F_{\min}^{(t+1)}}{F_{\max}^{(t+1)} - F_{\min}^{(t+1)} + 10^{-10}} \\ \qquad x(t+1)_k \text{ 为可行解} \\ 0.1 + 0.2 \times \dfrac{G_{\max}^{(t+1)} - G(x(t+1)_k)}{G_{\max}^{(t+1)} - G_{\min}^{(t+1)} + 10^{-10}} \\ \qquad \text{其他} \end{cases}$$
$$k = 1,2,\cdots,N_L \quad (9)$$

式中：$F_{\max}^{(t+1)}$、$F_{\min}^{(t+1)}$ 为 t 时刻引领蜂群体中所有可行个体的最大、最小目标函数值；$G_{\max}^{(t+1)}$、$G_{\min}^{(t+1)}$ 为 t 时刻新一代引领蜂群体中所有不可行个体的最大、最小约束违反度。分母中加小正数可防止分母为 0，从而避免程序中断。按式(9)设计选择概率，可行解被选中的概率区间为[0.2,1]，而不可行解被选中的概率区间为[0.1,0.3]。使得可行解被选中的机会较大，而不可行解被选中的机会较小，但候选解(引领蜂群体)均有机会被选中，这样有利于引导跟随蜂搜索可行域及其边界，从而提高找到全局最优解的概率。

对 N_F 只跟随蜂($k=1,2,\cdots,N_F$)，执行 N_F 次上述邻域搜索。

4）侦察蜂采蜜。当 δt_k 达到预设阈值 Δt 时，该蜜源对应的引领蜂转变为侦察蜂，应用式(7)重新随机产生新蜜源，并置 $\delta t_k=0$。

引领蜂转变为侦察蜂可增强种群的多样性，防止蜂群陷入局部最优区域。该操作可改善蜂群的搜索性能，提高获得最优解的概率。

5）更新最优蜜源。应用可行性规则确定新一代蜂群中的最优蜜源 $x(t+1)_{\mathrm{best}}$。

6）终止判断。若满足终止条件，则输出最优蜜源 $x(t+1)_{\mathrm{best}}$ 及其相应目标函数值 $F(x(t+1)_{\mathrm{best}})$；否则，置 $t=t+1$，返回 2)。

2.3 计算复杂度分析

设引领蜂群体规模 N_L 和跟随蜂群体规模 N_F 相同，且 $N_L = N_F = N/2$，最大迭代代数为 $t_{\max}$。根据第 3.2 节中各步骤分析 FRABC 算法的计算复杂度（仅考虑重复执行的次数）。

2）的计算复杂度为：引领蜂执行邻域搜索生成新蜜源：$O(N \times n/2)$，评价新蜜源：$O(N/2)$，更新蜜源：$O(N/2)$，更新计数器 δt_k：$O(N/2)$。3）的计算复杂度为：计算引领蜂被选择的概率：$O(N/2)$，选择被跟随的引领蜂：$O(N/2)$，跟随蜂执行邻域搜索生成新蜜源：$O(N \times n/2)$，评价新蜜源：$O(N/2)$，更新蜜源：$O(N/2)$，更新计数器 δt_k：$O(N/2)$。5）的计算复杂度为：$O(N/2)$，因此步存在不确定性，可忽略其复杂度 5）的计算复杂度为：确定每代的最优蜜源：$O(N/2)$，更新最优蜜源：$O(1)$。略去上述各步中的低阶项，则 FRABC 算法的计算复杂度为 $O(t_{\max} \times N \times n)$，为立方阶复杂度[17]。

3 算法收敛性分析

设问题式(3)的解空间为 $S = \prod_{i=1}^{n}([0, \bar{x}_i] \cap Z)$，可行域为 $D = \{x \in S: G(x) = 0\}$，全局最优解集为 $M = \{x \in D: 对\forall y \in D, 有 f(x) > f(y)\}$。显然空间 S 内只有有限个候选解。为方便表述，首先给出如下定义。

定义 1 称 t 时刻的蜜源集合 $X^{(t)} = \{x(t)_k, k = 1, 2, \cdots, N_L\}$ 为 FRABC 算法的第 t 代种群，$t = 0, 1, \cdots, t_{\max}$。

定义 2 称种群集合 $B = \{X = \{x_k, k = 1, 2, \cdots, N_L\}: X \cap M \neq \varnothing\}$ 为问题式(3)的满意种群集[18]。

由第 2.2 节的算法流程可知，FRABC 算法具有保留精英解的特点，故有以下定理。

定理 1 FRABC 算法的最优蜜源 $x(t+1)_{\text{best}}$ 不劣于 $x(t)_{\text{best}}$，$t = 0, 1, \cdots, t_{\max}$。

定理 2 FRABC 算法的种群序列 $\{X^{(t)}, t = 0, 1, \cdots, t_{\max}\}$ 是齐次不可约非周期 Markov 链。

证明 因蜂群对种群 $X^{(t)}$ 执行邻域搜索，生成新一代种群 $X^{(t+1)}$ 时，每一蜜源 $x^{(t+1)}$ 由引领蜂、跟随蜂及侦察蜂协同完成搜索[19]。借鉴车林仙[20]分析 DE 算法收敛性的方法，以下分别给出其一步转移概率（因篇幅所限，不再展开证明）。

1）引领蜂执行邻域搜索的一步转移概率。

引领蜂 k 在 $X^{(t)}$ 中随机选择一异于 $x(t)_k$ 的蜜源 $x(t)_m$，生成中间蜜源 y 的概率为

$$\Pr\{T_{s1}(x_k^{(t)}, X^{(t)}) = y\} = \frac{1}{N_L - 1}\sum_{m \neq k}\delta(x(t)_k + \text{round}(\varphi_k(x(t)_k - x(t)_m)) - y) \tag{10}$$

式中：T_{s1} 为算子符号，以下类似；$\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数[20]。

对 $x(t)_k$ 与 y 执行交叉操作，生成 $\tilde{x}$ 的概率为

$$\Pr\{T_c(x(t)_k, y) = \tilde{x}\} = \prod_{i=1}^{n}\left[\left(1 - p_{\text{sea}} - \frac{1 - p_{\text{sea}}}{n}\right)\cdot\delta(x_{k,i}^{(t)} - \tilde{x}_i) + \left(p_{\text{sea}} + \frac{1 - p_{\text{sea}}}{n}\right)\cdot\delta(y_i - \tilde{x}_i)\right] \tag{11}$$

对 $x(t)_k$ 与 $\tilde{x}$ 执行贪婪选择，得到 x' 的概率为

$$\Pr\{T_{s2}(x(t)_k, \tilde{x}) = x'\} = \begin{cases}\delta(\tilde{x} - x'), \tilde{x}\ 优于\ x(t)_k \\ \delta(x(t)_k - x'), 其他\end{cases} \tag{12}$$

综合式(10)~(12)，可得引领蜂 k 搜索到新蜜源 x' 的一步转移概率

$$\Pr\{T_L(x(t)_k, X^{(t)}) = x'\} = \sum_{y \in S}\sum_{\tilde{x} \in S}\Pr\{T_{s1}(x(t)_k, X^{(t)}) = y\} \times \Pr\{T_c(x(t)_k, y) = \tilde{x}\} \times \Pr\{T_{s2}(x(t)_k, \tilde{x}) = x'\} \tag{13}$$

2）跟随蜂执行邻域搜索的一步转移概率。

当选中引领蜂 k 作为被跟随蜂时，也可用前述方法计算搜索 x' 的一步转移概率，其表达式与式(13)类似，简记为 $\Pr\{T_F(x(t)_k, X^{(t)}) = x'\}$。

3）侦察蜂执行随机搜索的一步转移概率。

因侦察蜂对解空间 S 执行随机搜索，故获得 x' 的一步转移概率为

$$\Pr\{T_S S = x'\} = 1/|S|$$

式中：$|S|$ 表示 S 内的离散点数。

于是，仅由引领蜂搜出新一代蜜源 $x(t+1)_k$ 时，其概率为

$$\Pr\{T_1(x(t)_k, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} = \Pr\{T_L(x(t)_k, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} \tag{14}$$

由引领蜂和跟随蜂共同搜出新一代蜜源 $x(t+1)_k$ 时，其概率为

$$\Pr\{T_1(x(t)_k, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} = \Pr\{T_L(x(t)_k, X^{(t)}) = x'_1\} \times \Pr\{T_L(x'_1, X^{(t)}) = x'_2\} \times \cdots \times \Pr\{T_L(x'_q, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} \tag{15}$$

式中：$q \geqslant 1$，指引领蜂 k 被跟随的次数。

由侦察蜂搜出新一代蜜源 $x(t+1)_k$ 时，其概率为

$$\Pr\{T_1(x(t)_k, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} = \Pr\{T_S S = x(t+1)_k\} \tag{16}$$

那么，由 $X^{(t)}$ 生成 $X^{(t+1)}$ 的一步转移概率为[19-20]

$$\Pr\{TX^{(t)} = X^{(t+1)}\} = \prod_{k=1}^{N_L}\Pr\{T_1(x(t)_k, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} \tag{17}$$

由式(14)~(17)可知,对$\forall X^{(t)}, X^{(t+1)} \in S^{N_L}$,$\exists y, \tilde{x} \in S$,使得$\Pr\{T_1(x(t+1)_k, X^{(t)}) = x(t+1)_k\} > 0$,$\Pr\{TX^{(t)} = X^{(t+1)}\} > 0$,且与 t 无关。故,FRABC 算法的种群序列$\{X^{(t)}, t=0,1,\cdots,t_{\max}\}$是 S^{N_L} 上的齐次不可约非周期 Markov 链。

定理 3　FRABC 算法的 Markov 种群序列$\{X^{(t)}, t=0,1,\cdots\}$以概率 1 收敛于问题式(3)的满意种群,即$\lim\limits_{t\to\infty}\Pr\{X^{(t)} \in B \mid \forall X^{(0)} \in S^{N_L}\} = 1$。

证明　假设问题式(3)有惟一最优解。对$\forall X_1, X_2 \in S^{N_L}$,由定理 1、2 可得如下性质:

1) 当 $X_1 \in B, X_2 \in B$ 时,$\Pr\{TX_1 = X_2\} > 0$,$\Pr\{TX_2 = X_1\} > 0$,即 X_1 和 X_2 可互通;

2) 当 $X_1 \in B, X_2 \notin B$ 时,$\Pr\{TX_1 = X_2\} = 0$,$\Pr\{TX_2 = X_1\} > 0$,即 X_1 不能通向 X_2。

于是,B 为正常返非周期不可约闭集[21],且有

$$\lim_{t\to\infty}\Pr\{X^{(t)} = X \mid \forall X^{(0)} \in S^{N_L}\} = \begin{cases}\pi(X), & X \in B\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

即 $X^{(t)}$ 一定能进入 B 内,且满足某极限概率分布 $\pi(X)(X \in B)$。故

$$\lim_{t\to\infty}\Pr\{X^{(t)} \in B \mid \forall X^{(0)} \in S^{N_L}\} = 1$$

4　算例与讨论

算例来自文献[2]。假设购买股票 1 手 = 100 股(即 $Z=100$),总投资金额上限 $C_2=10$ 万元,$(C_2-C_1)/C_2=0.2\%$。拟投资的 $n(=5)$支股票的价格为

$$\boldsymbol{p} = [3.78\quad 3.72\quad 3.27\quad 2.82\quad 2.10]^{\mathrm{T}}(\text{元/股})$$

每支股票的投资金额最多占总金额的 60%,进而可确定购买手数上限

$$\bar{x}_i = \left\lfloor \frac{0.6C_2}{100p_i} \right\rfloor, i = 1,2,\cdots,5$$

式中:$\lfloor\cdot\rfloor$表示下取整。

每支股票的交易手续费比例 $\xi_{1i}=0.035\%$,$\xi_{2i}=0.04\%$ $(i=1,2,\cdots,5)$,且佣金最低额度 $c_{\min 1} = c_{\min 2}=10$ 元,$c_{\min 3}=c_{\min 4}=c_{\min 5}=5$ 元,5 支股票的平均收益率列阵为

$$\boldsymbol{R} = [0.016\,75\quad 0.008\,59\quad 0.051\,46\quad 0.042\,27\quad 0.094\,62]^{\mathrm{T}}$$

5 支股票的风险方差方阵为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.010\,02 & 0.003\,19 & 0.010\,93 & 0.000\,25 & 0.017\,86\\ 0.003\,19 & 0.009\,34 & -0.000\,57 & -0.016\,12 & -0.017\,79\\ 0.010\,93 & -0.000\,57 & 0.023\,92 & 0.017\,93 & 0.046\,77\\ 0.000\,25 & -0.016\,12 & 0.017\,93 & 0.051\,39 & 0.072\,50\\ 0.017\,86 & -0.017\,79 & 0.046\,77 & 0.072\,50 & 0.159\,65 \end{bmatrix}$$

根据第 2.2 节的 FRABC 算法流程,应用 MATLAB 编写程序,控制参数设置为:蜂群规模 $N=40$,搜索概率 $p_{\mathrm{sea}}=0.85$,最大迭代代数 $t_{\max}=600$,代数阈值 $\Delta t=100$。对于不同的风险偏好因子 w,对应优化结果见表 1(分别独立运行 50 次,表中为最好结果)。FRABC 算法独立运行一次的函数评价次数为 $N\times t_{\max}=24\,000$;而文献[2]的参数为 $N=20$,$t_{\max}=200$,AGA 独立运行一次的函数评价次数为 $N\times t_{\max}=4\,000$。由表 1 可知,对于不同的 w,应用 FRABC 算法求出的加权优化结果 $F(x)$ 均明显优于 AGA。因此,虽然 FRABC 算法的函数评价次数高于 AGA,但从优化结果来看,本文认为 FRABC 算法增加的计算开销是值得的。

表 1　算例中的股票投资策略

Table 1　The stock inevestment strategy in the case

风险偏好因子 w	算法	股票交易量 x/手					总投资金额 C/元	总收益率 f/%	风险率 g/%	加权值 F/%
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
0.0	AGA	119	81	2	67	25	99 912	2.260 8	0.609 1	−0.609 1
	FRABC	36	162	0	92	0	99 816	1.766 1	0.254 6	−0.254 6
0.1	AGA	22	114	63	51	68	99 987	3.441 6	1.068 7	−0.617 6
	FRABC	30	162	0	100	0	99 804	1.822 9	0.259 1	−0.050 9
0.2	AGA	16	99	100	35	69	99 936	3.807 5	1.307 6	−0.284 6
	FRABC	0	162	39	95	0	99 807	2.235 8	0.341 5	0.174 0
0.3	AGA	17	76	125	32	73	99 927	4.205 2	1.671 8	0.091 3
	FRABC	0	136	82	80	0	99 966	2.694 0	0.506 4	0.453 7

续表 1

风险偏好因子 w	算法	股票交易量 x/手					总投资金额 C /元	总收益率 f/%	风险率 g/%	加权值 F/%
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
0.4	AGA	4	81	131	30	81	99 951	4.371 8	1.791 7	0.673 7
	FRABC	0	91	153	57	0	99 957	3.471 4	0.933 0	0.828 7
0.5	AGA	15	70	131	28	83	99 873	4.427 2	1.904 2	1.261 5
	FRABC	0	67	184	21	42	99 834	4.323 4	1.628 6	1.347 4
0.6	AGA	14	39	194	15	59	99 858	4.745 3	2.160 5	1.983 0
	FRABC	0	46	184	0	108	99 960	5.313 2	2.843 4	2.050 6
0.7	AGA	9	42	185	8	86	99 837	5.025 3	2.508 7	2.765 1
	FRABC	0	0	184	0	189	99 858	6.786 5	5.630 7	3.061 3
0.8	AGA	4	33	117	9	216	99 945	6.408 9	5.308 3	4.065 5
	FRABC	0	0	122	0	286	99 954	7.664 4	8.388 6	4.453 8
0.9	AGA	5	10	109	35	232	99 843	6.841 9	6.583 9	5.499 4
	FRABC	0	0	122	0	286	99 954	7.664 4	8.388 6	6.059 1
1.0	AGA	2	20	70	33	283	99 822	7.191 1	7.831 1	7.191 1
	FRABC	0	0	122	0	286	99 954	7.664 4	8.388 6	7.664 4

注:表中 AGA 的计算结果引自文献[2]。

为了考察 FRABC 算法的有效性,本文还比较 GA、PSO、BABC 算法[13-14]和 FRABC 算法求解投资组合优化问题的优化性能。将可行性规则与 GA、PSO 和 BABC 算法结合形成的算法记为 FRGA、FRPSO 和 FRBABC。

为了公平比较,所有算法的种群规模 N、最大迭代代数 $t_{\max}$一致,取 $N=40$,$t_{\max}=600$,即函数评价次数一致。与 FRABC 算法类似,FRGA、FRPSO 和 FRBABC 算法均采用非负整数编码,应用函数 round(·)取整。FRGA 应用概率选择(按式(9)选择,记为 FRGA1)或 2 元锦标赛选择(记为 FRGA2)、随机算术交叉[2]和均匀变异策略,交叉、变异概率分别为 $p_c=0.9$,$p_m=0.2$。FRPSO 算法的惯性权重ω线性递减,取 ω=1.2~0.2,加速度系数为 $c_1=c_2=2$,最大速度取 $v_{\max,i}=\lfloor 0.3x_i \rfloor(i=1,2,\cdots,5)$。FRBABC 算法除无参数 p_{sea}外,其余控制参数与 FRABC 算法一致。

当 w 为 0.4,0.5,0.6 时,5 种算法分别独立运行 50 次,平均最优目标函数值进化曲线如图 1~3 所示,优化性能指标见表 2。其中,F_b、F_w和 F_{av}分别表示最好、最差和平均最优目标函数值,σ_F^2表示最优目标函数值的标准方差。由表 2 可知,对于每个 w,FRABC 算法除指标 F_b与 FRPSO 算法相当外,其他指标均好于 4 种对比算法。与 FRPSO 算法相比,FRBABC 算法的前期收敛速度较快,但后期的精细搜索能力较差。而 FRABC 算法既具有较快收敛速度、又具有较强精细搜索能力,表明其蜂群寻找新蜜源时,同时改变原蜜源的多维分量以扩大搜索范围,可明显提高优化性能。同时,FRABC 算法的 F_b、F_w和 F_{av}较接近,σ_F^2很小,表明该算法具有良好稳健性。

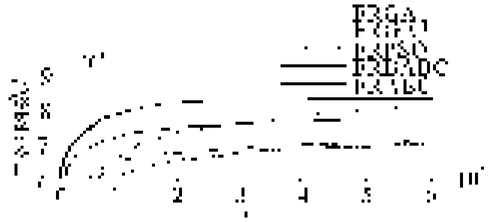

图 1 5 种算法的平均进化曲线($w=0.4$)

Fig.1 The average evolution curve of five algorithms($w=0.4$)

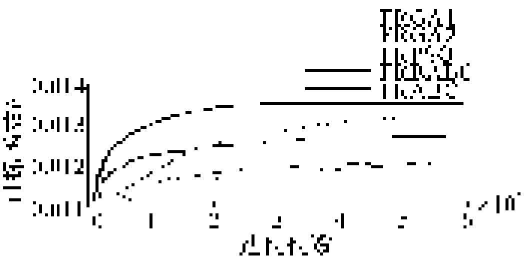

图 2 5 种算法的平均进化曲线($w=0.5$)

Fig.2 The average evolution curve of five algorithms($w=0.5$)

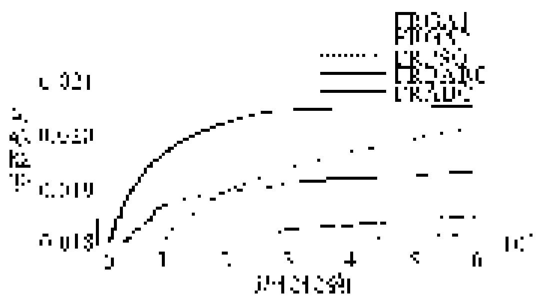

图 3 5 种算法的平均进化曲线($w=0.6$)

Fig.3 The average evolution curve of five algorithms($w=0.6$)

表 2　优化性能比较

Table 2　Optimal performance comparison

风险偏好因子 w	算法	最好值 F_b	最差值 F_w	平均值 F_{av}	标准方差 σ_F^2
0.4	FRGA1	7.939×10^{-3}	6.147×10^{-3}	7.098×10^{-3}	3.427×10^{-4}
	FRGA2	8.009×10^{-3}	6.699×10^{-3}	7.176×10^{-3}	2.672×10^{-4}
	FRPSO	8.287×10^{-3}	6.962×10^{-3}	8.096×10^{-3}	2.715×10^{-4}
	FRBABC	8.087×10^{-3}	7.263×10^{-3}	7.761×10^{-3}	2.178×10^{-4}
	FRABC	8.287×10^{-3}	8.270×10^{-3}	8.283×10^{-3}	6.931×10^{-6}
0.5	FRGA1	1.304×10^{-2}	1.131×10^{-2}	1.208×10^{-2}	3.995×10^{-4}
	FRGA2	1.271×10^{-2}	1.153×10^{-2}	1.209×10^{-2}	2.849×10^{-4}
	FRPSO	1.347×10^{-2}	1.192×10^{-2}	1.325×10^{-2}	2.776×10^{-4}
	FRBABC	1.324×10^{-2}	1.219×10^{-2}	1.271×10^{-2}	2.623×10^{-4}
	FRABC	1.347×10^{-2}	1.345×10^{-2}	1.347×10^{-2}	4.575×10^{-6}
0.6	FRGA1	1.923×10^{-2}	1.718×10^{-2}	1.820×10^{-2}	4.555×10^{-4}
	FRGA2	2.011×10^{-2}	1.785×10^{-2}	1.851×10^{-2}	4.195×10^{-4}
	FRPSO	2.050×10^{-2}	1.833×10^{-2}	2.012×10^{-2}	4.318×10^{-4}
	FRBABC	2.013×10^{-2}	1.841×10^{-2}	1.932×10^{-2}	3.605×10^{-4}
	FRABC	2.051×10^{-2}	2.031×10^{-2}	2.049×10^{-2}	3.462×10^{-5}

5　结论

1）给出包含交易费用基于投资者风险偏好的最佳证券投资组合模型;针对其约束条件,定义了约束违反度函数,进而引入求解约束优化问题的可行性规则。

2）新型智能算法 ABC 在求解非线性优化问题中具有很强的全局寻优能力和很好的实用性,本文应用 ABC 算法求解最佳证券投资组合模型,形成面向该类问题的 FRABC 算法。

3）FRABC 算法的计算复杂度为立方阶复杂度,与基本算法 FRBABC 一致。还应用 Markov 链分析其种群状态的一步转移概率,证明了该算法的全局收敛性。

4）应用 MATLAB 编写 FRABC 算法的计算程序,通过实例验证了该算法具有很强的寻优性能和良好的稳健性,且结果优于 AGA。在相同函数评价次数的条件下,FRABC 算法的各项优化指标均好于 FRGA、FRPSO 和 FRBABC 等对比算法,表明了本文方法的有效性和实用性。

参考文献:

[1]张伟, 周群, 孙德宝. 遗传算法求解最佳证券组合[J]. 数量经济技术经济研究, 2001(10): 114-116.
ZHANG Wei, ZHOU Qun, SUN Debao. Genetic algorithm for portfolio investment optimizations[J]. Quantitative and Technical Economics, 2001(10): 114-116.

[2]何洋林, 叶春明, 徐济东. 基于改进 AGA 算法求解含交易费用组合投资模型[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(11): 235-237.
HE Yanglin, YE Chunming, XU Jidong. Portfolio investment model including transaction fee and solution based on adaptive genetic algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(11): 235-237.

[3] SOLEIMANI H, GOLMAKANI H R, SALIMI M H. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(3): 5058-5063.

[4]夏梦雨, 叶春明, 徐济东. 用微粒群算法求解含交易费用的组合投资模型[J]. 上海理工大学学报, 2008, 30(4): 379-381, 386.
XIA Mengyu, YE Chunming, XU Jidong. Solution of portfolio investment model including transaction fee with particle swarm algorithm[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2008, 30(4): 379-381, 386.

[5]刘晓峰, 陈通, 张连营. 基于微粒群算法的最佳证券投资组合研究[J]. 系统管理学报, 2008, 17(2): 221-224, 234.
LIU Xiaofeng, CHEN Tong, ZHANG Lianying. Study on the portfolio problem based on particle swarm optimization[J]. Journal of Systems and Management, 2008, 17(2): 221-224, 234.

[6]刘衍民, 赵庆祯, 牛奔. 约束粒子群算法求解自融资投资组合模型研究[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(2): 78-84.
LIU Yanmin, ZHAO Qingzhen, NIU Ben. Constrain particle

swarm optimizer for solving self-financing portfolio model [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2011, 41(2): 78-84.

[7]李磊, 程晨, 张颖. 基于文化算法的投资组合规划问题求解[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2009, 8(1): 108-111.

LI Lei, CHENG Chen, ZHANG Ying. Solving portfolio programming problem based on cultural algorithm[J]. Journal of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2009, 8(1): 108-111.

[8]江家宝, 尤振燕, 孙俊. 基于微分进化算法的多阶段投资组合优化[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(3): 189-193.

JIANG Jiabao, YOU Zhenyan, SUN Jun. Multi-stage portfolio optimization using differentiation evolution algorithms[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(3): 189-193.

[9]李国成, 肖庆宪. 基数约束投资组合问题的一种混合元启发式算法求解[J]. 计算机应用研究, 2013, (8): 2292-2297.

LI Guocheng, XIAO Qingxian. Hybrid meta-heuristic algorithm for solving cardinality constrained portfolio optimization [J]. Application Research of Computers, 2013, 30(8): 2292-2297.

[10]LWIN K, QU R. A hybrid algorithm for constrained portfolio selection problems[J]. Applied Intelligence, 2013, 39(2): 251-266.

[11]PONSICH A, JAIMES A L, COELLO C A. A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(3): 321-344.

[12]BRANKE J, SCHECKENBACH B, STEIN M, et al. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary optimization[J]. European Journal on Operations Research, 2009, 199(3): 684-693.

[13]KARABOGA D, BASTURK B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm[J]. Journal of Global Optimization, 2007, 39(3): 459-471.

[14]KARABOGA D, BASTURK B. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2008, 8(1): 687-697.

[15]段海滨, 张祥银, 徐春芳. 仿生智能计算[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 88-106.

DUAN Haibin, ZHANG Xiangyin, XU Chunfang. Bio-inspired Computing[M]. Beijing: Science Press, 2011: 88-106.

[16]MALLIPEDDI R, SUGANTHAN P N. Ensemble of constraint handling techniques[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2010, 14(4): 561-579.

[17]温涛, 盛国军, 郭权, 等. 基于改进粒子群算法的 Web 服务组合[J]. 计算机学报, 2013, 36(5): 1 031- 1046.

WEN Tao, SHENG Guojun, GUO Quan, et al. Web service composition based on modified particle swarm optimization[J]. Chinese Journal of Computers, 2013, 36(5): 1031-1046.

[18]张文修, 梁怡. 遗传算法的数学基础[M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2003: 118-122.

[19]宁爱平, 张雪英. 人工蜂群算法的收敛性分析[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1 554-1 558.

NING Aiping, ZHANG Xueying. Convergence analysis of artificial bee colony algorithm[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1 554-1 558.

[20]车林仙. 面向机构分析与设计的差分进化算法研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2012: 21-30.

CHE Linxian. Study on differential evolution algorithms orientating analysis and design of mechanisms[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2012: 21-30.

[21]ZHANG Xiangyin, DUAN Haibin, YU Yaxiang. Receding horizon control for multi-UAVs close formation control based on differential evolution[J]. Science China Information Sciences, 2010, 53(2): 223-235.

作者简介:

刘永波,男,1973 年生,讲师,主要研究方向为计算机软件。主持青年基金项目 1 个、主研社科联课题 2 个,发表学术论文 8 篇,合作出版教材 2 部。