DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.201009010
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.TP.20120416.0852.003.html

模糊相似关系下变精度模糊粗糙集

邓廷权[1,2],杨成东[2,3],张月童[1]
(1. 哈尔滨工程大学 理学院，黑龙江 哈尔滨 150001；2. 哈尔滨工程大学 计算机科学与技术学院，黑龙江 哈尔滨 150001；3. 临沂大学 信息学院，山东 临沂 276000)

摘　要:经典变精度模糊粗糙集模型是基于模糊等价关系建立的.在实际应用中，模糊等价关系很难直接构造，需要通过求模糊相似关系的传递闭包生成.对模糊关系的这种改造会丢失较多有价值的信息，而且还增大了模糊粗糙集应用的计算复杂度.基于模糊逻辑算子构造2个模糊集的相对错误包含度，构造性地提出基于模糊相似关系的变精度模糊粗糙集模型，研究了该模型的性质.该模型一方面具有变精度粗糙集的优点，对噪声数据具有很好的容错能力，另一方面是基于模糊相似关系建立的，其应用范围更为广泛.

关键词:变精度粗糙集；模糊相似关系；相对错误包含度；模糊逻辑算子；模糊粗糙集
中图分类号:TP18；TP301　**文献标识码**:A　**文章编号**:1673-4785(2012)02-0148-05

Fuzzy similarity relation based variable precision fuzzy rough sets

DENG Tingquan[1,2], YANG Chengdong[2,3], ZHANG Yuetong[1]
(1. College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. College of Computer Science and Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 3. School of Informatics, Linyi University, Linyi 276000, China)

Abstract: A classical variable precision fuzzy rough set was built on the basis of fuzzy equivalent relationships. Nonetheless, it is hard to directly obtain the fuzzy equivalent relationships, which are usually replaced by a closure of fuzzy equivalent relationships, and this method causes a loss of much valuable information and increases the computation complexity in the application of the fuzzy rough set. This paper first took advantage of a fuzzy logical operator to construct fuzzy relative error rates of classification, and then proposed a variable precision fuzzy rough set model based on fuzzy similarity relationships. Moreover, the properties of this model were investigated. On the one hand, the model is able to deal with noise data with the advantages of variable precision rough sets; on the other hand, since it is based on fuzzy similarity relationships, the model could be applied more widely.

Keywords: variable precision rough sets; fuzzy similarity relation; relative error rates of classification; fuzzy logical operator; fuzzy rough sets

Z. Pawlak[1]于1982年提出的粗糙集是一种有效的软计算工具，已经广泛应用于决策分析、数据挖掘、机器学习和人工智能等各个领域.随着理论研究的深入和应用的需求，经典粗糙集有了进一步的拓展，其中变精度粗糙集和模糊粗糙集是2种典型的代表.

从实际应用的角度而言，由于数据获取或数据处理方面的原因，信息系统或数据库中不可避免地含有噪音，而经典粗糙集对噪音数据比较敏感.鉴于此，1993年W. Ziarko[2]引入了集合的相对错误包含度的概念，并提出了变精度粗糙集模型，该模型有效地解决了人为错误或噪音导致的错误分类问题，具有较好的抗噪和容错能力.

经典粗糙集处理的是清晰(分明)的、离散的符号值数据，但在实际中经常遇到连续的、具有模糊性的数据.对于这类问题，经典做法是将连续的属性值离散化后运用经典粗糙集处理，这种方法造成了

收稿日期:2010-09-19.　**网络出版日期**:2012-04-16.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771043)；水下机器人国防技术重点实验室基金资助项目(002010260730).
通信作者:杨成东.E-mail:yangchengdong2008@163.com.

一定的信息损失. 模糊粗糙集[3-5]将粗糙集和模糊集理论结合起来，利用数据相似性程度作为数据间的相似关系，从而避免了连续属性值离散化带来的信息损失.

变精度模糊粗糙集[6-9]是变精度粗糙集与模糊粗糙集的融合. 它不仅具有变精度粗糙集的特点，具有一定的抗噪和容错能力，也具有模糊粗糙集的特点，能够处理具有模糊性的知识.

然而，变精度模糊粗糙集是基于模糊等价关系建立的. 在实际应用中，很难直接构造模糊等价关系，往往先构造模糊相似关系，再通过求模糊相似关系的传递闭包将其模糊等价关系. 文献[10]指出,这种方法会丢失较多有价值的信息. 因此，研究模糊相似关系下的变精度模糊粗糙集模型具有重要的意义.

1　基础知识

首先回顾经典粗糙集模型.

定义 1[1]　设 U 是有限论域,R 是 U 上的一个等价关系,$X\subseteq U$,X 的 R 下近似和 R 上近似分别定义为$\underline{R}X=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}$,$\overline{R}X=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\varnothing\}$. 集合 $bn_R(X)=\overline{R}X-\underline{R}X$ 称为 X 的 R 边界域;$\mathrm{pos}_R(X)=\underline{R}X$ 称为 X 的 R 正域; $\mathrm{neg}_R(X)=U-\overline{R}X$ 称为 X 的 R 负域. 显然,$\overline{R}X=\mathrm{pos}_R(X)\cup bn_R(X)$.

在经典粗糙集模型基础上，W. Ziarko 提出变精度粗糙集模型，增强了模型的抗噪和容错能力.

定义 2[2]　设 U 是有限论域, R 是 U 上的一个等价关系,$0\leqslant\beta<0.5$,$X\subseteq U$, 定义 X 的 β 下近似和 β上近似分别为

$$\underline{R}^{\beta}X=\cup\{E\in U/R\mid c(E,X)\leqslant\beta)\},$$
$$\overline{R}^{\beta}X=\cup\{E\in U/R\mid c(E,X)\leqslant 1-\beta)\}.$$

式中:$c(X,Y)$为集合 X 和 Y 的相对错误包含度，定义如式(1)

$$c(X,Y)=\begin{cases}1-|X\cap Y|/|X|, & |X|>0;\\ 0, & |X|=0.\end{cases}\tag{1}$$

式中:$|X|$为集合 X 的基数.

2　模糊集的相对错误包含度

论域 U 的全体模糊子集组成的集合称为 U 的模糊幂集，记作 $F(U)$. 给定论域 U 和 V, 则 $U\times V$ 的模糊子集 $R\in F(U\times V)$是一个模糊关系. 一个模糊关系 R 称为模糊相似关系，若 R 满足:

1)自反性:$R(x,x)=1,\forall x\in U$;

2)对称性:$R(x,y)=R(y,x),\forall x,y\in U$.

模糊相似关系 R 通常不满足传递性，即 R 不满足 $R\circ R\subseteq R$. 若满足传递性，则称 R 为模糊等价关系.

模糊逻辑算子是模糊集理论和模糊逻辑中的重要概念，在模糊信息分析和处理中具有重要应用. T-范数和模糊蕴含是 2 种重要的模糊逻辑算子.

若 $*$ 满足 1)交换律;2)结合律;3)关于 2 个变量都是递增的;4)边界条件:$0*b=0;1*b=b$ 对任意 $b\in[0,1]$成立,称$[0,1]$上的二元运算 $*$ 为 T-范数. 若$\to$满足 1)边界条件:$1\to0=0,0\to0=0\to1=1\to1=1$;2)关于第 1 个变量单调递减，关于第 2 个变量单调递增,称$[0,1]$上的二元运算$\to$为模糊蕴含算子.

有很多 T-范数和模糊蕴含算子[11]. 比如

$$a*b=\min(a,b),a*b=ab,$$
$$a*b=\max(0,a+b-1),\tag{2}$$

都是典型且常用的 T-范数. 模糊蕴含算子常通过 T-范数以如下方式构造:

1)负蕴含:$a\to b=1-T(a,1-b)$.

2)剩余蕴含:$a\to b=\sup\{\lambda\in[0,1]\mid a*\lambda\leqslant b\}$, 其中 sup 为集合的上确界.

本文只考虑 T-范数的模糊剩余蕴含算子. 式(2)对应的模糊剩余蕴含算子分别为:

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b;\\ t, & a>b.\end{cases}$$

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b;\\ b/a, & a>b.\end{cases}$$

$$a\to b=\min\{1,1-a+b\}.$$

为了处理模糊信息，本文首先定义了基于模糊逻辑算子的模糊相对错误包含度的概念.

定义 3　设 F_1 和 F_2 是有限论域 U 上的模糊子集，即 $F_1,F_2\in F(U)$. 模糊集 F_1 和 F_2 的相对错误包含度 $e(F_1,F_2)$定义为

$$e(F_1,F_2)=1-\frac{\sum_{x\in S(F_1)}F_1(x)\to F_2(x)}{|S(F_1)|}.$$

式中:$S(F_i)$为支集，即 $S(F_i)=\{x\in U\mid F_i(x)>0\}$.

定义 3 中的模糊相对错误包含度是定义 2 中分明集合的相对错误包含度在模糊集中的推广.

命题 1　对 $\forall F,F_1,F_2\in F(U)$,若 $F_1\subseteq F_2$,则 $e(F,F_1)\geqslant e(F,F_2)$.

证明　当 $F=\varnothing$时,$e(F,F_1)=e(F,F_2)=0$. 当 $F\neq\varnothing$时，因为 $F_1\subseteq F_2$，则对于任意的 $x\in U$，有 $F_1(x)\leqslant F_2(x)$. 由$\to$算子定义可知，它是关于第 2 变量递增的. 所以,

$$\sum_{x \in S(F)} F(x) \to F_1(x) \leqslant \sum_{x \in S(F)} F(x) \to F_2(x).$$

因此，

$$1 - (\sum_{x \in S(F)} F(x) \to F_1(x))/S(F) \geqslant$$

$$1 - (\sum_{x \in S(F)} F(x) \to F_2(x))/S(F),$$

即 $e(F,F_1) \geqslant e(F,F_2)$.

3 模糊相似关系下变精度模糊粗糙集

定义 4 设 U 是有限论域, $F(U)$ 是 U 的模糊幂集, R 是 $U \times U$ 上的模糊相似关系. $\forall F \in F(U)$, F 关于 R 的 β 下模糊近似 $\underline{R}^\beta F$ 与 β 上模糊近似 $\overline{R}^\beta F$ 分别定义为:

$$\underline{R}^\beta F(x) = \begin{cases} \underline{\omega}_F(x), & \underline{W}_F^x \neq \varnothing; \\ 0, & \underline{W}_F^x = \varnothing. \end{cases}$$

$$\overline{R}^\beta F(x) = \begin{cases} \overline{\omega}_F(x), & \overline{W}_F^x \neq \varnothing; \\ 0, & \overline{W}_F^x = \varnothing. \end{cases}$$

式中: β 是精度控制参数, $0 \leqslant \beta \leqslant 0.5$;

$$\underline{W}_F^x = \{y \in U \mid e([y]_R, F) \leqslant \beta, R(y,x) \leqslant \sup(F)\},$$

$$\overline{W}_F^x = \{y \in U \mid e([y]_R, F) < 1 - \beta\};$$

$$\underline{\omega}_F(x) = \sup\{R(y,x) \mid y \in \underline{W}_F^x\},$$

$$\overline{\omega}_F(x) = \sup\{R(y,x) \mid y \in \overline{W}_F^x\},$$

$$\sup(F) = \sup_{x \in U}\{F(x)\};$$

当 R 为 U 上的经典等价关系, F 为 U 的分明子集且 $0 \leqslant \beta < 0.5$ 时, 定义 4 退化为定义 2; 当 R 为经典等价关系, F 为 U 的分明子集且 $\beta = 0$ 时, 定义 4 退化为定义 1. 因此, 有下面 2 个命题.

命题 2 当 R 为 U 上的经典等价关系, F 为 U 的分明子集, $0 \leqslant \beta < 0.5$ 时, 该模型退化为 Ziarko 变精度粗糙集模型.

证明 仅证 β 下模糊近似可以退化到 Ziarko 下近似, β 上模糊近似可以退化到 Ziarko 上近似的证明类似.

用 $\underline{R}_\beta^Z F$ 表示集合 F 在 Ziarko 模型下的 β 下近似 $\underline{R}_\beta^Z F = \cup\{E \in U/R \mid c(E,F) \leqslant \beta\}$, 经典等价关系 R 和分明子集 F 分别为特殊的模糊关系和模糊集. 下面证明 $\underline{R}_\beta F(x) = 1$, 当且仅当 $x \in \underline{R}_\beta^Z F$.

对于 $\forall x \in \underline{R}_\beta^Z F$, 则 $\exists E \in U/R$, 使得 $x \in E$ 且 $c(E,F) \leqslant \beta$. 若 $E \subseteq F$, 那么 $e(E,F) = 0$; 若 $c(E,F) \leqslant \beta$, 根据定义 1 可知, $e(E,F) \leqslant \beta$, 即 $x \in \underline{W}_F^x$. 根据 $\underline{\omega}_F(x)$ 的定义可知, $\underline{R}_\beta F(x) = 1$.

反之, 若 $\underline{R}_\beta F(x) = 1$, 则 $\exists y \in U$, 使得 $e([y]_R, F) \leqslant \beta$, 且 $R(y,x) = 1$.

由于 R 是经典的等价关系, 所以 $[y]_R$ 就是 y 的等价类且 $x \in [y]_R$.

根据经典集合的相对错误包含度与模糊相对错误包含度的定义可知,

$$c([y]_R, F) \leqslant \beta, \text{即 } x \in \underline{R}_\beta^Z F.$$

证毕.

命题 3 当 R 为经典等价关, F 为 U 的分明子集, $\beta = 0$ 时, 该模型退化为 Pawlak 粗糙集.

证明同理于命题 2.

4 变精度模糊粗糙集的性质

下面研究新建立的变精度模糊粗糙集的性质.

性质 1 当 $0 \leqslant \beta < 0.5$ 时, β 模糊近似有以下性质:

1) $\underline{R}^\beta F \subseteq \overline{R}^\beta F$;

2) $\underline{R}^\beta \varnothing = \varnothing$, $\underline{R}^\beta U = \overline{R}^\beta U = U$;

3) 若 $F_1 \subseteq F_2$, 则 $\underline{R}^\beta F_1 \subseteq \underline{R}^\beta F_2$, $\overline{R}^\beta F_1 \subseteq \overline{R}^\beta F_2$;

4) $\underline{R}^\beta (F_1 \cup F_2) \supseteq \underline{R}^\beta F_1 \cup \underline{R}^\beta F_2$;

5) $\underline{R}^\beta (F_1 \cap F_2) \subseteq \underline{R}^\beta F_1 \cap \underline{R}^\beta F_2$;

6) $\overline{R}^\beta (F_1 \cup F_2) \supseteq \overline{R}^\beta F_1 \cup \overline{R}^\beta F_2$;

7) $\overline{R}^\beta (F_1 \cap F_2) \subseteq \overline{R}^\beta F_1 \cap \overline{R}^\beta F_2$.

证明 1) $\forall x \in U$, 若 $\underline{W}_F^x = \varnothing$, 那么 $\underline{R}_\beta F(x) = 0$, 显然 $\underline{R}_\beta F(x) \leqslant \overline{R}_\beta F(x)$. 若 $\underline{W}_F^x \neq \varnothing$, 则 $\forall y \in \underline{W}_F^x$, 都满足 $e([y]_R, F) \leqslant \beta$. 由于 $0 \leqslant \beta < 0.5$, 所以 $e([y]_R, F) \leqslant 1 - \beta$, 即 $y \in \overline{W}_F^x$. 根据 $\underline{R}_\beta F$ 与 $\overline{R}_\beta F$ 的定义可知, $\underline{R}_\beta F(x) \leqslant \overline{R}_\beta F(x)$.

由 x 的任意性得 $\underline{R}_\beta F \subseteq \overline{R}_\beta F$.

2) $\forall x \in U$, 若 $\underline{W}_\varnothing^x = \varnothing$, 因为 $\sup(\varnothing) = 0$, 所以对于 $\forall y \in \underline{W}_F^x$, 都有 $R(y,x) \leqslant \sup(\varnothing) = 0$, 根据 $\underline{\omega}_F(x)$ 的定义, 可知 $\underline{R}_\beta \varnothing(x) = 0$; 若 $\underline{W}_\varnothing^x = \varnothing$, 根据 $\underline{R}_\beta F(x)$ 的定义可知, $\underline{R}_\beta \varnothing(x) = 0$. 由 x 的任意性得 $\underline{R}^\beta \varnothing = \varnothing$.

由性质 1 得, $\underline{R}^\beta U \subseteq \overline{R}^\beta U$, 因此仅需证 $\underline{R}^\beta U = U$. $\forall x \in U$, 都有 $U(x) = 1$, 所以 $\forall y \in U$, 都有 $e([y]_R, U) = 0 \leqslant \beta$. 而 $R(y,x) \leqslant \sup(U) = 1$, 所以 $\underline{W}_U^x = U$. 由于 R 是模糊相似关系, 所以 $R(x,x) = 1$. 根据 $\underline{\omega}_F(x)$ 的定义可得, $\underline{R}_\beta U(x) = 1$. 由 x 的任意性得 $\underline{R}_\beta U = U$.

3) $\forall x \in U$, 若 $\underline{W}_{F_1}^x = \varnothing$, 根据 $\underline{R}^\beta F(x)$ 的定义可知, $\underline{R}^\beta F_1(x) = 0$, 显然 $\underline{R}^\beta F_1(x) \leqslant \overline{R}^\beta F_2(x)$.

若 $\underline{W}_{F_1}^x \neq \varnothing$, 那么对于 $\forall y \in \underline{W}_{F_1}^x$, 都满足 $e([y]_R, F_1) \leqslant \beta$ 且 $R(y,x) \leqslant \sup(F_1)$. 由于 $F_1 \subseteq F_2$, 有 $e([y]_R, F_2) \leqslant e([y]_R, F)_1 \leqslant \beta$. 又由 $R(y,x) \leqslant \sup(F_1) \leqslant \sup(F_2)$ 得 $y \in \underline{W}_{F_2}^x$, 即 $\underline{W}_{F_1}^x \subseteq \underline{W}_{F_2}^x$.

根据 $\underline{R}^\beta F(x)$ 的定义可知, $\underline{R}^\beta F_1(x) \leqslant \underline{R}^\beta F_2(x)$,

即$\underline{R}^{\beta}_{F_1} \subseteq \underline{R}^{\beta}_{F_2}$.

同理可证 $\overline{R}^{\beta} F_1 \subseteq \overline{R}^{\beta} F_2$.

4）由 $F_1 \cup F_2 \supseteq F_1, F_1 \cup F_2 \supseteq F_2$ 和性质 3 可得 $\underline{R}^{\beta}(F_1 \cup F_2) \supseteq \underline{R}^{\beta} F_1$, $\underline{R}^{\beta}(F_1 \cup F_2) \supseteq \underline{R}^{\beta} F_2$. 所以，$\underline{R}^{\beta}(F_1 \cup F_2) \supseteq \underline{R}^{\beta} F_1 \cup \underline{R}^{\beta} F_2$.

5）由 $F_1 \cap F_2 \subseteq F_1, F_1 \cap F_2 \subseteq F_2$ 和性质 3 可得 $\underline{R}^{\beta}(F_1 \cap F_2) \subseteq \underline{R}^{\beta} F_1$, $\underline{R}^{\beta}(F_1 \cap F_2) \subseteq \underline{R}^{\beta} F_2$. 因此，$\underline{R}^{\beta}(F_1 \cap F_2) \subseteq \underline{R}^{\beta} F_1 \cap \underline{R}^{\beta} F_2$.

6）证明过程同性质 4）的证明过程.

7）证明过程同性质 5）的证明过程.

注：1）不能保证$\underline{R}^{\beta}(F_1 \cup F_2) = \underline{R}^{\beta} F_1 \cup \underline{R}^{\beta} F_2$. 反例如下：取 $a \to b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ b/a, & a > b \end{cases}$，令 $\beta = 0.25$，

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 1 & 0.18 & 0.92 & 0.44 \\ 0.6 & 0.18 & 1 & 0.73 & 0.81 \\ 0.4 & 0.92 & 0.73 & 1 & 0.09 \\ 0.05 & 0.44 & 0.81 & 0.09 & 1 \end{bmatrix},$$

$F_1 = \{0.2028, 0.1987, 0.6038, 0.2722, 0.1988\}$,

$F_2 = \{0.0153, 0.7468, 0.4451, 0.9318, 0.4660\}$,

则

$$\underline{R}^{\beta} F_1 = \{0, 0.2, 0.6, 0.4, 0.05\},$$

$$\underline{R}^{\beta} F_2 = \{0.2, 0.2, 0.6, 0.92, 0.44\},$$

$$\underline{R}^{\beta}(F_1 \cup F_2) = \{0.4, 0.92, 0.81, 0.92, 0.44\},$$

显然，$\underline{R}^{\beta}(F_1 \cup F_2) \neq \underline{R}^{\beta} F_1 \cup \underline{R}^{\beta} F_2$.

2）β 上模糊近似和 β 下模糊近似与 经典变精度相同，也不满足扩张性和反扩张性.

取 $a \to b = \begin{cases} 1 & a \leqslant b \\ b/a, & a > b \end{cases}$，令 $\beta = 0.45$，

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.85 \\ 0.4 & 1 & 0.68 & 0.92 & 0.84 \\ 0.6 & 0.68 & 1 & 0.73 & 0.81 \\ 0.4 & 0.92 & 0.73 & 1 & 0.79 \\ 0.85 & 0.84 & 0.81 & 0.79 & 1 \end{bmatrix},$$

$\underline{R}^{\beta} F = \{0.1028, 0.2887, 0.1038, 0.3500, 0.8980\}$，

则$\underline{R}^{\beta} F = \{0, 0.4, 0.6, 0.4, 0.85\}$，$\overline{R}^{\beta} F = \{1, 0.68, 1, 0.73, 0.85\}$.

显然$\underline{R}^{\beta} F \not\subset F \not\subset \overline{R}^{\beta} F$. 因此，$\beta$ 上模糊近似和 β 下模糊近似也不满足扩张性和反扩张性.

3）β 上模糊近似和 β 下模糊近似与经典变精度相同，也不满足幂等性.

仍取 2）中的例子，按照定义可以计算得 $\underline{R}^{\beta}(\underline{R}^{\beta} F) = \{0.6, 0.92, 0.73, 0.92, 0.85\}$.

显然$\underline{R}^{\beta}(\underline{R}^{\beta} F) \neq \underline{R}^{\beta} F$，所以 β 下模糊近似不满足幂等性. 同样，β 上模糊近似也不满足幂等性.

4）一般地，$\overline{R}^{\beta} \varnothing \neq \varnothing$.

例如，取 $a \to b = \min(1, 1 - a + b)$，

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.7 \\ 0.2 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}.$$

则 $\beta = 0.45$ 时，$\overline{R}^{\beta} \varnothing = \{1, 0.1, 0.2\}$. 因此 $\overline{R}^{\beta} \varnothing \neq \varnothing$. 这是条件过宽所致，特别地，对模糊蕴含算子加个限制，则空集的上近似为空集.

性质 2　若模糊蕴含算子满足 $s \to 0 = 0 (s > 0)$，则 $\overline{R}^{\beta} \varnothing = \varnothing$.

证明　根据模糊相对错误包含度的定义可知，若 $s \to 0 = 0 (s > 0)$，则 $e(F_1, F_2) = 1$. 因为 $[x]_R \neq \varnothing$，所以 $\forall x \in U$，都有 $e([x]_R, \varnothing) = 1$. 由于$0 \leqslant \beta < 0.5$，所以没有 $y \in U$ 满足 $e([y]_R, \varnothing) < 1 - \beta$，即 $\underline{W}^x_{\varnothing} = \varnothing$. 根据 $\overline{R}_{\beta} F(x)$ 的定义可知，$\overline{R}_{\beta} \varnothing(x) = 0$. 综上所述，$\forall x \in U$，都有 $\overline{R}_{\beta} \varnothing(x) = 0$，即 $\overline{R}_{\beta} \varnothing = \varnothing$.

性质 3　若 $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < 0.5$，则

$$\underline{R}_{\beta_1} F \subseteq \underline{R}_{\beta_2} F, \overline{R}_{\beta_1} F \supseteq \overline{R}_{\beta_2} F.$$

证明　$\underline{W}^x_{F\beta_1}$ 记为在 β_1 精度下的 $\underline{W}^x_F$，$\underline{W}^x_{F\beta_2}$ 记为在 β_2 精度下的 $\underline{W}^x_F$.

若$\underline{W}^x_{F\beta_1} = \varnothing$，显然$\underline{R}^{\beta_1} F(x) \leqslant \underline{R}^{\beta_2} F(x)$.

若$\underline{W}^x_{F\beta_1} \neq \varnothing$，则 $\forall y \in \underline{W}^x_{F\beta_2}$，都满足

$$e([y]_R, F) \leqslant \beta_1, R(y, x) \leqslant \sup(F).$$

由于 $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < 0.5$，所以 $e([y]_R, F) \leqslant \beta_2$，因此，$y \in \underline{W}^x_{F\beta_2}$，即$\underline{W}^x_{F\beta_1} \subseteq \underline{W}^x_{F\beta_2}$. 由$\underline{R}^{\beta} F(x)$的定义得$\underline{R}^{\beta_1} F(x) \leqslant \underline{R}^{\beta_2} F(x)$，$e([y]_R, F) \leqslant 1 - \beta$，即 $y \in \overline{W}^x_F$. 根据定义 4 可得$\underline{R}^{\beta} F(x) \leqslant \overline{R}^{\beta} F(x)$.

同理可证 $\overline{R}^{\beta_1} F \subseteq \overline{R}^{\beta_2} F$.

5　结　论

本文研究了基于模糊相似关系的变精度模糊粗糙集模型. 用模糊相似关系来刻画未知的集合. 新的变精度模糊粗糙集模型有如下优势：

1）该模型是对变精度粗糙集的一般化和模糊化；

2）该模型既能够处理连续值模糊信息，又具有一定程度的抗噪和容错能力；

3）该模型是基于模糊相似关系建立的，不需要对论域进行任何形式的划分，而是用模糊相似矩阵表示模糊信息，具有更大的灵活性和实用性.

参考文献：

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[2] ZIARKO W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Science, 1993, 46(1): 39-59.

[3]DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1999, 17: 191-209.

[4]郭海刚, 高井贵, 张振良. 模糊相似关系下的模糊粗糙集[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版, 2006, 29(3): 289-291.

GUO Haigang, GAO Jinggui, ZHANG Zhenliang. Fuzzy rough sets based on fuzzy similar relation[J]. Journal of Liaoning Normal University: Natural Science Edition, 2006, 29(3): 289-291.

[5]米据生, 吴伟志, 张文修. 粗糙集的构造与公理化方法[J]. 模式识别与人工智能, 2002, 15(3): 280-286.

MI Jusheng, WU Weizhi, ZHANG Wenxiu. Constructive and axiomatic approaches of the theory of rough sets[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002, 15(3): 280-286.

[6]李凡, 刘启和, 杨国玮. 变精度模糊粗糙集的一种定义[J]. 控制与决策, 2008, 23(11): 1206-1210.

LI Fan, LIU Qihe, YANG Guowei. Definition of variable precision fuzzy rough sets[J]. Contro1 and Decision, 2008, 23(11): 1206-1210.

[7]张东星, 苗夺谦, 李道国, 等. 基于数据库系统的可变精度粗糙集模型[J]. 计算机科学, 2005, 32(12): 172-174.

ZHANG Dongxing, MIAO Duoqian, LI Daoguo, et al. A variable precision rough set model based on database system[J]. Computer Science, 2005, 32(12): 172-174.

[8]黄春娥, 张振良. 基于截集的变精度模糊粗糙集模型[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(9): 200-203.

HUANG Chune, ZHANG Zhenliang. Variable precision fuzzy rough set model based on cut set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(9): 200-203.

[9]冯林, 王国胤. 用于数据分析的变精度模糊粗糙模型[J]. 西南交通大学学报, 2008, 43(5):582-589.

FENG Lin, WANG Guoyin. Variable precision fuzzy rough model for data analysis[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2008, 43(5): 582-589.

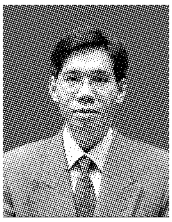
[10]王熙照, 赵素云. 基于相似关系的模糊粗糙集模型[J]. 计算机科学, 2004, 31(10A): 31-35.

WANG Xizhao, ZHAO Suyun. Modelling fuzzy rough sets based on similarity relation[J]. Computer Science, 2004, 31(10A): 31-35.

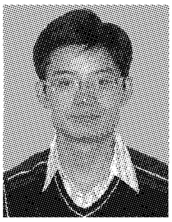
[11]尤飞, 冯艳宾, 李洪兴. 模糊蕴涵算子及其构造(I)[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 39(5): 606-611.

YOU Fei, FENG Yanbin, LI Hongxing. Fuzzy implication operators and their construction(I)[J]. Journal of Beijing Normal University: Natural Science, 2003, 39(5): 606-611.

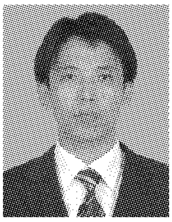
作者简介:



邓廷权,男,1965 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为模糊信息分析、数学形态学与图像分析、智能识别与计算机视觉等.主持国家自然科学基金、中国博士后科学基金、黑龙江省博士后科学基金等多项科研项目.近年来,发表学术论文 30 余篇,其中 10 余篇论文被 SCI、EI、ISPT 等检索.



杨成东,男,1984 年生,博士研究生,主要研究方向为数据挖掘、智能计算、粗糙集理论及其应用等.



张月童,男,1982 年生,硕士研究生,主要研究方向为智能计算、粗糙集理论等.