

DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201307019

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3969/j.issn.1673-4785.2013.html>

基于不可约元下集格的概念获取

石慧, 何苗, 魏玲

(西北大学 数学系, 陕西 西安 710127)

摘要:形式概念分析是知识获取的一种有效工具, 已被广泛应用于许多领域. 文章从形式背景出发, 首先利用箭头关系找到相应概念格的并不可约元(交不可约元), 对并不可约元(交不可约元)的外延集(内涵集)求其下集格; 进而对下集格中的元素定义相应的运算, 可证明其结果是概念格的内涵集(外延集); 最后将该内涵集(外延集)扩充成为概念, 并将此方法应用于不完备形式背景的完备化. 该完备化将格论与形式概念分析结合, 体现出不可约元的重要性且方法直观明了, 简化了概念格的构造.

关键词:形式背景; 下集格; 概念格; 不可约元; 形式概念分析; 概念获取

中图分类号: TP18; O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2014)02-0244-07

中文引用格式: 石慧, 何苗, 魏玲. 基于不可约元下集格的概念获取[J]. 智能系统学报, 2014, 9(2): 244-250.

英文引用格式: SHI Hui, HE Miao, WEI Ling. Concept acquisition based on the down-set lattice of irreducible elements[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(2): 244-250.

Concept acquisition based on the down-set lattice of irreducible elements

SHI Hui, HE Miao, WEI Ling

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: As an efficient tool for knowledge acquisition, formal concept analysis has been applied to many fields. Based on a formal context, the arrow operator proposed by Wille is used to find the join-irreducible elements (meet-irreducible elements) of a concept lattice firstly, and then the down-set lattice of the extents (intents) of the join-irreducible elements (meet-irreducible elements) can be obtained; then an operation is defined on the down-set lattice, and the intents (extents) of the concept lattice can be obtained, which can be expanded to the concepts; finally, this method is used to complete an incomplete formal context. The completion method combines the lattice theory and the formal concept analysis, reflects the importance of irreducible elements which simplifies the structure of the concept lattice, and the method is visual and clear.

Keywords: formal context; down-set lattice; concept lattice; irreducible element; formal concept analysis; concept acquisition

德国数学家 R.Wille 于 1982 年首先提出了形式概念分析理论^[1], 用于概念的发现、排序和显示. 形式背景与形式概念是形式概念分析的基本概念, 形式概念是由形式背景中的对象集和属性集组成的统一体, 形式概念之间可形成一种有序的层次结

构, 即概念格, 概念格的构造^[2-5]是形式概念分析理论的主要研究内容之一. 目前, 已提出的概念格构造方法主要有 2 种, 增量算法与批处理算法. 增量算法是在数据信息不确定或不完整的情况下, 当有少量数据变动时, 对已经构造的概念格进行更新和维护^[3,6]; 批处理算法是在数据比较完整的情况下, 依据形式背景初次构造概念格的一种更有效的方

收稿日期: 2013-10-15. 网络出版日期: 2014-03-31.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60703117, 61005042).

通信作者: 魏玲. E-mail: wl@nww.edu.cn.

法,它主要分为枚举、自顶向下和自底向上3种算法^[7-8]。此外,还有将大背景横向拆分为若干小形式背景,再将各小形式背景的概念格进行横向合并,从而构建出相应的原形式背景概念格的方法^[9];以及从对象集的每一个等价类所拥有的属性子集之间的包含关系出发,构造相应的Hasse图,从而得到概念格^[10]的方法。本文对并不可约元(交不可约元)下集格中的元素定义运算,得到相应概念格的内涵集(外延集),进而扩充为概念。

1 理论基础

定义1^[11] 称 (G, M, I) 为一个形式背景,其中 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ 为对象集,每个 $g_i (i \leq t)$ 称为一个对象; $M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ 为属性集,每个 $m_j (j \leq s)$ 称为一个属性; I 为 G 和 M 之间的二元关系 $I \subseteq G \times M$ 。若 $(g, m) \in I$,则称 g 具有属性 m ,用 gIm 表示;否则,记为 $g \nmid m$ 。

对于形式背景 (G, M, I) ,在对象集 $X \subseteq G$ 和属性集 $B \subseteq M$ 上分别定义运算:

$$X^* = \{m \mid m \in M, \forall g \in X, gIm\}$$

$$B' = \{g \mid g \in G, \forall m \in B, gIm\}$$

$\forall g \in G$, 记 $\{g\}^*$ 为 g^* ; $\forall m \in M$, 记 $\{m\}'$ 为 m' 。若 $\forall g \in G, g^* \neq \emptyset, g^* \neq M$, 且 $\forall m \in M, m' \neq \emptyset, m' \neq G$, 则称形式背景 (G, M, I) 是正则的。本文提到的形式背景都是正则的。

定义2^[11] 设 (G, M, I) 是形式背景,对 $X \subseteq G, B \subseteq M$,若满足 $X^* = B$ 且 $X = B'$,则称 (X, B) 是一个形式概念,简称概念;其中 X 称为概念的外延, B 称为概念的内涵。形式背景 (G, M, I) 的全体概念记为 $L(G, M, I)$ 。

$$\forall (X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L(G, M, I),$$

定义:

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = (X_1 \cap X_2, (B_1 \cup B_2)^*)$$

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = ((X_1 \cup X_2)', B_1 \cap B_2)$$

则 $L(G, M, I)$ 是完备格,称为概念格。

定义3^[11] 设 (G, M, I) 为形式背景, $\forall g \in G, m \in M$, 称 (g^*, g^*) 为对象概念, (m', m'') 为属性概念。

定义4^[12] 设 L 是格,若满足下列条件,则称 $x \in L$ 是并不可约元:

- 1) $x \neq 0$ (如果 L 有零元);
- 2) $x = a \vee b \Rightarrow x = a$ 或 $x = b$ ($a, b \in L$)。

对偶地,可得到交不可约元的定义。格 L 的全

体并不可约元记为 $J(L)$,交不可约元记为 $M(L)$ 。

定义5^[12] 设 P 为一个偏序集, $Q \subseteq P$, 如果 $\forall x \in Q, y \in P$ 且 $y \leq x$ 时有 $y \in Q$, 则称 Q 为下集。记 P 的所有下集为 $o(P)$,称 $o(P)$ 为 P 的下集格。

定理1^[12] 设 L 为有限格, L 中的任意元素可表示成某些并不可约元(交不可约元)的并(交)。

定义6^[11] 设 (G, M, I) 为形式背景, $\forall g \in G, m \in M: g \nwarrow m \Leftrightarrow g \nmid m$, 并且,若 $g^* \subseteq h^*$ 且 $g^* \neq h^*$,则有 $hIm; g \nearrow m \Leftrightarrow g \nmid m$, 并且,若 $m' \subseteq n'$ 且 $m' \neq n'$,则有 $gIn; g \nearrow m \Leftrightarrow g \nwarrow m$ 并且 $g \nearrow m$ 。

定理2^[11] 下面断言对每个背景都成立:

1) 对象概念 (g^*, g^*) 是并不可约元 \Leftrightarrow 存在一个 $m \in M$,使 $g \nwarrow m$;

2) 属性概念 (m', m'^*) 是交不可约元 \Leftrightarrow 存在一个 $g \in G$,使 $g \nearrow m$;

下面断言对每个有限背景都成立:

3) 对象概念 (g^*, g^*) 是并不可约元 \Leftrightarrow 存在一个 $m \in M$,使 $g \nearrow m$;

4) 属性概念 (m', m'^*) 是交不可约元 \Leftrightarrow 存在一个 $g \in G$,使 $g \nearrow m$ 。

记: $L_G(G, M, I) = \{X \mid (X, B) \in L(G, M, I)\}$ 是概念格 $L(G, M, I)$ 所有外延构成的集合;

$L_M(G, M, I) = \{B \mid (X, B) \in L(G, M, I)\}$ 是概念格 $L(G, M, I)$ 所有内涵构成的集合;

$J_G(L) = \{X \mid (X, B) \in J(L)\}$ 为概念格 $L(G, M, I)$ 的并不可约元的外延集;

$M_M(L) = \{B \mid (X, B) \in M(L)\}$ 为概念格 $L(G, M, I)$ 的交不可约元的内涵集。

2 基于不可约元下集格的概念获取

本节主要给出通过不可约元做下集格,再定义映射找到全部概念的方法。首先,根据定义6确定形式背景中的箭头关系,根据定理2找到该形式背景所对应概念格的并不可约元,其次对并不可约元的外延集做下集格,再对下集格中的元素定义映射,从而得到概念格的全部内涵集,进一步得到全部概念。利用对偶性,对交不可约元的内涵集做下集格,定义相应的映射,得到概念格的全部外延集,进而得到所有概念。

定义映射 $f_1: o(J_G(L)) \rightarrow L_M(J_G(L))$ 如下: $\forall X \in o(J_G(L)), f_1(X) = \cap X_i^* = (\cup X_i)'$, $X_i \in X$, 且将 $o(J_G(L))$ 中所有元素的像集记为 $L_M(J_G(L))$ 。

性质1 映射 $f_1: o(J_G(L)) \rightarrow L_M(J_G(L))$ 具有以

下性质:1) f_1 是满射;2) f_1 具有逆序性, 即 $\forall X_1, X_2 \in o(J_G(L))$, 若 $X_1 \subseteq X_2$, 则 $f_1(X_2) \subseteq f_1(X_1)$ 。

证明 1) 根据 f_1 的定义, $L_M(J_G(L))$ 中的元素均是由 $o(J_G(L))$ 中元素的元素取并然后做 $*$ 运算得到的。即 $\forall B \in L_M(J_G(L))$, $\exists X \in o(J_G(L))$ 使 $f_1(X) = B$;

2) 当 $X_1 \subseteq X_2$ 时有 $\cup \subseteq X_i \subseteq \cup X_j$, $X_i \in X_1$, $X_j \in X_2$ 。由于 $f_1(X) = (\cup X)^*(X \in X)$, 且 $*$ 算子有逆序性, 即对 $X_1 \subseteq X_2$, 有 $X_2^* \subseteq X_1^*$, 从而有: $f_1(X_2) \subseteq f_1(X_1)$ 。

定理 3 $L_M(J_G(L)) = L_M(G, M, I)$ 。

证明 一方面: $\forall B \in L_M(J_G(L))$, $\exists X \in o(J_G(L))$, 使 $f_1(X) = B$, 令 $X = \cup X_i$, ($X_i \in X$)。即有 $X^* = B$ 。又根据 $*$ 算子的性质知道 $X^* = X^{**}$, 即 $\exists X \in o(J_G(L))$, 使 $B = X^{**}$ 。所以有 $B \in L_M(G, M, I)$ 。

另一方面: $\forall A \in L_M(G, M, I)$, 设 $y = A'$, 显然有 $(y, A) \in L(G, M, I)$ 。由于概念格中的每一对概念都可以由并不可约元的并得到。从而 $\exists y \in o(J_G(L))$, $y = \cup Y_i$, ($Y_i \in y$)。又 $A \in L_M(G, M, I)$, $X^* = A'^* = A$, 因此 $A \in L_M(J_G(L))$, 得证。

该结论表明: 并不可约元外延集的下集格经 f_1 映射后得到的集合为相应概念格的内涵集。进一步, 可对所有内涵做'算子得到相应的外延, 进而得到概念。对偶地, 下面给出从交不可约元出发获取其下集格及所有概念的过程。

定义映射 $f_2: o(M_M(L)) \rightarrow L_G(M_M(L))$ 如下: $\forall A \in o(M_M(L))$, $f_2(X) = \cap A_j' = (\cup A_j)'$, $A_j \in A$, 且将 $o(M_M(L))$ 中的所有元素的像集记为 $L_G(M_M(L))$ 。

性质 2 $f_2: o(M_M(L)) \rightarrow L_G(M_M(L))$ 具有以下性质:1) f_2 是满射;2) f_2 具有逆序性, 即 $\forall A_1, A_2 \in o(M_M(L))$, 若 $A_1 \subseteq A_2$, 则 $f_2(A_2) \subseteq f_2(A_1)$ 。

证明 1) 根据 f_2 的定义, $L_G(M_M(L))$ 中的元素均是由 $o(M_M(L))$ 中元素的元素取并再做'运算得到的。即 $\forall X \in L_G(M_M(L))$, $\exists A \in o(M_M(L))$ 使 $f_2(A) = X$ 。

2) 当 $A_1 \subseteq A_2$ 时有 $\cup A_i \subseteq \cup A_j$, $A_i \in A_1$, $A_j \in A_2$ 。由于 $f_2(A) = (\cup A)'$ 且'算子有逆序性, 即对 $A_1 \subseteq A_2$, 有 $A_2' \subseteq A_1'$, 从而有: $f_2(A_2) \subseteq f_2(A_1)$ 。

定理 4 $L_G(M_M(L)) = L_G(G, M, I)$ 。

证明 一方面: $\forall X \in L_G(M_M(L))$, $\exists A \in o(M_M(L))$, 使 $f_2(A) = X$ 。令 $X = \cup A_i$, ($A_i \in X$)。即有 $A' = X$ 。又根据'算子的性质, 知道 $A' = A'^{**}$, 即 $\exists A \in$

$o(M_M(L))$, 使 $X = A'^{**}$ 。所以有 $X \in L_G(G, M, I)$ 。

另一方面: $\forall Y \in L_G(G, M, I)$, 设 $C = Y^*$, 显然有 $(Y, C) \in L(G, M, I)$ 。由于概念格中的每一对概念都可以由交不可约元的交得到。从而 $\exists C \in o(M_M(L))$, $C = \cap C_i$, ($C_i \in C$)。又由于 $Y \in L_G(G, M, I)$, $C' = Y^{**} = Y$, 因此 $Y \in L_G(M_M(L))$, 得证。

该结论表明: 交不可约元属性集的下集格经 f_2 映射后得到的集合为相应概念格的外延集。进一步, 可对所有外延做'算子得到相应的内涵, 进而得到概念。

例 1 形式背景 (G, M, I) 如表 1 所示, 其中 $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{a, b, c, d, e\}$ 。

表 1 形式背景 (G, M, I)

序号	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	×		×		×
2	×	×		×	×
3	×	×			×
4		×	×	×	
5		×	×	×	

首先, 根据定义 2.6 给出该形式背景的箭头关系, 如表 2 所示。

表 2 箭头关系下的形式背景 (G, M, I)

Table 2 Formal context (G, M, I) with the arrow relations

序号	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	×	↗	×	↖	×
2	×	×	↗	×	×
3	×	×	↗	↗	×
4	↗	×	×	×	↗
5	↗	×	×	×	↗

由表 2 的箭头关系以及定理 2, 得到 $L(G, M, I)$ 的并不可约元为 $(1^*, 1^*)$, $(2^*, 2^*)$, $(3^*, 3^*)$, $(4^*, 4^*)$, $(5^*, 5^*)$ 。即 $J(L) = \{(1, ace), (2, abde), (23, abe), (45, bcd)\}$ 。因此, $J_G(L) = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ 。其 Hasse 图如图 1 所示:

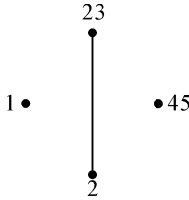


图 1 $J_G(L)$ 的 Hasse 图

Fig.1 Hasse of $J_G(L)$

根据 Hasse 图可得: $o(J_G(L)) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{4, 5\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{4, 5\}\}, \{\{2\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{4, 5\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{4, 5\}\}, \{\{2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}\}$ 。

$\forall X \in o(J_G(L))$, 计算 $f_1(X)$, 得到:
 $L_M(J_G(L)) = \{M, \{a, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, d\}, \{a, e\}, \{c\}, \{a, b, e\}, \{b, d\}, \{b\}, \emptyset\}$ 。

由定理 3 可知该属性集合为 $L(G, M, I)$ 的全部内涵, 扩充为概念后可得: $L(G, M, I) = \{(\emptyset, M), (1, ace), (2, abde), (45, bcd), (23, abe), (245, bd), (145, c), (123, ae), (2345, b), (G, \emptyset)\}$ 。

概念格如图 2 所示:

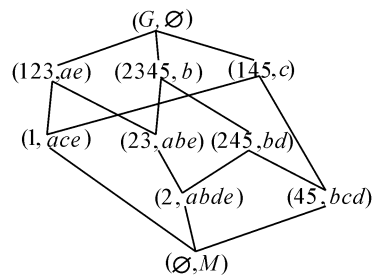


图 2 $L(G, M, I)$
Fig.2 $L(G, M, I)$

对偶地, 由表 2 的箭头关系以及定理 2, 得到 $L(G, M, I)$ 的交不可约元为 $(a', a'^*), (b', b'^*), (c', c'^*), (d', d'^*), (e', e'^*)$, 即 $M(L) = \{(123, ae), (2345, b), (145, c), (245, bd)\}$ 。因此, $M_M(L) = \{\{a, e\}, \{b\}, \{c\}, \{b, d\}\}$ 。其 Hasse 图如图 3 所示:

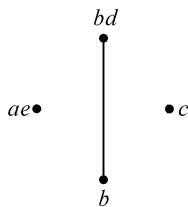


图 3 $M_M(L)$ 的 Hasse 图
Fig.3 $M_M(L)$

根据 Hasse 图, 可得

$$o(M_M(L)) = \{\emptyset, \{\{a, e\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{a, e\}, \{b\}\}, \{\{a, e\}, \{c\}\}, \{\{b\}, \{c\}\}, \{\{b, d\}, \{b\}\}, \{\{a, e\}, \{b, d\}\}, \{\{b\}, \{c\}\}, \{\{a, e\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{b, d\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a, e\}, \{b, d\}, \{b\}\}, \{\{a, e\}, \{b, d\}, \{c\}\}\}.$$

$\forall A \in o(M_M(L))$, 计算 $f_2(A)$ 得到

$$L_G(M_M(L)) = \{G, \{1\}, \{2\}, \{4, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \emptyset\}.$$

由定理 4 可知该对象集合为 $L(G, M, I)$ 的全部外延。扩充为概念后可得: $L(G, M, I) = \{(\emptyset, M), (1, ace), (2, abde), (45, bcd), (23, abe), (245, bd), (145, c), (123, ae), (2345, b), (G, \emptyset)\}$ 。概念格如图 4 所示。

3 不完备形式背景的完备化

在实际问题中, 由于受到各种原因的影响, 有可能导致形式背景的部分对象与属性之间出现关系缺失的现象, 即这部分对象与属性之间是否存在关系无法获知, 在概念格理论中, 将这种含有缺失值的形式背景称为不完备形式背景。针对不完备形式背景, 可以根据不完备形式背景的决策信息对缺失的信息进行预测, 从而将其补全为完备的形式背景^[13]; 也可以利用模糊关系的多划分技术, 得到其完备化模型^[14]。本节给出基于前文方法的不完备形式背景的完备化。

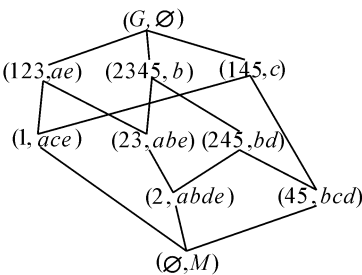


图 4 $L(G, M, I)$
Fig.4 $L(G, M, I)$

在本节中, 不完备形式背景的缺失信息用 # 表达。将 # 全部替换为 0, 得到的形式背景记为 (G, M, I_1) , 相应的概念格记为 L_1 ; 将 # 全部替换为 1, 得到的形式背景记为 (G, M, I_2) , 相应的概念格记为 L_2 。

本节借用上节概念获取的方法, 对不完备形式背景的缺失信息进行补全。首先, 分析形式背景 (G, M, I_1) 与 (G, M, I_2) , 由于其概念个数不同, 概念个数较多的信息系统所包含的信息要相对完整一些, 因而选择从概念个数较多的形式背景出发对其完备化; 然后, 找到选择出形式背景并不可约元外延集的下集格, 并对其中的元素在另一个形式背景上做映射 f_1 , 得到象集后构造新集合; 最后定义映射将 # 映射为 1 或 0。对偶地, 找到其交不可约元的内涵集, 利用相似方法对其进行完备化。

定义集合 $P_1 = \{A | A \in L_M(J_G(L_1)), X \in L_{1M}(G, M, I_1) \text{ 且 } \forall m \in M, A \neq m'^* \text{ 或 } A \in L_M(J_G(L_1)), A \in L_{1M}(G, M, I_1) \text{ 且 } \forall m \in M, A \neq m'^*\}$ 。其中, $L_{1M}(G, M, I_1)$ 为 L_1 的内涵集; m'^* 为 (G, M, I_2) 的属性概念的内涵。

定义 7 映射 $h_{11}: \# \rightarrow \{0, 1\}$ 如下:

$$h_{11}(\#) = \begin{cases} 1, & \exists x \in G, m \in E, E \in P_1 \text{ 且 } I(x, m) = \# \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

定义集合 $Q_1 = \{X | X \in L_G(M_M(L_1)), X \notin L_{1G}(G, M, I_1) \text{ 且 } \forall g \in G, X \neq g^{*'} \text{ 或 } X \notin L_G(M_M(L_1)), X \in L_{1G}(G, M, I_1) \text{ 且 } \forall g \in G, X \neq g^{*'}\}$ 。其中, $L_{1G}(G, M, I_1)$ 为 L_1 的外延集; $g^{*'}$ 为 (G, M, I_2) 的对象概念的外延。

定义 8 映射 $h_{12}: \# \rightarrow \{0, 1\}$ 如下:

$$h_{12}(\#) = \begin{cases} 1, \exists m \in M, x \in F, F \in Q_1 \text{ 且 } I(x, m) = \# \\ 0, \text{ 否则} \end{cases}$$

相应地, 定义集合 $P_2 = \{A | A \in L_M(J_G(L_2)), X \notin L_{2M}(G, M, I_2) \text{ 且 } \forall m \in M, A \neq m'^* \text{ 或 } A \notin L_M(J_G(L_2)), A \in L_{2M}(G, M, I_2) \text{ 且 } \forall m \in M, A \neq m'^*\}$ 。其中, $L_{2M}(G, M, I_2)$ 为概念格 L_2 的内涵集; m'^* 为 (G, M, I_1) 的属性概念的内涵。

定义 9 映射 $h_{21}: \# \rightarrow \{0, 1\}$ 如下:

$$h_{21}(\#) = \begin{cases} 0, \exists x \in G, m \in E, E \in P_2 \text{ 且 } I(x, m) = \# \\ 1, \text{ 否则} \end{cases}$$

定义集合 $Q_2 = \{X | X \in L_G(M_M(L_2)), X \notin L_{2G}(G, M, I_2) \text{ 且 } \forall g \in G, X \neq g^{*'} \text{ 或 } X \notin L_G(M_M(L_2)), X \in L_{2G}(G, M, I_2) \text{ 且 } \forall g \in G, X \neq g^{*'}\}$ 。其中, $L_{2G}(G, M, I_2)$ 为概念格 L_2 的外延集; $g^{*'}$ 为 (G, M, I_1) 的对象概念的外延。

定义 10 映射 $h_{22}: \# \rightarrow \{0, 1\}$ 如下:

$$h_{22}(\#) = \begin{cases} 0, \exists m \in M, x \in F, F \in Q_2 \text{ 且 } I(x, m) = \# \\ 1, \text{ 否则} \end{cases}$$

例 2 表 3 给出了一个不完备形式背景 $(G, M, I, \#)$, 其中 $G = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{a, b, c, d, e\}$ 。

表 3 不完备形式背景 $(G, M, I, \#)$

Table 3 Incomplete formal context $(G, M, I, \#)$

序号	a	b	c	d	e
1	1	0	#	1	0
2	0	1	0	#	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

表 3 中第 1 行的“#”符号, 表示对象 1 是否拥有属性 c 是不确定的; 该表中第 2 行的“#”符号, 表示对象 2 是否拥有属性 d 是不确定的。

下面将其完备化:

1) 将不完备形式背景 $(G, M, I, \#)$ 中的 $\#$ 全部替换为 0, 得到形式背景 (G, M, I_1) , 如表 4 所示。将不完备形式背景 $(G, M, I, \#)$ 中的 $\#$ 全部替换为 1, 得到形式背景 (G, M, I_2) , 如表 5 所示。

2) 概念格 L_1 如图 5 所示, 概念格 L_2 如图 6 所示: 显然, L_2 的概念多, 所表达的信息更加完整, 下面

从形式背景 (G, M, I_2) 出发, 对不完备形式背景 $(G, M, I, \#)$ 完备化。

3) 概念格 L_2 的并不可约元如下:

$$J(L_2) = \{(1, acd), (2, bd), (3, ace), (4, abe)\}。$$

4) 将所有并不可约元的外延构成集合: $J_G(L_2) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ 。其 Hasse 图如图 7 所示。

表 4 (G, M, I_1)

Table 4 Complete formal context (G, M, I_1)

序号	a	b	c	d	e
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

表 5 (G, M, I_2)

Table 5 Complete formal context (G, M, I_2)

序号	a	b	c	d	e
1	1	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

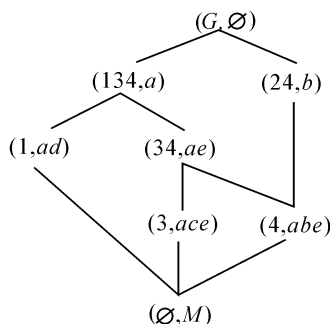


图 5 概念格 L_1

Fig.5 $L(G, M, I)$

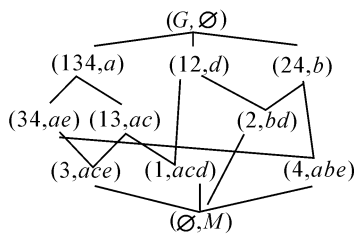


图 6 概念格 L_2

Fig.6 $L(G, M, I)$

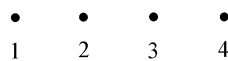


图 7 $J_G(L_2)$ 的 Hasse 图

Fig.7 Hasse of $J_G(L_2)$

5) $J_G(L_2)$ 的下集格如下:

$$o(J_G(L_2)) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{4\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{4\}\},$$

$\{\{2\},\{3\}\},\{\{2\},\{4\}\},\{\{3\},\{4\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1\},\{2\},\{4\}\},\{\{1\},\{3\},\{4\}\},\{\{2\},\{3\},\{4\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}\}。$

6) $\forall \chi \in o(J_G(L_2))$, 在形式背景 (G, M, I_1) 上计算 $f_1(\chi)$, 可得 $L_M(J_G(L_2)) = \{M, \{a\}, \{b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, c, e\}, \{a, b, e\}, \emptyset\}$

7) 根据集合 P_2 的定义, 可得: $P_2 = \{\{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, c, d\}\}$

8) 根据映射 h_{21} 得到 $I(1, c) = 0, I(2, d) = 0$ 。从而得到补全后的完备的形式背景 (G, M, I_3) 如表 6 所示:

表 6 完备形式背景 (G, M, I_3)

Table 6 Complete formal context (G, M, I_3)

序号	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

对偶地, 从 L_2 交不可约元出发对不完备形式背景完备化。

1) 概念格 L_2 的交不可约元如下:

$M(L_2) = \{\{134, a\}, \{12, d\}, \{24, b\}, \{34, ae\}, \{13, ac\}\}$

2) 将所有交不可约元的内涵构成集合: $M_M(L_2) = \{\{a\}, \{d\}, \{b\}, \{a, e\}, \{a, c\}\}$ 。其 Hasse 图如图 8 所示:

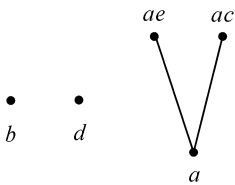


图 8 $M_M(L_2)$ 的 Hasse 图

Fig.8 Hasse of $M_M(L_2)$

3) $M_M(L_2)$ 的下集格如下:

$o(M_M(L_2)) = \{\emptyset, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{d\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{b\}, \{d\}\}, \{\{a\}, \{d\}\}, \{\{a, e\}, \{e\}\}, \{\{a, c\}, \{a\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{d\}\}, \{\{a, e\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{a, e\}, \{a\}, \{d\}\}, \{\{a, c\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{a, c\}, \{a\}, \{d\}\}, \{\{a, e\}, \{a, c\}, \{a\}\}, \{\{b\}, \{d\}, \{a, e\}, \{a\}\}, \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a\}\}, \{\{b\}, \{a, e\}, \{a, c\}, \{a\}\}, \{\{d\}, \{a, e\}, \{a, c\}, \{a\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{d\}, \{a, e\}\}\}$

4) $\forall A \in o(M_M(L_2))$, 在形式背景 (G, M, I_1) 上计算 $f_2(A)$ 可得: $L_G(M_M(L_2)) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, G\}$

5) 根据集合 Q_2 的定义, 可得: $Q_2 = \{\{1, 2\},$

$\{1, 3\}, \{2\}\}$

根据映射 h_{22} 得到 $I(1, c) = 0, I(2, d) = 0$ 。从而得到补全后的完备的形式背景 (G, M, I_4) , 如表 7。

表 7 完备形式背景 (G, M, I_4)

Table 7 Complete formal context (G, M, I_4)

序号	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

最后, 以看出基于 2 种不可约元的下集格完备化得到的形式背景相同。因而, 将其作为最终完备化的结果。

4 结束语

本文提出了一种通过并不可约元(交不可约元)的下集格获取概念的方法。首先利用箭头关系找到该背景对应概念格的并不可约元(交不可约元), 对并不可约元(交不可约元)的外延集(内涵集)做下集格; 其次对下集格中的元素做相应的运算, 得到的属性集合(对象集合)可证明就是概念格的内涵集(外延集); 最后将其扩充成为概念。此外, 根据这种概念获取的方法利用下集格已经将并不可约元(交不可约元)的并(交)经行了初步筛选, 所以对于不完备形式背景来说从概念较多的形式背景 (G, M, I_1) 或 (G, M, I_2) 的并不可约元出发, 在另一个形式背景上进行特定的映射, 最后根据定义的映射将其完备化。同样可以从交不可约元出发, 对不完备形式背景进行扩充。并且基于 2 种不可约元扩充后的结果相同。

参考文献:

[1] WILLE R. Restructuring lattices theory: an approach on hierarchies of concepts [M]. Dordrecht, Holland: Springer, 1982: 445-470.

[2] CARPINETO C, ROMANO G. Concept data analysis: theory and application[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004: 21-35.

[3] GODIN R. Incremental concept formation algorithm based on Galois lattices [J]. Computational Intelligence, 1995, 11 (2): 246-267.

[4] HO T B. Discovering and using knowledge from unsupervised data [J]. Decision Support System, 1997, 21 (1): 29-42.

[5] BELOHLAVEK R. fuzzy closure operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001(262): 473-489.

- [6] NOURINE L, RAYNAUD O. A fast algorithm for building lattices [J]. Information Processing Letters, 1999, 47: 111-112.
- [7] BODAT J P. Calcul pratique du treillis de galois d'une correspondance [J]. Math Sci Hum, 1986, 96: 31-47.
- [8] HO T B. Incremental conceptual clustering in the framework of galois lattice [C]//Proceedings of First Pacific-Asia Conference. Knowledge Discovery and Data Mining: Techniques and Applications. [S.l.], 1997: 49-64.
- [9] 李云, 刘宗田, 陈陵, 等. 多概念格的横向合并算法[J]. 电子学报, 2004, 32 (11): 1847-1854.
LI Yun, LIU Zongtian, CHEN Ling. Horizontal union algorithm of multiple concept lattices [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32 (11): 1847-1854.
- [10] 万青, 魏玲, 李涛. 一种基于并不可约元的建格新方法[J]. 西北大学学报, 2013, 43 (1): 10-14.
WAN Qing, WEI Ling, LI Tao. A new method of building lattice based on join-irreducible [J]. Journal of Northwest University: Natural Science Edition, 2013, 43 (1): 10-14.
- [11] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis [M]. Mathematical Foundations. SpringerVerlag, New York, 1999: 21-24.
- [12] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [13] 李金海. 面向规则提取的概念格约简方法及其算法实现 [D]. 西安: 西安交通大学, 2012: 45-63.
LI Jinhai. Acquisition oriented reduction methods for concept lattices and their implementation algorithms [D]. Xi'an: Xi'an Jiao Tong University, 2012: 45-63.

- [14] 康向平, 李德玉, 李瑞萍. 基于多划分的不完备信息系统的完备化模型[J]. 计算机工程与设计, 2011(9): 3131-3134.
KANG Xiangping, LI Deyu, LI Ruiping. Completion model of incomplete information system based on multiple-partitions [J]. Computer Engineering and Design, 2011(9): 3131-3134.

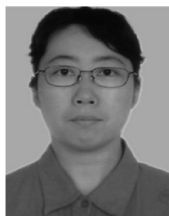
作者简介:



石慧, 女, 1990 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为形式概念分析、粗糙集。



何苗, 女, 1987 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为形式概念分析、粗糙集。



魏玲, 女, 1972 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为形式概念分析、粗糙集, 概率论等。主持和参与国家自然科学基金、陕西省教育厅自然科学专项基金等多项。