

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201401011

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3969/j.issn.1673-4785.201401011.html>

广播信号下非一致多智能体系统的能控性

王晓晓, 纪志坚

(青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要:能控性是多智能体系统研究的核心问题, 而与实际工程的动态网络更为接近的非一致的多智能体系统的能控性问题更是重中之重, 为此, 采用图论和矩阵论的方法研究了在广播控制信号下, 存在邻域信息交互的非一致的非定向多智能体系统的能控性问题, 得出了使其能控的充分必要条件, 并在非一致动态下研究了路径和完备图的能控性。非一致情形在广播信号下, 路和完备图的能控性发生变化。所得结果表明, 多智能体系统的拓扑结构和非一致动态决定了系统的能控性, 非一致动态使得多智能体系统的能控性出现了新的特点, 使问题更加复杂。指出了无向图下改善非一致多智能体系统能控性的方法。

关键词:多智能体系统; 能控性; 非一致动态; 邻域信息交互; 广播控制信号; 图论; 矩阵论; 路径; 完备图

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2014)04-401-06

中文引用格式: 王晓晓, 纪志坚. 广播信号下非一致多智能体系统的能控性[J]. 智能系统学报, 2014, 9(4): 401-406.

英文引用格式: WANG Xiaoxiao, JI Zhijian. Controllability of non-identical multi-agent systems under a broadcasting control signal [J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(4): 401-406.

Controllability of non-identical multi-agent systems under a broadcasting control signal

WANG Xiaoxiao, JI Zhijian

(College of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: Controllability is a key issue in the study of multi-agent systems, and the controllability of a multi-agent system with non-identical node dynamics which is closer to the actual engineering dynamic network is paramount. So as a result in this paper, the controllability of a multi-agent system is studied by using both the graph theory and the matrix theory, where agents interconnect via the neighbor-based rule and the undirected dynamical system consists of non-identical agents receiving a common exogenous control signal, which is called a broadcasting control signal. A necessary and sufficient condition is derived for a non-identical node dynamics system to be controllable. The controllability of the path and the complete graph is studied under the non-identical node dynamics. It is shown that the controllability of the path and the complete graph changes when the non-identical agents receive a broadcasting control signal. In particular, it is shown that the controllability of a multi-agent system is determined by the topology structure of the interconnection graph and the non-identical dynamics of the agents. Compared with the identical dynamics, the controllability of multi-agent systems exhibits new features and becomes more complicated when the dynamics of the agents is non-identical. Some methods for improving the controllability of a non-identical node dynamics system are also pointed out at the end of the paper.

Keywords: multi-agent system; controllability; non-identical dynamics; neighbor-based rule; broadcasting control signal; graph theory; matrix theory; path; complete graph

收稿日期: 2014-01-06. 网络出版日期: 2014-06-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374062).

通信作者: 纪志坚. E-mail: jizhijian@pku.org.cn.

多智能体系统的能控性问题已引起学术界的高度重视。对该问题的研究源于自然界中普遍存在的

群体行为,例如生物界昆虫、鸟和鱼群等协作捕食,共同抵御入侵者等行为。自然界中的群体行为使得它们能很好地生存繁衍下去,同时也给人类以很大的启发:与单个智能体相比,多智能体系统的合作可以大大提高系统的性能,完成更复杂的任务。H.G. Tanner^[1]最早提出了领导者-跟随者结构下多智能体系统的能控性问题。然后 Rahmani 等^[2]介绍了多智能体能控的代数和图论的条件。随后,许多人开始从图论的角度^[3-5]研究多智能体系统的能控性,并在连续时间^[6]和离散时间^[7]2种情形下,对多智能体系统的能控性问题分别进行了讨论。多智能体系统的能控性问题具有重要的现实意义,可以通过它研究多智能体网络的编队控制问题^[9],即通过调节领航者的行动来驱动跟随者到达理想的位置,从而实现系统的能控性。随着在领导者-跟随者结构下多智能体系统的不断发展,渐渐地有人开始尝试在新的结构下研究多智能体系统的能控性问题。目前,越来越多的人开始在广播信号结构^[10-11]下研究系统的能控性。然而,到目前为止,这方面的研究成果还不多。广播信号结构与领导者-跟随者结构相比有以下优势:1)在现实生活中已得到广泛应用,例如电台和电视台等;2)硬件上的优势,不需要提供用于领导者和跟随者进行信息交流的设备等。多智能体的能控性问题已取得了长足的进展,但都是在网络中的智能体都是相同(即一致动态)的假设下进行的,采用这种假设可以更容易地分析网络,特别是对网络的同步问题和能控性问题。然而,大多数实际工程中的动态网络具有不同的节点动态,例如一个动力系统具有不同的物理参数,其发电机和负载等结构通过运输线相互连接,共同构成一个非一致的动态网络。因此,研究具有非一致动态^[8,12]的多智能体网络的能控性问题,无论从理论角度还是从实践角度来说,都具有极其重要的意义和价值。本文致力于研究在广播控制信号下,具有非一致动态的非定向的多智能体网络的能控性问题,而非定向的多智能体网络是指在无向图下研究多智能体系统。

1 图论准备知识和模型

1.1 图论准备知识

本文的信息交换图均为无向图,关于无向图更全面的结论可参看文献^[14]。一个无向图 G 包含一个顶点集 $V(G)$ 和一个边集 $E(G)$ 。无向图中的边可以用 (i,j) 表示。如果 $(i,j) \in E(G)$,那么 i 和 j 是相邻关系,可以用 $i \sim j$ 表示。令 N_i 表示 v_i 的邻集,则 $N_i = \{j | v_i \sim v_j; j \neq i\}$ 。路径 $i_0 i_1 \dots i_L$ 是一个 $i_{k-1} \sim i_k (k = 1, 2, \dots, L)$ 的有限序列。完备图是指图中的任意2个节点都是相邻关系。一个节点的

度数是指其相邻节点的个数。简单图是指不含圈和重边的图。在本文中,主要考虑简单图。

任何无向图都可以由它的邻接矩阵 $A(G)$ 来表示,邻接矩阵能充分表达图上顶点相邻的关系,是一个只含有元素0和1的对称矩阵。如果 i 和 j 是相邻的,则 a_{ij} 是1,否则为0。度数矩阵 $D(G)$ 是一个对角矩阵,其中 a_{ii} 是节点 v_i 的度数。拉普拉斯矩阵 $L(G) = D(G) - A(G)$,也是一个对称矩阵。拉普拉斯矩阵与节点的互联拓扑有关。

1.2 模型

考虑如下多智能体系统:

$$\dot{x}_i = c_i \Gamma x_i + \sum_{j \in N_i} L_{ij} \Gamma (x_i - x_j) + B u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中: $x_i \in R^m$ 是第 i 个智能体的状态, $u_i \in R^p$ 是控制输入信号。因为每个节点都接受 u_i , 所以称为广播控制信号。 $B \in R^{m \times p}$ 是该系统的控制输入矩阵。 $c_i \Gamma x_i (c_i \in R, c_i \neq 0)$ 描述了系统中非一致的节态。 $\Gamma \in R^{m \times m}$ 为表示节点分量之间内部耦合关系的常数矩阵。 $L_{ij} \Gamma (x_i - x_j)$ 指的是相邻节点之间的信息交流,即所谓的邻域信息交互,其中 L_{ij} 是拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 的元素。

为了更好地分析系统能控性,可以将系统转换成紧凑的矩阵形式。令 $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T]^T \in R^{m \times n}$, $u = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_n^T]^T \in R^{p \times n}$, 系统(1)可以改写成:

$$\dot{x} = [(C - L) \otimes \Gamma] x + (I_n \otimes B) u \quad (2)$$

式中: $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 。

定义1 对具有如(1)动态的多智能体系统,如果对任意的初始状态,都存在一个控制输入信号使得系统在有限的时间内从该初始状态到达任意期望的状态,那么就称多智能体系统是能控的。

命题1 对于系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, 下列陈述是等价的^[15]:

- 1) 系统是能控的。
- 2) 系统能控性矩阵 $[B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$ 满秩。
- 3) 对于所有的 $\lambda \in R$, 矩阵 $[\lambda I - A \ B]$ 满秩, 即如果 $v^T A = \lambda v^T$, 则 $v^T B \neq 0^T$, 其中 v 是 A 对应于特征值 λ 的非零左特征向量(PBH判据)。

命题2 矩阵的 Kronecker 积有以下性质^[16]:

$$\begin{aligned} (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C; \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD); \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \end{aligned}$$

4) 设 $A \in C^{m \times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 其相应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, $B \in C^{m \times n}$ 的全体特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 其相应的特征向量是 $\beta_1,$

β_2, \dots, β_n , 那么, $\alpha_i \otimes \beta_j$ 是 $A \otimes B$ 对应于特征值 $\lambda_i \mu_j$ 的特征向量 ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)。

定义 2 如果当 $|i - j| \leq 1$ 时, $J_{ij} > 0$, 而当 $|i - j| \geq 2$ 时, $J_{ij} = 0$, 称 J 是雅可比矩阵^[13], 表示成矩阵形式为

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

$$[(I_n \otimes B) \quad [(C - L) \otimes \Gamma](I_n \otimes B) \quad \cdots \quad [(C - L) \otimes \Gamma]^{mn-1}(I_n \otimes B)]$$

因为 C 是对角矩阵, 拉普拉斯 L 是对称矩阵, 所以 $C - L$ 是对称矩阵。在 Γ 是对称矩阵的条件下, $(C - L) \otimes \Gamma$ 也是对称的, 且根据文献[16]可以表示为 $(C - L) \otimes \Gamma = PAP^T$, 其中 A 是对角矩阵, 其主对角线元素为 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值, 而相似变换矩阵 P 的列向量是对应于 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值的正交特征向量。那么, 能控性矩阵可以改写成

$$[(I_n \otimes B) PAP^T(I_n \otimes B) \cdots (PAP^T)^{mn-1}(I_n \otimes B)]$$

简化为

$$[(I_n \otimes B) PAP^T(I_n \otimes B) \cdots PA^{mn-1}P^T(I_n \otimes B)]$$

将 P 提出, 能控性矩阵可以写成:

$$P[P^T(I_n \otimes B) \Lambda P^T(I_n \otimes B) \cdots \Lambda^{mn-1}P^T(I_n \otimes B)]$$

因为 P 非奇异, 所以 P 不影响能控性矩阵的秩。因此, 仅研究下述矩阵的秩即可。

$$[P^T(I_n \otimes B) \Lambda P^T(I_n \otimes B) \cdots \Lambda^{mn-1}P^T(I_n \otimes B)]$$

要使该矩阵行满秩, $P^T(I_n \otimes B)$ 应没有非零行向量, 这要求不存在 P 的列向量与 $(I_n \otimes B)$ 的所有列向量正交。否则, 该矩阵就会出现一整行均是零的情况, 在这一情形下, 该矩阵就不是行满秩的, 从而系统的能控性矩阵也不是行满秩的。因为相似变换矩阵 P 的列向量是对应于 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值的正交特征向量, 所以要求 P 的列向量不能正交于 $(I_n \otimes B)$, 也就是说, 要求 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征向量不正交于 $(I_n \otimes B)$ 。通过命题 2 的陈述(4)得知: 对于 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的任一特征向量, 均存在 $(C - L)$ 和 Γ 的 2 个非零特征向量, 分别记其为 v_1 和 v_2 , 使得该特征向量可以写成 $v_1 \otimes v_2$ 。前面的讨论要求 $v_1 \otimes v_2$ 不与 $(I_n \otimes B)$ 的所有列向量正交, 即 $(v_1^T \otimes v_2^T)(I_n \otimes B) \neq 0^T$, 所以要求

$$(v_1^T I_n) \otimes (v_2^T B) \neq 0^T$$

因此, 系统能控, 当且仅当:

1) $v_1^T I_n \neq 0^T$, 即没有一个 $C - L$ 的特征向量正交于 I_n , 也就是说, $C - L$ 的特征向量不为 0_n 。

式中: $a_i, b_i > 0$ 。在这里, 只介绍下文用到的雅可比矩阵的一个性质: 雅可比矩阵的特征值各不相同。

2 能控性分析

2.1 主要结果

定理 1 设 Γ 是对称的, 则具有如式(1)动态的多智能体系统能控当且仅当下面的 2 个条件同时成立:

- 1) $[\Gamma, B]$ 是能控矩阵对;
- 2) $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值各不相同。

证明 系统的能控性矩阵为

因为特征向量的定义是非零向量, 所以这个条件在任何情况下均成立, 所以可以不考虑该条件。

2) $v_2^T B \neq 0^T$, 即没有一个 Γ 的特征向量正交于 B , 根据命题 1 的陈述(3), $[\Gamma \ B]$ 是一个控制矩阵对。

由于 A 是一个对角非奇异矩阵, 故 A 乘以一个矩阵只会使该矩阵的各个元素得到相同比例的缩放。然而, 矩阵 A 对角线上的元素不能出现相同的元素, 否则, 能控性矩阵会出现线性相关的行, 则控制矩阵也不能行满秩。因为矩阵 A 是一个对角矩阵, 且其主对角线元素为 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值, 所以要求 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值各不相同。

综上所述: 当 Γ 是对称的, 欲使系统(2)能控, 当且仅当下面的 2 个条件同时成立:

- 1) $[\Gamma \ B]$ 是能控矩阵对;
- 2) $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值各不相同。

根据定理 1, 广播信号下非一致多智能体系统的能控性问题可以分解成 2 个独立的小问题: 1) 子系统 $\dot{x} = \Gamma x + Bu$ 的能控性; 2) $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值各不相同问题。如果控制矩阵 B 选择合适, 使得子系统 $\dot{x} = \Gamma x + Bu$ 能控, 那么广播信号下非一致的多智能体系统的能控性问题就可以简化为对 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值分析。下面进一步探讨这一问题。

2.2 $[\Gamma \ B]$ 的能控性

首先, 研究定理 1 的条件 1), 即子系统

$$\dot{x} = \Gamma x + Bu \tag{3}$$

的能控性。其中 $\Gamma \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbf{R}^{m \times p}$ 的定义同(1)。

定理 2 Γ 是对称的(同定理 1), 则系统(3)能控当且仅当下述 2 个条件同时成立:

- 1) Γ 的特征值各不相同;
- 2) Γ 的特征向量不正交于 B 。

证明: 系统(3)的能控性矩阵是

$$Q = [B \ \Gamma B \ \Gamma^2 B \cdots \Gamma^{m-1} B]$$

因为 Γ 对称,所以它可以表达为 $\Gamma = UDU^T$, 其中 D 是一个对角矩阵,其主对角线元素为 Γ 的特征值,而相似变换矩阵 U 的列向量是对应于 Γ 的特征值的正交特征向量^[16]。那么,矩阵 Q 可以改写成:

$$Q = [B \quad UDU^TB \quad (UDU^T)^2B \quad \dots \quad (UDU^T)^{m-1}B]$$

可以简化为

$$Q = [B \quad UDU^TB \quad UD^2U^TB \quad \dots \quad UD^{m-1}U^TB]$$

将 U 提出,矩阵 Q 可以转换成:

$$Q = U[U^TB \quad DU^TB \quad D^2U^TB \quad \dots \quad D^{m-1}U^TB]$$

因为矩阵 U 非奇异,所以 U 不影响 Q 的秩。因此,主要研究式(4)矩阵的秩即可。

$$[U^TB \quad DU^TB \quad D^2U^TB \quad \dots \quad D^{m-1}U^TB] \quad (4)$$

欲使 Q 行满秩, U^TB 的行向量应是非零的,也就是说,不存在 U 的列向量,其与 B 的所有列向量正交。否则将会出现式(4)矩阵的一整行元素均是零的情况,那么式(4)就不是行满秩的,即 Q 不是行满秩的。因为相似变换矩阵 U 的列向量是对应于 Γ 的特征值的正交特征向量,所以 U 的列向量不能正交于 B , 也就是说, Γ 的特征向量不正交于 B 。由于 D 是一个对角非奇异矩阵,故 D 乘以一个矩阵只会使该矩阵的各个元素得到相同比例的缩放。然而, D 对角线上的元素不能出现相同的元素,否则, Q 会出现线性相关的行,则控制矩阵 Q 也不能行满秩。因为 D 是一个对角矩阵,其主对角线元素为 Γ 的特征值,所以要求 Γ 的特征值各不相同。

综上所述:当 Γ 是对称的,系统(3)可控,当且仅当下述 2 个条件同时成立:

- 1) Γ 的特征值各不相同;
- 2) Γ 的特征向量不正交于 B 。

2.3 路和完备图的能控性

为了更全面理解系统能控性,本小节针对多智能体系统信息交换拓扑中的 2 类特殊构形路和完备图讨论 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值,进而发现非一致多智能体系统能控性更多的特点。

对具一致动态的多智能体系统而言,当信息交换拓扑结构为路 P_N 时,系统可控^[1,3,8]。下面的研究表明,对非一致的多智能体系统,情况发生变化,路既可能可控,也可能不可控。原因如下:

无向图路的拉普拉斯矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

那么,具有非一致动态路径的拉普拉斯矩阵为

$$C - L = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & c_2 - 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1} - 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n - 1 \end{bmatrix}$$

根据定义 2 可知,矩阵 $C - L$ 是一个雅可比矩阵,而雅可比矩阵的特征值各不相同的。那么,在子系统 $\dot{x} = \Gamma x + Bu$ 能控的情况下,定理 2 表明 Γ 的特征值各不相同。综合以上分析和命题 2 可得: $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值不能保证各不相同,存在以下几种情况使其特征值相同:1) $C - L$ 或 Γ 的特征值中存在 0;2) $C - L$ 的特征值中至少存在 2 个相同的特征值。所以,对非一致多智能体系统,若其信息交换拓扑为路径,系统既可能可控,也可能不可控。

例 1 图 1 是一个简单的三节点的路径,特殊的是各节点的状态不同(即非一致动态),且每个节点都接受控制输入信号(即广播信号)。



图 1 三节点的路径

Fig.1 The path of three nodes

该例子是在子系统 $\dot{x} = \Gamma x + Bu$ 能控的条件下进行的,主要是对 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值进行分析。

1) 设 $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, 则 Γ 的特征值为 $\lambda_1 =$

$-0.669 \ 9, \lambda_2 = 0.487 \ 7, \lambda_3 = 9.182 \ 2$ 。各不相同。无向图 1 中含有 3 个节点的路的拉普拉斯矩阵为

$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 设 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 那么,

具有非一致动态的含 3 个节点的路的拉普拉斯矩阵

为 $C - L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $C - L$ 的特征值分别为

$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 3$ 。根据命题 2 可得: $\lambda_1 \mu_1 = \lambda_2 \mu_1 = \lambda_3 \mu_1$ 。因为 $(C - L) \otimes \Gamma$ 的特征值存在相同的特征值,所以该路径不能控。

2) 设 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C - L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 。则

$C - L$ 的特征值分别为 $-0.170 \ 1, 1.688 \ 9, 3.481 \ 2$ 。

根据命题2直接计算可得: $(C-L) \otimes \Gamma$ 的特征值分别为 $-2.3321, -1.5618, -1.1314, -0.0830, 0.1139, 0.8237, 1.6978, 15.5078, 31.9651$ 。因为 $(C-L) \otimes \Gamma$ 的特征值各不相同,所以该路径能控。

综合1)、2)可得:非一致多智能体系统中,若其信息交换图为路,系统既可能可控,也可能不可控。

已有结果表明,对具一致动态的多智能体系统来说,完备图 K_N 不可控^[1,3,8]。由例2知,当多智能体系统的动态是非一致时,完备图既可能可控,也可能不可控。

例2 图2是一个四节点的完备图,特殊的是各节点的状态不同(即非一致动态),且每个节点都接受控制输入信号(即广播信号)。

该例子是在子系统 $\dot{x} = \Gamma x + Bu$ 能控的条件下进行的,通过对 $(C-L) \otimes \Gamma$ 的特征值进行分析,得到上述观察。

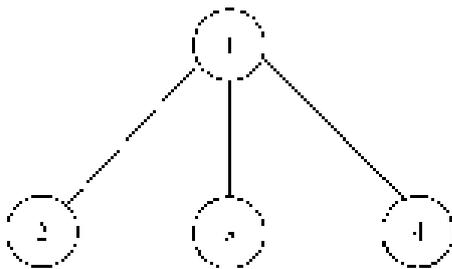


图2 四节点的完备图

Fig.2 The complete graph of four nodes

1) 令对称阵 $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, 则 Γ 的特征值

为 $\lambda_1 = -0.7116, \lambda_2 = 0.4855, \lambda_3 = 5.4277, \lambda_4 = 12.7984$ 。该完备图的拉普拉斯矩阵:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

设 $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 那么,具有非一致动态

完备图的拉普拉斯矩阵为 $C-L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

则 $C-L$ 的特征值分别为 $\mu_1 = 0.7639, \mu_2 = 2, \mu_3 = 2, \mu_4 = 5.2361$ 。根据命题2可得: $\lambda_m \mu_2 = \lambda_m \mu_3 (m =$

$1, 2, 3, 4)$ 。因为 $(C-L) \otimes \Gamma$ 的特征值存在相同的特征值,所以该完备图不能控。

2) 设 $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 那么 $C-L =$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $C-L$ 的特征值为 $0.0870,$

$1.4245, 1.6769, 4.8116$ 。根据命题2直接计算可得: $(C-L) \otimes \Gamma$ 的特征值为 $-0.0619, -1.0137, -1.1933, -3.4238, 0.0422$ 等16个各不相同的值。因为 $(C-L) \otimes \Gamma$ 的特征值各不相同,所以该完备图能控。

综合(1)、(2)可得:非一致的多智能体系统中的完备图,既可能可控,也可能不可控。

上述讨论表明,具非一致动态的多智能体系统其能控性比一致动态的多智能体系统更加复杂,其特殊构形的能控性结论通常发生改变。

2.4 改善方法

根据定理1, $(C-L) \otimes \Gamma$ 和 $[\Gamma \ B]$ 决定了非一致多智能体系统的能控性。 Γ 表示的是节点分量之间内部耦合关系的常数矩阵, B 是控制输入矩阵,可以通过选择合适的控制输入矩阵 B 使子系统 $\dot{x} = \Gamma x + Bu$ 能控,通过此种方式, C 和 L 可决定非一致多智能体系统的能控性。因为 C 代表了节点的非一致动态, L 代表多智能体系统的拓扑结构,所以非一致多智能体系统的能控性的改善方法为:

1) 改变节点的非一致动态,即各节点参数 c_i 。例如:例1、例2的(1)、(2),通过改变节点参数使得路和完备图由不能控变为能控。

2) 改变多智能体系统的拓扑结构。例如:可以通过增加或去掉节点间的联系,将不能控的拓扑结构转换成接近的能控的拓扑结构。

3 结束语

本文在广播信号下,对非一致的多智能体系统的能控性进行了研究,得到了使其能控的充分必要条件,并进一步分析证明了该充分必要条件。为了得到更深入的理解,在非一致动态下还研究了路径和完备图的能控性,研究结果表明,与一致动态的多智能体系统相比,非一致情形在广播信号下,路和完备图的能控性发生变化,并指出节点的非一致动态使多智能体系统的能控性问题更加复杂。此外,还提出了改善

非一致多智能体系统能控性的方法。与领导者-跟随者结构相比,广播信号结构在现实生活中(如电台和电视台)更为普遍,本文研究的非一致动态与实际工程中的动态网络更为接近,无论从理论还是实践角度,本文的研究都有其自身的价值和意义。

参考文献:

- [1] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections[C]//Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis Paradise Island, Bahamas, 2004: 2467-2472.
- [2] RAHMANI A, MESBAHI M. On the controlled agreement problem[C]//Proceedings of the IEEE American Control Conference. Minneapolis, USA, 2006: 1376-1381.
- [3] RAHMANI A, JI Meng, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(1): 162-186.
- [4] JI Meng, EGERSTEDT M. A graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems [C]//Proceedings of the IEEE American Control Conference. New York, USA, 2007: 4588-4593.
- [5] QI Xiao. On controllability of linear systems from a graph-theoretic perspective[C]//Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. Hefei, China, 2012: 152-154.
- [6] LIU Bo, XIE Guangming, CHU T, et al. Controllability of interconnected systems via switching networks with a leader [C]//IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Taipei, China, 2006: 3912-3916.
- [7] LIU Bo, CHU T, WANG L, et al. Controllability of a leader-follower dynamic network with switching topology [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(4): 1009-1013.
- [8] XIANG L Y, ZHU J H, CHEN Fei, et al. Controllability of weighted and directed networks with nonidentical node dynamics [OL/EB]. [2014-01-20]. <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/405034/>.
- [9] JI Z J, WANG Z D, LIN H, et al. Interconnection topologies for multi-agent coordination under leader-follower framework [J]. Automatica, 2009, 45(12): 2857-2863.
- [10] AZUMA S, YOSHIMURA R, SUGIE T. Broadcast control of multi-agent systems [J]. Automatica, 2013, 49(8): 2307-2316.
- [11] YOON M G, ROWLINSON P, CVETKOVIC D, et al. Controllability of multi-agent dynamical systems with a broadcasting control signal [J]. Asian Journal of Control, 2014, 16(4): 1-7.
- [12] COWAN N J, CHASTAIN E J, VILHENA D A, et al. Nodal dynamics, not degree distributions, determine the structural controllability of complex networks [J]. PLoS ONE, 2012, 7(6): e38398.
- [13] BLOEMENDAL A. Jacobi matrices [EB/OL]. [2012-05-30]. <http://www.math.harvard.edu/~alexh/rm/Jacobi.pdf>.
- [14] GODSIL C, ROYLE G. Algebraic Graph Theory [M]. New York: Springer, 2001: 1-2, 163-171, 279-295.
- [15] CHEN C T. Linear system theory and design [M]. New York: Oxford University, 1999: 144-153.
- [16] 徐仲, 张凯院, 陆全, 等. 矩阵论简明教程 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 5-6, 160-164.

作者简介:



王晓晓,女,1989年生,硕士研究生,主要研究方向为多智能体系统。



纪志坚,男,1973年生,教授,博士生导师,博士,主要研究方向为群体系统动力学与协调控制、复杂网络、切换动力系统的分析与控制、系统生物以及基于网络的控制系统等。先后主持国家自然科学基金3项,参与国家自然科学基金及“973”和“863”等项目多。项发表学术论文50余篇,其中被SCI检索18篇,EI检索30余篇。