DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201209063
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3969/j.issn.1673-4785.201209063.html

直觉模糊粗糙逻辑的语义及其推理

申立平,王艳平
(辽宁工业大学 理学院,辽宁 锦州 121001)

摘 要:将直觉模糊粗糙集理论引入到逻辑推理中,通过对粗糙集、直觉模糊集、数理逻辑等基本理论的融合,给出了直觉模糊粗糙逻辑的语义及其推理方法。首先给出直觉模糊命题逻辑的 5 个逻辑值,即直觉模糊真、直觉模糊假、直觉模糊粗糙真、直觉模糊粗糙假和直觉模糊粗糙不相容,在此基础上定义了直觉模糊粗糙逻辑的运算,然后讨论了近似空间中直觉模糊粗糙命题公式的语义,最后针对含有不同逻辑连接词的直觉模糊粗糙命题公式给出了其语义推理方法。

关键词:粗糙集;粗糙逻辑;模糊粗糙逻辑;直觉模糊粗糙逻辑
中图分类号:TP301 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-4785(2014)01-0083-05

中文引用格式:申立平,王艳平.直觉模糊粗糙逻辑的语义及其推理[J]. 智能系统学报, 2014, 9(1): 83-87.
英文引用格式:SHEN Liping, WANG Yanping. Semantic of intuitionistic fuzzy rough logic and its reasoning[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(1): 83-87.

Semantic of intuitionistic fuzzy rough logic and its reasoning

SHEN Liping, WANG Yanping
(School of Science, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract: The theory of the intuitionistic fuzzy rough set is introduced into the logic reasoning. By the combination of such basic theories as rough sets, intuitionistic fuzzy sets and mathematical logic, the semantic and reasoning methods of intuitionistic fuzzy rough logic are given. Initially, five logic values for the intuitionistic fuzzy proposition logic are given, i.e. intuitionistic fuzzy true, intuitionistic fuzzy false, intuitionistic fuzzy rough true, intuitionistic fuzzy rough false and intuitionistic fuzzy rough incompatible, and on the basis of this, the intuitionistic fuzzy rough logic operations are given; then the semantic of intuitionistic fuzzy rough proposition formulas in approximate space is discussed; finally, the semantic reasoning methods are proposed as for the intuitionistic fuzzy rough propositional formula containing different logical conjunctions.

Keywords: rough set; rough logic; fuzzy rough logic; intuitionistic fuzzy rough logic

粗糙逻辑是经典命题逻辑增加粗糙算子后的扩充,其推理形式也源于经典逻辑。但在语义研究方面,为了更准确地描述其涵义,粗糙逻辑采用了有别于经典命题逻辑的语义模型。在文献[1]中 Pawlak 将经典命题逻辑中的 2 个逻辑真值("真"、"假")扩展为粗糙逻辑中的 5 个逻辑真值("真"、"假"、"粗糙真"、"粗糙假"、"粗糙不相容")。之后,闫林等[2-6]将粗糙公式扩展到了 n 维,给出公式的语义并讨论了语义推理。文献[7]中将模糊真值与粗糙逻辑真值结合,定义了 5 个模糊粗糙逻辑真值,并进行了语义和推理研究。本文在此基础上,将直觉模糊粗糙集引入到逻辑推理中,定义了 5 个直觉模糊粗糙逻辑真值,并讨论其语义推理。由于直觉模糊集增加了一个新的属性参数:非隶属度函数,因此直觉模糊粗糙逻辑的语义比粗糙逻辑和模糊粗糙逻辑的语义更加丰富,其推理也能够更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质。

1 预备知识

定义 1[8] 设 U 是一个非空有限论域,称 U 上形如 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 的三元组为 U 上的一个直觉模糊集,其中,函数 $\mu_A: U\rightarrow[0,1]$ 和 $\nu_A: U\rightarrow[0,1]$ 分别表示 U 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度,并且满足 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1, \forall x\in U$.

收稿日期:2012-09-29. **网络出版日期**:2014-02-20.
基金项目:辽宁省教育厅基金资助项目(L2012226).
通信作者:王艳平. E-mail: weiyanping65@yahoo.com.cn.

为方便,记 $A(x)=\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$,$U$ 上所有直觉模糊集构成的集合为 IFS(U) .

定义 2[9] 设 U 是一个非空有限论域, $A,B\in$ IFS(U) ,且具有下面的形式:

$$A(x)=\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$$
$$B(x)=\langle\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle$$

规定序及运算如下:

1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$, $\forall x\in U$;

2) $A=B$ 当且仅当 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)=\nu_B(x)$, $\forall x\in U$;

3) $A\cap B=\{\langle x,\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\max\{\nu_A(x),\nu_B(x)\}\rangle\mid x\in U\}$;

4) $A\cup B=\{\langle x,\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\min\{\nu_A(x),\nu_B(x)\}\rangle\mid x\in U\}$;

5) $A^C=\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\mid x\in U\}$.

显然,$\langle$IFS(U), $\subseteq\rangle$ 是一个偏序集。

定义 3[9] 设 (U,R) 是 Pawlak 近似空间, $U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 U 上由 R 导出的所有等价类。直觉模糊集 B 在 U 中的上、下近似分别记为 $\bar{B}$、$\underline{B}$,且被定义为 $U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 上的直觉模糊集 $\bar{B},\underline{B}:U/R\rightarrow[0,1]\times[0,1]$,使得

$$\bar{B}(X_i)=\{\langle x,\sup_{x\in X_i}\mu_B(x),\inf_{x\in X_i}\nu_B(x)\rangle\mid x\in U\}$$
$$\underline{B}(X_i)=\{\langle x,\inf_{x\in X_i}\mu_B(x),\sup_{x\in X_i}\nu_B(x)\rangle\mid x\in U\}$$

式中: $i=1,2,\cdots,n$.则称 $(\underline{B},\bar{B})$ 为一个直觉模糊粗糙集。

2 直觉模糊粗糙逻辑的概念

在定义直觉模糊粗糙逻辑概念之前首先给出粗糙逻辑的定义。

定义 4[10] 设 $M=(U,R)$ 为 Pawlak 近似空间, ϕ 为 M 下的原子公式, $\|$ 为解释函数, $\|:W\rightarrow P(U)$, $|\phi|\rightarrow X\in P(U)$, W 为所有粗糙逻辑公式的集合, $P(U)$ 为 U 的幂集,则粗糙逻辑由经典的二值逻辑增加到 5 个逻辑真值:真、假、粗糙真、粗糙假和粗糙不相容。

1)若 $|\phi|=U$,则称公式 ϕ 在 M 中真,记作 $\vDash_M\phi$;

2)若 $|\phi|\neq U$,则称公式 ϕ 在 M 中假,记作 $\nvDash_M\phi$;

3)若 $\bar{R}|\phi|=U$,则称公式 ϕ 在中 M 粗糙真,记作 $\vDash_R\phi$;

4)若 $\underline{R}|\phi|=\varnothing$,则称公式 ϕ 在 M 中粗糙假,记作 $\nvDash_R\phi$;

5)若 $\bar{R}|\phi|=U$ 且 $\underline{R}|\phi|=\varnothing$,则称公式 ϕ 在 M 中粗糙不相容。

定义 5 设 $M=(U,R)$ 为 Pawlak 近似空间, T 为直觉模糊概念的真值, ϕ 为 U 上的直觉模糊概念, $\|$ 为解释函数(直觉模糊映射), $\|:W\rightarrow$ IF(U), $|\phi|\rightarrow A\in$ IF(U), W 为全体模糊概念的集合, IF(U) 为全体直觉模糊集, $|\phi|$ 的直觉模糊真值定义为 $T(|\phi|)(x)=A(x)=\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$,其直觉模糊粗糙真值定义为

$$T(\underline{R}|\phi|)(x)=\underline{A}(x)=\langle\mu_{\underline{A}}(x),\nu_{\underline{A}}(x)\rangle$$
$$T(\bar{R}|\phi|)(x)=\bar{A}(x)=\langle\mu_{\bar{A}}(x),\nu_{\bar{A}}(x)\rangle$$

则直觉模糊粗糙逻辑由粗糙逻辑中的 5 个逻辑值增加到无限多个值。做以下规定:

1)若 $\mu_A(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\nu_A(x)<\frac{1}{2}$,则称 ϕ 在 M 中直觉模糊真,记作 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$;

2)若 $\mu_A(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\nu_A(x)\geqslant\frac{1}{2}$,则称 ϕ 在 M 中直觉模糊假,记作 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi$;

3)若 $\mu_{\bar{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\nu_{\bar{A}}(x)<\frac{1}{2}$,则称 ϕ 在 M 中直觉模糊粗糙真,记作 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi$;

4)若 $\mu_{\underline{A}}(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\nu_{\underline{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$,则称 ϕ 在 M 中直觉模糊粗糙假,记作 $\nvDash_{\mathrm{IFR}}\phi$;

5)若 $\mu_{\bar{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$, $\nu_{\bar{A}}(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\mu_{\underline{A}}(x)<\frac{1}{2}$, $\nu_{\underline{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$,则称 ϕ 在 M 中直觉模糊粗糙不相容。

3 直觉模糊粗糙集的逻辑运算

下面在直觉模糊粗糙逻辑语义的基础上,讨论直觉模糊粗糙逻辑的运算。

定义 6 设 ϕ、φ 是近似空间 $K=(U,R)$ 上直觉模糊公式,其真值分别为 $T(|\phi|)$ 和 $T(|\varphi|)$,则有

1) $T(|\neg\phi|)=\neg T(|\phi|)$,

2) $T(|\phi\wedge\varphi|)=T(|\phi|\cap|\varphi|)=T(|\phi|)\wedge T(|\varphi|)$,

3) $T(|\phi\vee\varphi|)=T(|\phi|\cup|\varphi|)=T(|\phi|)\vee T(|\varphi|)$,

4) $T(|\phi\rightarrow\varphi|)=T(|\neg\phi\vee\varphi|)=T(|\neg\phi|\cup|\varphi|)=\neg T(|\phi|)\vee T(|\varphi|)$,

5) $T(|\phi\leftrightarrow\varphi|)=T(|\phi\rightarrow\varphi|\cap|\phi\rightarrow\varphi|)=T(|\phi\rightarrow\varphi|)\wedge T(|\varphi\rightarrow\phi|)$。

根据上述概念,给出直觉模糊粗糙逻辑的语义推理。

在经典命题逻辑中,语义推理是围绕公式的真值所展开的关于前提与结论的真值关系的讨论,粗

糙语义推理是针对公式组成的前提和结论的粗糙逻辑值关系的讨论,而直觉模糊粗糙逻辑推理是针对直觉模糊公式的前提和结论的直觉模糊粗糙逻辑值关系进行的讨论[11]。经典逻辑值只有真与假 2 个值,直觉模糊粗糙逻辑值有 5 个:直觉模糊真、直觉模糊假、直觉模糊粗糙真、直觉模糊粗糙假、直觉模糊粗糙不相容,其语义自然要丰富得多,主要性质在以下的定理中给出。

4　直觉模糊粗糙逻辑语义推理

4.1　含有"→"公式

这里主要讨论 $T(|\phi\rightarrow\varphi|)(x)$ 和 $T(\bar{R}|\phi\rightarrow\varphi|)(x)$ 的一些性质,令

$$T(|\phi|)(x)=A(x)=\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$$
$$T(|\varphi|)(x)=B(x)=\langle\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle$$
$$T(\bar{R}|\phi|)(x)=\bar{A}(x)=\langle\mu_{\bar{A}}(x),\nu_{\bar{A}}(x)\rangle$$
$$T(\bar{R}|\varphi|)(x)=\bar{B}(x)=\langle\mu_{\bar{B}}(x),\nu_{\bar{B}}(x)\rangle$$

则有

$$\begin{gathered}T(|\phi\rightarrow\varphi|)(x)=\\ T(|\neg\phi\vee\varphi|)(x)=T(|\neg\phi|\cup|\varphi|)(x)=\\ \neg T(|\phi|)(x)\vee T(|\varphi|)(x)=\\ \langle\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\cup\langle\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle=\\ \langle\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}T(\bar{R}|\phi\rightarrow\varphi|)(x)=\\ T(\bar{R}|\neg\phi\vee\varphi|)(x)=T(\bar{R}(|\neg\phi|\cup|\varphi|))(x)=\\ \neg T(\bar{R}-|\phi|)(x)\vee T(\bar{R}|\phi|)(x)=\\ \langle\nu_{\bar{A}}(x),\mu_{\bar{A}}(x)\rangle\cup\langle\mu_{\bar{B}}(x),\nu_{\bar{B}}(x)\rangle=\\ \langle\nu_{\bar{A}}(x)\vee\mu_{\bar{B}}(x),\mu_{\bar{A}}(x)\wedge\nu_{\bar{B}}(x)\rangle\end{gathered}$$

设 ϕ、φ 是近似空间 $M=(U,R)$ 上的直觉模糊公式,则有下面的定理 1~6 成立。

定理 1

1)若 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\rightarrow\varphi$,即若 φ 直觉模糊真,则 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊真;

2)若 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\rightarrow\varphi$,即若 ϕ 直觉模糊假,则 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊真;

3)若 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi\rightarrow\varphi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$ 且 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$,即若 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊假,则 ϕ 直觉模糊真,φ 直觉模糊假。

证明

1) 因为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$,则 $\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\nu_B(x)<\frac{1}{2}$,所以对于 $T(|\phi\rightarrow\varphi|)(x)=\langle\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle$,显然有 $\nu_A(x)\vee\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)<\frac{1}{2}$,因此可得结论。

2) 因为 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi$,则 $\mu_A(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\nu_A(x)\geqslant\frac{1}{2}$,所以对于 $T(|\phi\rightarrow\varphi|)(x)=\langle\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle$,即有 $\nu_A(x)\vee\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)<\frac{1}{2}$,因此可得结论。

3) 因为 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi\rightarrow\varphi$,则 $\nu_A(x)\vee\mu_B(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $\nu_A(x)<\frac{1}{2}$,$\mu_B(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\mu_A(x)\geqslant\frac{1}{2}$,$\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$,故$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$,$\nvDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$,因此可得结论。

定理 2

1)若 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\rightarrow\varphi$,即若 φ 直觉模糊粗糙真,则 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊粗糙真;

2)若 $\nvDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\rightarrow\varphi$,即若 ϕ 直觉模糊粗糙假,则 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊粗糙真;

3)若 $\nvDash_{\mathrm{IFR}}\phi\rightarrow\varphi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi$ 且 $\nvDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$,即若 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊粗糙假,则 ϕ 直觉模糊粗糙真,φ 直觉模糊粗糙假。

证明　类似定理 1 可证。

定理 3

1)若 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\rightarrow\varphi$,即若 φ 直觉模糊真,则 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊粗糙真;

2)若 $\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\rightarrow\varphi$,即若 ϕ 直觉模糊假,则 $\phi\rightarrow\varphi$ 直觉模糊粗糙真。

证明

1) 因为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$,则 $\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\nu_B(x)<\frac{1}{2}$,又由于$|\varphi|\subseteq\bar{R}|\varphi|$,所以$\mu_{\bar{B}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\nu_{\bar{B}}(x)<\frac{1}{2}$,因此对于 $T(\bar{R}|\phi\rightarrow\varphi|)(x)=\langle\nu_{\bar{A}}(x)\vee\mu_{\bar{B}}(x),\mu_{\bar{A}}(x)\wedge\nu_{\bar{B}}(x)\rangle$,总有 $\nu_{\bar{A}}(x)\vee\mu_{\bar{B}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\mu_{\bar{A}}(x)\wedge\nu_{\bar{B}}(x)<\frac{1}{2}$,因此可得结论。

2)同理可证。

在经典命题逻辑语义推理和模糊粗糙逻辑推理中,若 $(\phi\rightarrow\varphi)\wedge\phi$ 为真,则 φ 也为真,记作 $(\phi\rightarrow\varphi)\wedge\phi\vDash\varphi$[12].下面的定理表明:将其变为直觉模糊真和直觉模糊粗糙真后,上述结论仍成立。

定理 4

1)若 $\vDash_{\mathrm{IFM}}(\phi\rightarrow\varphi)\wedge\phi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$;

2)若 $\vDash_{\mathrm{IFR}}(\phi\rightarrow\varphi)\wedge\phi$,则 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$.

证明

1) $T(|(\phi\to\varphi)\wedge\phi|)(x)=T(|(\neg\phi\vee\varphi)\wedge\phi|)(x)=T(|\varphi\wedge\phi|)(x)=T(|\phi|)(x)\wedge T(|\varphi|)(x)=\langle\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle$。

因为 $\vDash_{\mathrm{IFM}}(\phi\to\varphi)\wedge\phi$，则有 $\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_A(x)\vee\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，所以，$\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，因此可得结论。

2) $T(\overline{R}-|(\phi\to\varphi)\wedge\phi|)(x)=T(\overline{R}|(\neg\phi\vee\varphi)\wedge\phi|)(x)=T(\overline{R}|\varphi\wedge\phi|)(x)=T(\overline{R}(|\phi|\cap|\varphi|))(x)=\langle a,b\rangle$

因为$\vDash_{\mathrm{IFR}}(\phi\to\varphi)\wedge\phi$，则有 $a\geqslant\frac{1}{2},b<\frac{1}{2}$，由于 $\overline{R}|\phi\wedge\varphi|\subseteq\overline{R}|\phi|\cap\overline{R}|\varphi|$，而 $T(\overline{R}|\phi|)(x)\wedge T(\overline{R}|\varphi|)(x)=\langle\mu_{\bar{A}}(x)\wedge\mu_{\bar{B}}(x),\nu_{\bar{A}}(x)\vee\nu_{\bar{B}}(x)\rangle$，于是有$\mu_{\bar{A}}(x)\wedge\mu_{\bar{B}}(x)\geqslant a\geqslant\frac{1}{2},\nu_{\bar{A}}(x)\vee\nu_{\bar{B}}(x)<b<\frac{1}{2}$，所以$\mu_{\bar{B}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$，$\nu_{\bar{B}}(x)<\frac{1}{2}$，因此结论得证。

在定理4中，若把$\vDash_{\mathrm{IFR}}(\phi\to\varphi)\wedge\phi$，则$\vDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$改为：若$\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\to\varphi$且$\vDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$，则$\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi$，其结论不成立。然而，若把上式中的条件加强，即把$\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\to\varphi$改为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\to\varphi$，$\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi$改为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$，则结论成立，即有下面定理。

定理5 如果$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\to\varphi$且$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$，则$\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$，进而有$\vDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$.

证明 因为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\to\varphi$，所以对$T(|\phi\to\varphi|)(x)=\langle\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle$，有$\nu_A(x)\vee\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，$\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)<\frac{1}{2}$。

又由$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$，所以对$T(|\phi|)=\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$有$\mu_A(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_A(x)<\frac{1}{2}$。于是$\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，$\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，即$\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$成立。

又因为$|\varphi|\subseteq\overline{R}|\varphi|$，故$\frac{1}{2}\leqslant\mu_B(x)\leqslant\mu_{\bar{B}}(x)$，$\nu_{\bar{B}}(x)\leqslant\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，因此可得结论。

上述条件过于严格，若把条件放宽，则结论仍然成立，即有下面的定理。

定理6

1) 如果$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\to\varphi$且对于$T(|\phi|\cup|\varphi|)(x)=\langle\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle$，有$\mu_A(x)\vee\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，则$\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$且$\vDash_{\mathrm{IFR}}\varphi$.

2) 如果$\vDash_{\mathrm{IFM}}\varphi$且对于$T(|\phi|\cap|\varphi|)(x)=\langle\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle$，有$\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)<\frac{1}{2},\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，则$\nvDash_{\mathrm{IFR}}\phi\to\varphi$且$\nvDash_{\mathrm{IFM}}\phi\to\varphi$.

证明

1) 因为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi\to\varphi$，所以对$T(|\phi\to\varphi|)(x)=\langle\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle$，有$\nu_A(x)\vee\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，$\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，又由$\mu_A(x)\vee\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，$\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，则必有$\mu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，$\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，又因为$|\varphi|\subseteq\overline{R}|\varphi|$，所以$\frac{1}{2}\leqslant\mu_B(x)\leqslant\mu_{\bar{B}}(x)$，$\nu_{\bar{B}}(x)\leqslant\nu_B(x)<\frac{1}{2}$，因此可得结论。

2) 因为$\vDash_{\mathrm{IFM}}\phi$，则有$\mu_A(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_A(x)<\frac{1}{2}$，又因为$\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)<\frac{1}{2},\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，所以有$\mu_B(x)<\frac{1}{2},\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$。而$T(|\phi\to\varphi|)(x)=T(|\neg\phi\vee\varphi|)(x)=\langle\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle$，因此有$\nu_A(x)\vee\mu_B(x)<\frac{1}{2}$，$\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$。又因为$|\phi\to\varphi|\supseteq\underline{R}|\phi\to\varphi|$，所以对$T(\underline{R}|\phi\to\varphi|)(x)=\langle\nu_{\underline{A}}(x)\vee\mu_{\underline{B}}(x),\mu_{\underline{A}}(x)\wedge\nu_{\underline{B}}(x)\rangle$，有$\nu_{\underline{A}}(x)\vee\mu_{\underline{B}}(x)\leqslant\nu_A(x)\vee\mu_B(x)<\frac{1}{2}$，$\mu_{\underline{A}}(x)\wedge\nu_{\underline{B}}(x)\geqslant\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\geqslant\frac{1}{2}$，因此可证得结论。

4.2 含有“$\neg$”公式

定理7 设ϕ是近似空间$M=(U,R)$上的直觉模糊公式，则如果ϕ在$M=(U,R)$上直觉模糊粗糙不相容，则$\neg\phi$在M上也直觉模糊粗糙不相容。

证明 令$T(\underline{R}|\phi|)(x)=\langle\mu_{\underline{A}}(x),\nu_{\underline{A}}(x)\rangle$，$T(\underline{R}|\phi|)(x)=\langle\mu_{\underline{A}}(x),\nu_{\underline{A}}(x)\rangle$。因为$\phi$在$M=(U,R)$上直觉模糊粗糙不相容，所以有$\mu_{\bar{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_{\bar{A}}(x)<\frac{1}{2}$且$\mu_{\underline{A}}(x)<\frac{1}{2},\nu_{\underline{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$，又由$\overline{R}|\neg\phi|=\overline{R}(\neg|\phi|)=\neg\underline{R}|\phi|$，$\underline{R}|\neg\phi|=\underline{R}(\neg|\phi|)=\neg\overline{R}|\phi|$，所以$T(\overline{R}|\neg\phi|)(x)=\neg T(\underline{R}|\phi|)=\langle\nu_{\underline{A}}(x),\mu_{\underline{A}}(x)\rangle$，$T(\underline{R}|\neg\phi|)(x)=$

$\neg\, T(\bar{R}\mid\phi\mid) = \langle \nu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{A}}(x)\rangle$。

故 $\neg\,\phi$ 在 M 上直觉模糊粗糙不相容。

4.3　含有“ ∧ , ∨ ”公式

定理 8　设 ϕ 是近似空间 $M=(U,R)$ 上直觉的模糊原子公式,若 ϕ 在 $M=(U,R)$ 上直觉模糊粗糙不相容,则对 $\forall\phi$,有 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi\vee\varphi$ 且 $\nvDash_{\mathrm{IFR}}\phi\wedge\varphi$,即 $\phi\vee\varphi$ 在 M 上直觉模糊粗糙真,$\phi\wedge\varphi$ 在 M 上直觉模糊粗糙假。

证明

$$T(\bar{R}\mid\phi\mid)(x) = \bar{A}(x) = \langle \mu_{\bar{A}}(x), \nu_{\bar{A}}(x)\rangle$$

$$T(\underline{R}\mid\phi\mid)(x) = \langle \mu_{\underline{A}}(x), \nu_{\underline{A}}(x)\rangle$$

$$T(\bar{R}\mid\varphi\mid)(x) = \bar{B}(x) = \langle \mu_{\bar{B}}(x), \nu_{\bar{B}}(x)\rangle$$

由题意有 $\vDash_{\mathrm{IFR}}\phi$ 和 $\nvDash_{\mathrm{IFR}}\phi$,即 $\mu_{\bar{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$,$\nu_{\bar{A}}(x)<\frac{1}{2}$ 且 $\mu_{\underline{A}}(x)<\frac{1}{2}$,$\nu_{\underline{A}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$。

所以对

$$\begin{aligned}
&T(\bar{R}\mid\phi\vee\varphi\mid)(x)=\\
&T(\bar{R}\mid\phi\mid)(x)\vee T(\bar{R}\mid\varphi\mid)(x)=\\
&\langle \mu_{\bar{A}}(x)\vee\mu_{\bar{B}}(x), \nu_{\bar{A}}(x)\vee\nu_{\bar{B}}(x)\rangle\\
&T(\underline{R}\mid\phi\wedge\varphi\mid)(x)=\\
&T(\underline{R}\mid\phi\mid)(x)\wedge T(\underline{R}\mid\varphi\mid)(x)=\\
&\langle \mu_{\bar{A}}(x)\wedge\mu_{\underline{B}}(x), \nu_{\underline{A}}(x)\wedge\nu_{\underline{B}}(x)\rangle
\end{aligned}$$

可得

$$\mu_{\bar{A}}(x)\vee\mu_{\bar{B}}(x)\geqslant\frac{1}{2},\nu_{\bar{A}}(x)\wedge\nu_{\bar{B}}(x)<\frac{1}{2}$$

$$\mu_{\underline{A}}(x)\wedge\mu_{\underline{B}}(x)<\frac{1}{2},\nu_{\underline{A}}(x)\vee\nu_{\underline{B}}(x)\geqslant\frac{1}{2}$$

因此可得结论。

5　结束语

本文所讨论的直觉模糊粗糙逻辑的语义推理是在直觉模糊粗糙集的基础上进行的逻辑推理,这种逻辑推理拓展了经典逻辑中的语义推理。因此,在直觉模糊粗糙集基础上进行的直觉模糊粗糙语义推理为逻辑推理开辟了新径,与此同时逻辑推理也为直觉模糊粗糙集理论的研究提供新思路。因此,直觉模糊粗糙集理论与逻辑推理的融合为双方的深入研究互相指明了方向。

参考文献:

[1] PAWLAK Z. Rough logic[J]. Bulletin of Polish Academy of Science: Technical Sciences, 1987, 35(5/6): 253-258.

[2] 闫林.数理逻辑基础与粒计算[M].北京:科学出版社, 2007: 320-322.

[3] SHE Yanhong, HE Xiaoli, WANG Guojun. Rough truth degrees of formulas and approximate reasoning in rough logic [J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 107(10): 67-83.

[4] VILÉM N. Reasoning about mathematical fuzzy logic and its future[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 192(2): 25-44.

[5] FERNANDO B, UMBERTO S. Generalized fuzzy rough description logics[J]. Information Sciences, 2012, 189(2): 43-62.

[6] BEATA K. Three-valued logic for reasoning about covering-based rough sets[J]. Rough Sets and Intelligent Systems, 2013, 42(1): 439-461.

[7] 李丽,陈永胜.模糊粗糙逻辑的语义[J].辽宁工业大学学报, 2008, 28(2): 135-137.
LI Li, CHEN Yongsheng. Semantics of fuzzy rough logic [J]. Journal of Liaoning University of Technology, 2008, 28(2): 135-137.

[8] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[9] 张瑜,王艳平.直觉模糊粗糙集模型[J].辽宁工业大学学报, 2008, 28(6): 414-420.
ZHANG Yu, WANG Yanping. Intuitionistic fuzzy rough sets model[J]. Journal of Liaoning University of Technology, 2008, 28(6): 414-420.

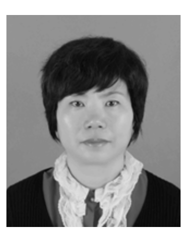
[10] 张文修,吴伟志,梁吉业,等.粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社, 2001: 98-100.

[11] 雷英杰,王宝树.基于直觉模糊逻辑的近似推理方法[J].控制与决策, 2006, 21(3): 305-310.
LEI Yingjie, WANG Baoshu. Approximate reasoning method based on intuitionistic fuzzy logic[J]. Control and Decision, 2006, 21(3): 305-310.

[12] 王艳平,徐义,窦金培.模糊粗糙逻辑语义及其推理[J].辽宁工业大学学报, 2010, 30(4): 259-264.
WANG Yanping, XU Yi, DOU Jinpei. Fuzzy rough logic semantic and its reasoning[J]. Journal of Liaoning University of Technology, 2010, 30(4): 259-264.

作者简介:

申立平,女,1985 年生,硕士研究生,主要研究方向为模糊集与粗糙集,发表学术论文 2 篇。



王艳平,女,1965 年生,教授,主要研究方向为模糊集与粗糙集,发表学术论文 30 余篇。