

# 一般齐次 T-S 模糊系统的逼近性能

王宁, 谭跃, 王丹, 吴志良

(大连海事大学轮机工程学院, 辽宁大连 116026)

**摘要:**为剖析一般齐次 T-S 模糊系统的逼近性能,通过广泛总结常用模糊集的特点,明确定义了一种具有普遍意义的输入空间的一般模糊划分(GFP).基于输入采用 GFP 的一般齐次 T-S 模糊系统的解析结构,证明了该类一般齐次 T-S 模糊系统能够以任意精度逼近任意非线性函数,并得到了一个其作为通用逼近器的充分条件.作为 GFP 的一种退化,进一步研究了输入采用线性模糊划分(LFP)的一般齐次 T-S 模糊系统的一阶逼近性能.仿真实例验证了所得理论结果的有效性,并考察了充分条件的保守性.这为基于齐次 T-S 模糊模型的复杂系统建模与控制提供了理论指导.

**关键词:**齐次 T-S 模糊系统;逼近性能;复杂系统;模糊划分

**中图分类号:**TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1673-4785(2010)05-0436-07

## Study on approximation capabilities of general homogenous T-S fuzzy systems

WANG Ning, TAN Yue, WANG Dan, WU Zhi-liang

(Marine Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

**Abstract:** In order to analyze approximation capabilities of general homogenous T-S fuzzy systems, the general fuzzy partition (GFP) with universal significance was definitely defined in the input space of fuzzy systems through comprehensively summarizing properties of common fuzzy sets. Based on the analytical structure, a large class of general homogenous T-S fuzzy systems was proven to be able to approximate any nonlinear function to any degree of accuracy, and a sufficient condition for the introduced fuzzy systems to be the universal approximator was proposed. Concerning the degeneration of the GFP, the linear fuzzy partition (LFP) in the input space of fuzzy systems was also defined to further investigate first-order approximation capabilities of general homogenous T-S fuzzy systems. Simulation studies demonstrated that the presented theoretical results are effective and the sufficient condition was investigated to be conservative. These results provide a theoretical foundation for complex system modeling and control based on homogenous T-S fuzzy systems.

**Keywords:** homogenous T-S fuzzy systems; approximation capability; complex systems; fuzzy partition

T-S 模糊系统可分为2类:仿射(或典型)T-S 模糊系统和齐次 T-S 模糊系统,区别在于后者的规则后件中没有常数项.这2类模糊模型用于系统建模与控制,取得了一定的成功<sup>[1-2]</sup>.作为该应用领域的理论基础,仿射 T-S 模糊系统的逼近性能得到了广泛、深入的研究<sup>[3-14]</sup>.Ying 等人<sup>[3]</sup>首先证明了一类仿射 T-S 模糊系统的通用逼近性,并给出了一致逼近连续函数的充分条件,但只对双输入单输出的情况给予了证明.曾珂和张乃尧等人<sup>[4-6]</sup>证明了多输入

单输出情形的模糊系统的通用逼近性,并进一步研究了规则后件为常数的 Sugeno 模糊系统通用逼近性.刘福才等人<sup>[7]</sup>基于对称三角形模糊划分,研究了采样点个数对该类 T-S 模糊模型精度的影响,对仿射 T-S 模糊建模具有一定的理论指导意义.但规则后件中的常数项不利于模糊控制系统的分析和设计,在实际应用中,通常采用齐次 T-S 模糊系统,其优势在于可运用成熟的线性系统理论设计局部和全局稳定控制系统<sup>[8]</sup>.单从逼近性能角度讲,Fantuzzi 等人<sup>[9]</sup>指出齐次 T-S 模糊系统的逼近性能不及仿射 T-S 模糊系统,并研究了单输入单输出的齐次 T-S 模糊系统的逼近性能.Teixeira 等人<sup>[10]</sup>提出了一种

收稿日期:2010-03-12.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51009017);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2009QN025).

通信作者:王宁. E-mail: n. wang. dmu. cn@gmail. com.

由非线性模型得到齐次 T-S 模糊系统规则后件参数的方法,但并未给出所构造的模糊系统的逼近性能分析. Tanaka 和 Wang 等人<sup>[11-13]</sup>提出了一种基于平行分布补偿(parallel distributed compensation, PDC)和线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)方法的 T-S 模糊控制系统设计方法. 作为该方法的理论基础,文献[13]对一类齐次 T-S 模糊系统的逼近性能进行了初步研究,但该模糊系统的构造具有一定的局限性. 最近,王宁等人<sup>[14]</sup>通过定义一种输入空间的标准双交叠模糊划分,研究了一大类齐次 T-S 模糊系统的逼近性能. 需要指出的是,结构更为普遍的一般齐次 T-S 模糊系统的逼近性能有待进一步的深入研究. 此外,针对齐次 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件,还尚未有相关的研究报道.

本文结合常用模糊集的一般特性,明确定义了一种更为一般化的输入空间的一般模糊划分(GFP),并得到了输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统的一般结构. 在此基础上,研究了一大类一般齐次 T-S 模糊系统的通用逼近性能和对函数导数的逼近性能,并给出了该模糊系统作为通用逼近器的充分条件. 最后,仿真实例验证了所得理论结果的有效性.

## 1 输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统

### 1.1 齐次 T-S 模糊模型

齐次 T-S 模糊系统本质上是一个非线性映射,考虑多输入单输出系统  $f_{TS}: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow V \subset \mathbf{R}$ , 其中  $U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$  为输入空间,  $V$  为输出空间. 齐次 T-S 模糊系统可描述为

$$R_l: \text{IF } x_1 \text{ is } M_{1,i_1} \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } M_{n,i_n} \text{ THEN } f_{TS} = a_l x, l = \tau(i_1, i_2, \cdots, i_n), i_j = 1, 2, \cdots, N_j. \quad (1)$$

式中:输入状态向量  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in U, x_j \in U_j = [\alpha_j, \beta_j], M_{j,i_j} (i_j = 1, 2, \cdots, N_j)$  为相应的模糊集,  $N_j$  为相应的模糊集合的数目,并且

$$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} [(i_j - 1) \prod_{m=j+1}^n N_m] + i_n, & n \geq 2, \\ i_n, & n = 1. \end{cases}$$

采用单点模糊化、乘积推理和中心平均解模糊方法,齐次 T-S 模糊系统(1)可表示为

$$f_{TS}(x) = \sum_{l=1}^r h_l(x) a_l x. \quad (2)$$

式中:  $0 \leq h_l(x) \leq 1$  为正规化隶属函数,并且满足:

$$h_l(x) = w_l(x) / \sum_{l=1}^r w_l(x), \sum_{l=1}^r h_l(x) = 1,$$

$$w_l(x) = \prod_{j=1}^n M_{j,i_j}(x_j). \quad (3)$$

式中:  $w_l(x)$  为第  $l$  条规则前件的激活度,  $M_{j,i_j}(x_j)$  为  $x_j$  对于模糊集  $M_{j,i_j}$  的隶属度.

### 1.2 输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统

对于模糊系统(2),通常采用具有有界支集的隶属度函数,各局部模型仅在输入状态空间的某一有限区域内是有效的. 而且,每条规则的前件定义了一个局部操作域,相应的规则后件描述了在此区域内有效的局部特性. 同时,输入模糊集大多具有双交迭的特性. 基于此,定义一种更具普遍意义的一般输入空间划分(GFP).

设  $M_{j,i_j}(x_j)$  为论域  $U_j$  上的连续函数:

$$M_{j,i_j}(x_j) = \begin{cases} I_{j,i_j}(x_j), & x_j \in (a_{j,i_j}, d_{j,i_j}), \\ 1, & x_j = d_{j,i_j}, \\ D_{j,i_j}(x_j), & x_j \in (d_{j,i_j}, b_{j,i_j}), \\ 0, & x_j \notin (a_{j,i_j}, b_{j,i_j}). \end{cases}$$

式中:  $0 \leq \partial I_{j,i_j}(x_j) / \partial x_j \leq \lambda, -\lambda \leq \partial D_{j,i_j}(x_j) / \partial x_j \leq 0, 0 < \lambda < \infty, d_{j,i_j}$  为模糊集  $M_{j,i_j}$  的中心.

**定义 1** 称模糊集组  $\{M_{j,i_j}, i_j = 1, 2, \cdots, N_j, j = 1, 2, \cdots, n\}$  是  $U$  上的一个一般模糊划分(GFP),如果满足条件:1)  $d_{j,1} = \alpha_j, d_{j,N_j} = \beta_j, d_{j,1} < d_{j,2} < \cdots < d_{j,N_j}$ ; 2)  $a_{j,i_j} < b_{j,i_j-1} \leq d_{j,i_j} \leq a_{j,i_j+1} < b_{j,i_j}, i_j = 2, 3, \cdots, N_j - 1$ .

那么,输入空间  $U$  被划分为  $K$  个子空间  $D_k$ ,  $k = 1, 2, \cdots, K, K = \prod_{j=1}^n K_j, K_j = N_j - 1$ . 每个子空间可描述为

$$D_k = \{x \mid x \in U, d_{j,k_j} \leq x_j \leq d_{j,k_j+1}, j = 1, 2, \cdots, n\}. \quad (4)$$

式中:

$$k = \sigma(k_1, k_2, \cdots, k_n), k_j = 1, 2, \cdots, K_j, \sigma(k_1, k_2, \cdots, k_n) =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} ((k_j - 1) \prod_{m=j+1}^n K_m) + k_n, & n \leq 2, \\ k_n, & n = 1. \end{cases}$$

由式(2)、(3)、(4),可得输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统为

$$f_{TS}(x) = \sum_{l \in L_k} h_l(x) a_l x, x \in D_k, k = 1, 2, \cdots, K. \quad (5)$$

式中:

$$L_k = \{l = \tau(\sigma^{-1}(k)) + \delta(e_1, e_2, \cdots, e_n) \mid e_j \in \{0, 1\}\},$$

$$\delta(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \sum_{j=1}^n (e_j \prod_{m=j+1}^n N_m) + e_n.$$

**定义 2** 称模糊集组  $\{M_{j,i_j}, i_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  是  $U$  上的一个线性模糊划分 (LFP), 如果  $\{M_{j,i_j}, i_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  是  $U$  上的一个 GFP, 并且满足:

$$\frac{M_{j,k_j}(x_j)(x_j - d_{j,k_j}) + M_{j,k_j+1}(x_j)(x_j - d_{j,k_j+1})}{M_{j,k_j}(x_j) + M_{j,k_j+1}(x_j)} = c_{j,k_j}, \quad x_j \in [d_{j,k_j}, d_{j,k_j+1}]. \quad (6)$$

式中:  $c_{j,k_j} (k_j = 1, 2, \dots, K_j)$  为常数.

易见, LFP 是 GFP 的一个特例, 常见的全交叠三角形隶属函数便是一种 LFP.

## 2 逼近性能分析

### 2.1 通用逼近性能

不失一般性, 待逼近的任意非线性函数  $f(x)$ :  $U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow V \subset \mathbf{R}$  满足如下一般性假设:

1) 当  $x_{l(0)} = \mathbf{0} \in D_k$  时,

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - f_{TS}(x) = \sum_{l \in L_k} h_l(x) (f(x) - a_l x) = \\ &h_{l(0)}(x) (f(\mathbf{0}) + \nabla f(\mathbf{0})x + \frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(\eta_{l(0)})x - \nabla f(\mathbf{0})x) + \\ &\sum_{l \neq l(0), l \in L_k} h_l(x) \left( f(x_l) + \nabla f(x_l)(x - x_l) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l) - \nabla f(x_l)x - \frac{f(x_l) - \nabla f(x_l)x_l}{\|x_l\|^2} x_l^T x \right) = \\ &h_{l(0)}(x) \left( \frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(\eta_{l(0)})x \right) + \sum_{l \neq l(0), l \in L_k} h_l(x) \left( \frac{f(x_l) - \nabla f(x_l)x_l}{\|x_l\|^2} x_l^T (x_l - x) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l) \right) = \\ &h_{l(0)}(x) \left( \frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(\eta_{l(0)})x \right) + \sum_{l \neq l(0), l \in L_k} h_l(x) ((a_l - \nabla f(x_l))(x_l - x) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l)). \end{aligned}$$

2) 当  $x_{l(0)} = \mathbf{0} \notin D_k$  时,

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - f_{TS}(x) = \sum_{l \in L_k} h_l(x) (f(x) - a_l x) = \\ &\sum_{l \in L_k} h_l(x) \left( f(x_l) + \nabla f(x_l)(x - x_l) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l) - \nabla f(x_l)x - \frac{f(x_l) - \nabla f(x_l)x_l}{\|x_l\|^2} x_l^T x \right) = \\ &\sum_{l \in L_k} h_l(x) ((a_l - \nabla f(x_l))(x_l - x) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l)). \end{aligned}$$

以上结果可合并为

$$e(x) = \sum_{l \in L_k} h_l(x) ((a_l - \nabla f(x_l))(x_l - x) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l)). \quad (9)$$

式中:  $x, \eta_l \in D_k$ .

**定理 1** 输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统  $f_{TS}(x)$  能够以任意精度一致逼近满足假设的任意非线性函数  $f(x): U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow V \subset \mathbf{R}$ .

**证明** 由式(9)可得

$$\|e(\dot{x})\| =$$

**假设 1** 非线性函数  $f(x)$  满足: 1)  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ; 2)  $f \in C_1^2$ , 即  $f(x), \nabla f(x)$  和  $\nabla^2 f(x)$  在论域  $U$  上是连续有界的. 其中,  $\nabla f(x) = [\partial f(x)/\partial x_1, \partial f(x)/\partial x_2, \dots, \partial f(x)/\partial x_n]$ ,  $\nabla^2 f(x) = [\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j]^{n \times n}$ .

令

$$a(x) = \begin{cases} \nabla f(x) + \frac{f(x) - \nabla f(x)x}{\|x\|^2} x^T, & x \neq \mathbf{0}, \\ \nabla f(x), & x = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7)$$

$$a_l = a(x_l). \quad (8)$$

式中:  $x_{l(0)} = \mathbf{0} \in \{x_l, l = 1, 2, \dots, r\}$ ,  $x_l = [d_{1,i_1} \ d_{2,i_2} \ \dots \ d_{n,i_n}]^T$ . 容易验证,

$$f(x) = a(x)x.$$

选取模糊规则如式(1)所示, 所得逼近函数如式(5)所示. 考虑任意输入子空间  $D_k$ , 则逼近误差  $e(x)$  为

$$\begin{aligned} &\| \sum_{l \in L_k} h_l(x) ((a_l - \nabla f(x_l))(x_l - x) + \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l)) \| \leq \\ &\sum_{l \in L_k} h_l(x) \| (a_l - \nabla f(x_l))(x_l - x) \| + \\ &\sum_{l \in L_k} h_l(x) \| \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l) \| \leq \\ &\max_{l \in L_k} \| (a_l - \nabla f(x_l))(x_l - x) \| + \\ &\max_{l \in L_k} \| \frac{1}{2}(x - x_l)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x - x_l) \| \leq \\ &\max_{l \in L_k} \{ \| a_l - \nabla f(x_l) \| \cdot \| x_l - x \| \} + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \max_{l \in L_k} \{ \| \nabla^2 f(\eta_l) \| \cdot \| x - x_l \|^2 \}, x, \eta_l \in D_k.$$

令

$$\Delta_k = \sqrt{n} \delta_k, \delta_k = \max_{j, k_j} \delta_{j, k_j}. \quad (10)$$

式中:

$$k = \sigma(k_1, k_2, \dots, k_n), \delta_{j, k_j} = d_{j, k_j+1} - d_{j, k_j}, \quad (11)$$

$$\gamma_k = \max_{l \in L_k} \| a_l - \nabla f(x_l) \|, \quad (12)$$

$$\rho_k = \max_{l \in L_k} \| \nabla^2 f(\eta_l) \|, \eta_l \in D_k. \quad (13)$$

由以上可得

$$\| e(x) \| \leq \gamma_k \Delta_k + \frac{1}{2} \rho_k \Delta_k^2, x \in D_k. \quad (14)$$

由式(8)和假设 1 可知,  $\gamma_k$  和  $\rho_k$  都是有限的数. 而对于  $\forall \varepsilon_k > 0$ , 当  $\Delta_k$  充分小时, 有

$$\| e(x) \| \leq \varepsilon_k, x \in D_k.$$

从而可得

$$\| e(x) \| \leq \varepsilon, x \in U, \\ \varepsilon = \max_k \varepsilon_k, k = 1, 2, \dots, K.$$

即  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在一般齐次 T-S 模糊系统使得  $\| e(x) \| \leq \varepsilon$ . 证毕.

## 2.2 作为通用逼近器的充分条件

不失一般性, 将每一维的输入变量归一化到论域  $[0, 1]$ .

**定理 2** 如果 GFP 采用均匀分布的  $N$  个模糊子集, 即  $N_j = N, j = 1, 2, \dots, n$ , 对任意满足假设的非线性函数  $f(x)$  和给定的逼近误差  $\varepsilon > 0$ , 则存在:

$$N \geq \frac{\sqrt{n}(c + s_1 + \sqrt{(c + s_1)^2 + 2s_2\varepsilon})}{2\varepsilon} + 1. \quad (15)$$

式中:  $c = \| \nabla f(0) \| + \| \nabla^2 f(0) \|$ ,  $s_1 = \max_{x \in U} \| \nabla f(x) \|$ ,  $s_2 = \max_{x \in U} \| \nabla^2 f(x) \|$ .

**证明** 若每一维输入变量均采用均匀分布的  $N$  个模糊子集, 由式(10)~(14)可得

$$\| f_{TS}(x) - f(x) \| \leq \gamma \Delta + \frac{1}{2} \rho \Delta^2 =$$

$$\sqrt{n} \gamma / (N - 1) + \frac{1}{2} n \rho / (N - 1)^2 \leq \varepsilon, x \in U.$$

即  $\sqrt{n} \gamma / (N - 1) + \frac{1}{2} n \rho / (N - 1)^2 \leq \varepsilon$ , 立即可得

$$N \geq \frac{\sqrt{n}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\rho\varepsilon})}{2\varepsilon} + 1.$$

式中:  $\gamma = \max_l \| a_l - \nabla f(x_l) \|$ ,  $\rho = \max_{x \in U} \| \nabla^2 f(x) \|$ . 由假设 1 可知,

$$\gamma = \max_l \| a_l - \nabla f(x_l) \| \leq$$

$$\max_x \left\{ \frac{\| f(x) - \nabla f(x)x \|}{\| x \|} \right\} \leq$$

$$\max_x \left\{ \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} + \frac{\| \nabla f(x)x \|}{\| x \|} \right\} \leq$$

$$\max_x \left\{ \frac{\| \nabla f(0)x + x^T \nabla^2 f(0)x \|}{\| x \|} \right\} +$$

$$\max_x \left\{ \frac{\| \nabla f(x)x \|}{\| x \|} \right\} \leq \| \nabla f(0) \| +$$

$$\| \nabla^2 f(0) \| \cdot \max_x \| x \| + \max_x \| \nabla f(x) \|.$$

又由  $x \in [0, 1]^n$ , 得  $\gamma \leq c + s_1$ ,  $\rho = s_2$ . 故式(15)成立. 证毕.

## 2.3 对函数导数的逼近

本节将讨论输入采用 LFP 的齐次 T-S 模糊系统对待逼近函数的导数的一致逼近性能. 基于 GFP 和 LFP 的定义, 首先给出如下引理.

**引理 1** 如果模糊集组  $\{M_{j,i_j}, i_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  满足 LFP 的定义, 则有

$$\sum_{l \in L_k} \nabla h_l(x) = 0, \quad (16)$$

$$\sum_{l \in L_k} (x - x_l) \nabla h_l(x) = -I, x \in D_k.$$

式中:  $\nabla h_l(x) = [\partial h_l(x)/\partial x_1 \partial h_l(x)/\partial x_2 \dots \partial h_l(x)/\partial x_n]$ ,  $I$  为单位阵.

**证明** 由 GFP 和 LFP 的定义可知,  $\sum_{l \in L_k} h_l(x) = 1$ , 从而可得式(16)成立. 由式(3)、(4)可得

$$\sum_{l \in L_k} h_l(x)(x - x_l) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\prod_{j=1}^n M_{j,k_j}(x_j)(x - x_l)}{\prod_{j=1}^n (M_{j,k_j}(x_j) + M_{j,k_j+1}(x_j))} \right) =$$

$$\left[ \frac{M_{1,k_1}(x_1)(x_1 - d_{1,k_1}) + M_{1,k_1+1}(x_1)(x_1 - d_{1,k_1+1})}{M_{1,k_1}(x_1) + M_{1,k_1+1}(x_1)} \right. \\ \vdots \\ \left. \frac{M_{n,k_n}(x_n)(x_n - d_{n,k_n}) + M_{n,k_n+1}(x_n)(x_n - d_{n,k_n+1})}{M_{n,k_n}(x_n) + M_{n,k_n+1}(x_n)} \right].$$

又由式(6)可得

$$\sum_{l \in L_K} h_l(x)(x - x_l) = [c_{1,k_1} \ c_{2,k_2} \ \dots \ c_{n,k_n}]^T = c_k.$$

从而有

$$\partial \left( \sum_{l \in L_k} h_l(x)(x - x_l) \right) / \partial x =$$

$$\sum_{l \in L_k} (x - x_l) \nabla h_l(x) + \sum_{l \in L_k} h_l(x) I = 0, x \in D_k.$$

所以,

$$\sum_{l \in L_k} (x - x_k) \nabla h_l(x) = - \sum_{l \in L_k} h_l(x) I = -I, x \in D_k.$$

证毕.

**引理 2** 对于  $\forall \xi > 0$ , 存在  $0 < \xi \ll 1$ , 使得

$\|a(x) - a_l\| \leq \xi$ , 如果  $\|x - x_l\| \leq \xi$ .

**证明** 由假设 1 和式(7)可知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \nabla f(x) + \frac{f(x) - \nabla f(x)x^T}{\|x\|^2} x^T \right) = \nabla f(0) = a(0).$$

所以,  $a(x)$  在其定义域上连续的. 又由式(8), 该引理得证, 证毕.

**定理 3** 输入采用 LFP 的齐次 T-S 模糊系统

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x) - \nabla f_{TS}(x)\| &= \|\nabla f(x) - \sum_{l \in L_k} a_l x \nabla h_l(x) - \sum_{l \in L_k} h_l(x) a_l\| = \\ &= \|\nabla f(x) - \sum_{l \in L_k} (f(x_l) + a_l(x - x_l)) \nabla h_l(x) - \sum_{l \in L_k} h_l(x) a_l\| = \\ &= \|\nabla f(x) - \sum_{l \in L_k} \left( f(x) + \nabla f(x)(x_l - x) + \frac{1}{2}(x_l - x)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x_l - x) \right) \cdot \\ &\quad \nabla h_l(x) - \sum_{l \in L_k} a_l(x - x_l) \nabla h_l(x) - \sum_{l \in L_k} h_l(x) a_l\| = \\ &= \|\nabla f(x) + \sum_{l \in L_k} \nabla f(x)(x - x_l) \nabla h_l(x) - \sum_{l \in L_k} f(x) \nabla h_l(x) - \sum_{l \in L_k} a_l(x - x_l) \nabla h_l(x) - \\ &\quad \sum_{l \in L_k} h_l(x) a_l - \frac{1}{2} \sum_{l \in L_k} (x_l - x)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x_l - x) \nabla h_l(x)\|, x, \eta_l \in D_k. \end{aligned}$$

由引理 1 可知,

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x) - \nabla f_{TS}(x)\| &= \|\sum_{l \in L_k} a_l(x - x_l) \nabla h_l(x) + \sum_{l \in L_k} h_l(x) a_l + \frac{1}{2} \sum_{l \in L_k} (x_l - x)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x_l - x) \nabla h_l(x)\| = \\ &= \|\sum_{l \in L_k} (a_l - a(x))(x - x_l) \nabla h_l(x) + \sum_{l \in L_k} h_l(x)(a_l - a(x)) + \frac{1}{2} \sum_{l \in L_k} (x_l - x)^T \nabla^2 f(\eta_l)(x_l - x) \nabla h_l(x)\| \leq \delta_k, x, \eta_k \in D_k. \end{aligned}$$

由引理 2 可知, 若  $\|x - x_l\|$  充分小, 则存在  $\forall \delta_k > 0$ , 使得  $\|\nabla f(x) - \nabla f_{TS}(x)\| \leq \delta_k, x \in D_k$ . 当  $x = x_l, l \in L_k$  时,  $h_l(x)$  的左、右导数不一定相等, 尽管此时模糊系统对原函数的逼近误差为零, 但对函数导数的逼近误差可能相对较大. 证毕.

### 3 仿真实例

为验证本文所得的理论结果, 考虑两输入单输出的齐次 T-S 模糊系统, 待逼近非线性函数为

$$f(x) = \sin 6x_1 \sin 6x_2.$$

式中:  $x = [x_1 \ x_2]^T \in [0, 1]^2$ . 该函数的三维图形如图 1 所示. 对于输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统, GFP 采用均匀分布的全交叠三角形隶属函数, 并且每一维变量上的模糊集数目相等, 分别选择不同数目的输入模糊集进行仿真, 得到如图 2 所示的一致逼近误差与输入模糊集数目之间的曲线关系. 由图中曲线可得, 随着输入模糊集数目的增长, 一致逼近误差趋于零. 即输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统

$f_{TS}(x)$  不仅能够以任意精度一致逼近满足假设的任意非线性函数  $f(x)$ , 而且除有限数量的点外, 能够以任意精度逼近其导数  $\nabla f(x)$ .

**证明** 由于 LFP 是 GFP 的一个特例, 由定理 1 可知输入采用 LFP 的齐次 T-S 模糊系统能够以任意精度一致逼近满足假设的任意非线性函数  $f(x)$ .

由式(5)可得

能够以任意精度一致逼近待逼近函数. 当输入模糊集数目取为 14 时, 模糊系统逼近函数的三维图形如图 3 所示, 逼近误差如图 4 所示. 显然, 该模糊系统能够很好地一致逼近给定的非线性函数, 若追求更高的逼近精度, 可通过增加输入模糊集的数目来实现. 该模糊系统对函数  $f(x)$  的一次导数也具有较理想的逼近效果, 曲线由图 5~6 给出. 因此, 以上实验验证了定理 1 和定理 3 所得的理论结果.

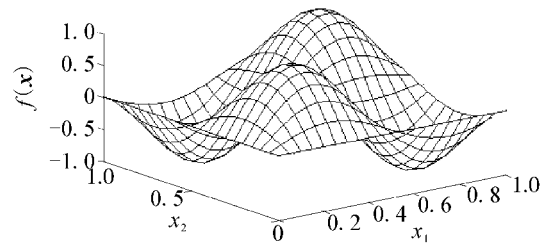


图 1 非线性函数  $f(x) = \sin 6x_1 \sin 6x_2$

Fig. 1 Nonlinear function  $f(x) = \sin 6x_1 \sin 6x_2$

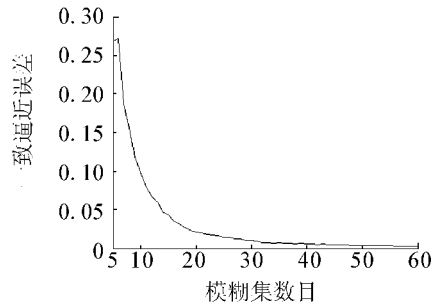


图 2 一致逼近误差随输入模糊集数目的变化

Fig.2 Uniform approximation errors w. r. t the number of input fuzzy sets

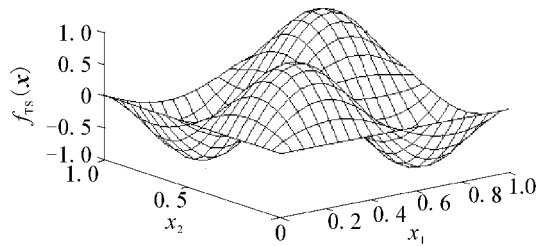


图 3 模糊集数为 14 时的模糊系统

Fig.3 Fuzzy system with each input using 14 fuzzy sets

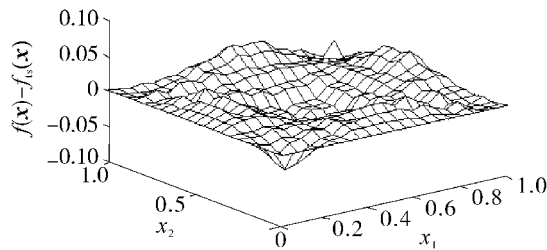


图 4 模糊集数为 14 时的逼近误差

Fig.4 Approximation errors when using 14 fuzzy sets

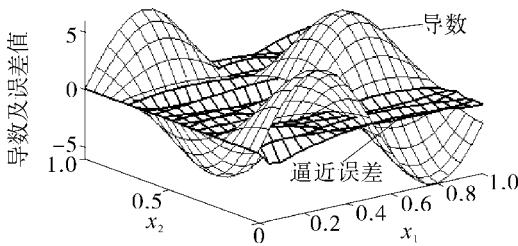


图 5  $f(x)$  对  $x_1$  的导数及其逼近误差

Fig.5 Derivatives of  $f(x)$  w. r. t.  $x_1$  and approximation errors

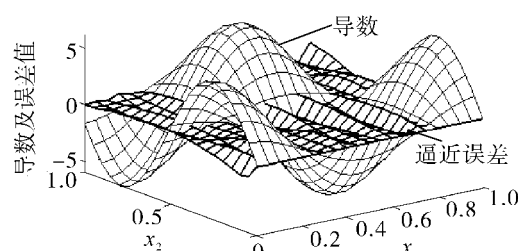


图 6  $f(x)$  对  $x_2$  的导数及其逼近误差

Fig.6 Derivatives of  $f(x)$  w. r. t.  $x_2$  and approximation errors

为验证定理 2 中所得充分条件的有效性,并考

察其存在的保守性,在以上仿真研究的基础上,由一系列给定的逼近精度,根据定理 2 得到相应的所需的模糊集数目  $N$ . 进而分别获得相应模糊系统的实际逼近误差,以验证和考察定理 2 所给出结果的有效性和保守性. 所得结果如表 1 所示,定理 2 所得模糊集数目  $N$  保证了模糊系统的逼近性能,具有一定的有效性. 但实际逼近误差往往远小于给定逼近误差,体现了所得充分条件的保守性. 尽管如此,定理 2 完全可用于决定模糊集数目的上限,具有一定的理论指导和实际应用价值.

表 1 定理 2 的有效性和保守性

Table 1 Validity and conservatism of Theorem 2

给定精度	定理 2 给出的充分条件 $N$	实际逼近精度
0.5	13	0.041 9
0.4	16	0.023 5
0.3	20	0.009 9
0.2	28	0.007 9
0.1	53	0.002 3

## 4 结束语

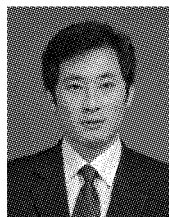
通过归纳常用模糊集的一般特性,明确定义了一种更为普遍的输入空间的模糊划分方法,称其为一般模糊划分(GFP),常用的线性模糊划分(LFP)是其中的一个特例. 通过分析得到了输入采用 GFP 的齐次 T-S 模糊系统的解析结构. 进而,研究了该模糊系统的通用逼近性能和输入采用 LFP 的齐次 T-S 模糊系统对函数导数的逼近性能,并且给出了齐次 T-S 模糊系统逼近任意非线性函数的充分条件. 最后,进行了仿真研究,结果验证了所得理论结果的有效性,同时也考察了其存在的保守性. 实际上,在非线性系统建模与控制中,齐次 T-S 模糊系统的应用更为广泛. 并且与现有文献相比,本文所研究的齐次 T-S 模糊系统更为普遍. 因此,所得理论结果对于模糊系统的系统化分析与设计具有一定的理论意义和广阔的应用前景.

## 参考文献:

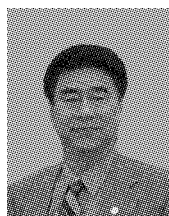
[1] 刘福才,陈超,邵慧,等. 模糊系统万能逼近理论研究综述[J]. 智能系统学报, 2007, 2(1): 25-34.  
LIU Fucui, CHEN Chao, SHAO Hui, et al. Researches for universal approximation of fuzzy systems: a survey [J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2007, 2(1): 25-34.  
[2] FENG G. A survey on analysis and design of model-based

- fuzzy control systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(5): 676-697.
- [3] YING H. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1998, 28(4): 515-520.
- [4] ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773-780.
- [5] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件[J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 606-612.  
ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Sufficient condition for linear T-S fuzzy systems as universal approximators[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(5): 606-612.
- [6] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 典型 T-S 模糊系统是通用逼近器[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(2): 293-297.  
ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Typical T-S fuzzy systems are universal approximators[J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(2): 293-297.
- [7] 刘福才, 陈超, 张彦柳. 采样点个数对 T-S 模糊建模精度的影响[J]. 智能系统学报, 2008, 3(6): 541-547.  
LIU Fucui, CHEN Chao, ZHANG Yanliu. The influence of sampling points on the descriptive performance of T-S fuzzy modeling[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2008, 3(6): 541-547.
- [8] 王宁, 孟宪尧. 输入采用一般模糊划分的 T-S 模糊控制系统稳定性分析[J]. 自动化学报, 2008, 34(11): 1441-1445.  
WANG Ning, MENG Xianyao. Stability analysis of T-S fuzzy control system with inputs using general fuzzy partition[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(11): 1441-1445.
- [9] FUNTUZZI C, ROVATTI R. On the approximation capabilities of the homogenous Takagi-Sugeno model[C]//IEEE International Conference on Fuzzy Systems. New Orleans, USA, 1996: 1067-1072.
- [10] TEIXEIRA M C M, ZAK S H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(2): 133-142.
- [11] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 14-23.
- [12] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998, 6(2): 250-265.
- [13] WANG H O, LI J, TANAKA K. T-S fuzzy model with linear rule consequence and PDC controller: a universal framework for nonlinear control systems[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2003, 5(2): 106-113.
- [14] 王宁, 孟宪尧. 齐次 T-S 模糊系统的逼近性能[J]. 大连海事大学学报, 2007, 33(3): 36-41.  
WANG Ning, MENG Xianyao. Approximation capabilities of homogeneous T-S fuzzy systems[J]. Journal of Dalian Maritime University, 2007, 33(3): 36-41.

## 作者简介:



王宁,男,1983年生,讲师、博士,主要研究方向为模糊系统、神经网络、船舶安全及智能控制等.发表学术论文20余篇,其中被SCI检索2篇,EI检索10余篇.



谭跃,男,1954年生,教授,主要研究方向为船舶电力拖动和船舶智能控制等.发表学术论文30余篇,其中被SCI、EI检索10余篇.



王丹,男,1960年生,教授、博士生导师,主要研究方向为智能控制、自适应控制、非线性系统及控制、故障诊断与容错控制等.在国内外重要学术刊物上发表学术论文50余篇,其中被SCI、EI检索30余篇.