

柔性倒立摆的模糊控制算法

赵潇菲, 张井岗

(太原科技大学 电子信息工程学院, 山西 太原 030024)

摘要:针对直线柔性一级倒立摆多变量的特性,提出了基于融合函数的模糊控制算法,解决了“规则爆炸”问题.利用最优控制理论计算出使系统稳定的反馈增益矩阵,由反馈增益矩阵构造融合函数,由此减少了模糊控制器的输入变量维数.仿真和实际实验结果证明该方案的有效性和正确性.

关键词:直线柔性一级倒立摆;模糊控制器;融合函数;模糊规则

中图分类号:TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1673-4785(2010)04-0347-06

A fuzzy control method for flexible-joint inverted pendulums

ZHAO Xiao-fei, ZHANG Jing-gang

(School of electronics information engineering of Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: modeling of a linear single-stage flexible-joint inverted pendulum involves multiple interacting variables. A novel fuzzy control method was proposed that would solve the rule explosion problem by applying a fusion function. The feedback gain matrix, which makes the system stable, was calculated using optimal control theory. Then the fusion function was constructed with a feedback gain matrix which reduced the dimensions of variables passed to the fuzzy controller. Simulations and practical experiments were conducted. The results showed the validity and correctness of the method.

Keywords: Linear 1-stage flexible-joint inverted pendulum; fuzzy controller; fusion function; fuzzy rule

倒立摆是一个非线性、强耦合、不稳定的控制对象,通常被作为典型的实验控制对象来验证各种控制方法,受到世界各国许多科学家的青睐.模糊控制属于智能控制范畴,它是一种非线性控制.在过程控制领域发挥着重要的作用.然而模糊控制在实际应用中也存在一定的局限性,“规则爆炸”就是其中的一个难题.为解决这个问题张乃尧^[1]等针对一级倒立摆提出过双闭环模糊控制方案,内环控制摆杆角度,外环控制小车位移;范醒哲^[2]等人将此方法推广到三级倒立摆系统中,并提出2种模糊串级控制方案.而本文所研究的直线柔性一级倒立摆系统是一种新型的更加复杂且难以控制的非线性多变量不稳定系统,它是在直线倒立摆的基础上引入了自由震荡环节:自由弹簧系统,控制涉及到的状态变量共有6个,如果每个变量的论域作5个模糊集的模糊划分,这样完备的推理规则库会包含个 $5^6 = 15\,625$ 推理规则,要建立一个完善的控制规则很

难.本文以直线柔性一级倒立摆为控制对象研究了基于融合函数的模糊控制算法^[2],成功的解决了“规则爆炸”问题.

1 系统建模

柔性倒立摆控制平台是由普通PC机、柔性倒立摆本体、电控箱以及运动控制卡等部分组成的,系统框图如图1所示.

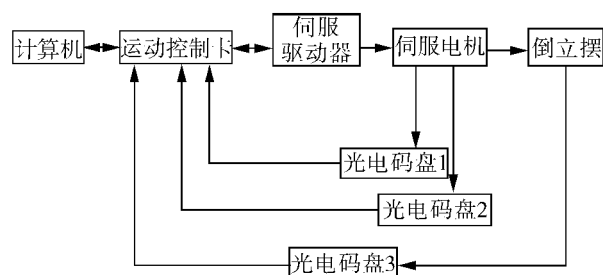


图1 直线一级柔性连接倒立摆系统

Fig.1 Linear 1-stage flexible-joint inverted pendulum system

在忽略各种磨擦、空气阻力后,可将柔性一级倒立摆系统抽象成由弹簧、匀质摆杆、小车和质量块组

成的系统,如图2所示. M_1 、 M_2 分别为主动小车和从动小车的质量, m 为摆杆质量, l 为摆杆转动中心到杆质心的长度, k 为弹簧的倔强系数, x_1 、 x_2 分别为主动小车和从动小车的位移, θ 为摆杆的角度.

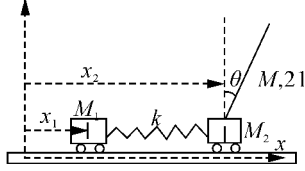


图2 柔性连接倒立摆系统模型

Fig.2 Flexible joint inverted-pendulum system model

拉格朗日方程为

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}). \quad (1)$$

系统总动能为

$$T = T_{M_1} + T_{M_2} + T_m = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - ml\dot{x}_2\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (2)$$

系统总势能为

$$V = V_k + V_m = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + mgl\cos\theta. \quad (3)$$

由于广义坐标 x_1 、 x_2 有外力作用, θ 无外力作用, 因此有等式

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = u - c_1\dot{x}_1, \\ (m + M_2)\ddot{x}_2 - mk\cos\theta \cdot \dot{\theta} + mlsin\theta \cdot \ddot{\theta} + k(x_2 - x_1) = -c_2\dot{x}_2, \\ -3m\cos\theta\ddot{\theta} + 4ml\ddot{\theta} - 3mg\sin\theta = 0. \end{cases}$$

对方程组进行整理可得到如下等式:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, u) = \frac{-k(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 + u}{M_1}, \\ \ddot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dot{x}_2, \theta, \dot{\theta}) = \frac{-3gm\cos\theta\sin\theta + 4k(x_1 - x_2) - 4c_2\dot{x}_2 - 4ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2}{m + 4M_2 + 3m\sin^2\theta}, \\ \ddot{\theta} = f_3(x_1, x_2, \dot{x}_2, \theta, \dot{\theta}) = \frac{3g(m + M)\sin\theta + 3k(x_1 - x_2)\cos\theta - 3c_2\cos\theta\dot{x}_2 - 3lm\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2}{l(m + 3m\sin^2\theta + 4M_2)}. \end{cases}$$

系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \theta \\ f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2, \dot{x}_2, \theta, \dot{\theta}) \\ f_3(x_1, x_2, \dot{x}_2, \theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (4)$$

在平衡点 $X_{10} = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta, \dot{\theta}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 处对系统进行线性化:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{k}{M_1}x_1 - \frac{c_1}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{k}{M_1}x_2 + \frac{1}{M_1}u, \\ \ddot{x}_2 = \frac{4k}{m + 4M_2}x_1 - \frac{4k}{m + 4M_2}x_2 - \frac{4c_2}{m + 4M_2}\dot{x}_2 + \frac{3gm}{m + 4M_2}\theta, \\ \ddot{\theta} = \frac{3k}{l(m + 4M_2)}x_1 - \frac{3k}{l(m + 4M_2)}x_2 - \frac{3c_2}{l(m + 4M_2)}\dot{x}_2 + \frac{3g(m + M_2)}{l(m + 4M_2)}\theta. \end{cases}$$

可得系统的状态空间方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M_1} & -\frac{c_1}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4k}{m + 4M_2} & 0 & -\frac{4k}{m + 4M_2} & -\frac{4c_2}{m + 4M_2} & \frac{3gm}{m + 4M_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3k}{l(m + 4M_2)} & 0 & -\frac{3k}{l(m + 4M_2)} & -\frac{3c_2}{l(m + 4M_2)} & \frac{3g(M_2 + m)}{l(m + 4M_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (5)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

表1 柔性倒立摆参数

Table 1 Flexible joint inverted-pendulum's parameter

参数	数值
主动小车质量 M_1	1.1 kg
从动小车质量 M_2	1.1 Kg
摆杆质量 m	0.13 kg
弹簧倔强系数 k	2 500 N/m
主动小车与导轨之间的摩擦系数 c_1	0.2 N · s/m
从动小车与导轨之间的摩擦系数 c_2	0.2 N · s/m
摆杆转动中心到杆质心的长度 l	0.25 m

将各参数代入可得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22\,727 & -0.18 & 22\,727 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 22\,075 & 0 & -22\,075 & -0.176\,6 & 0.843\,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 66\,225 & 0 & -66\,225 & -0.529\,8 & 31.931 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.909\,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2 基于融合函数的模糊控制算法^[3]

基于融合函数的模糊控制算法的原理是将表示直线一级柔性倒立摆系统位移和角度即: x_1, x_2, θ 3个状态变量加权合成一个输入变量,表示速度(角速度)即: $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}$ 3个状态变量加权合成另一个输入变量. 由此,就可用常规的二维模糊控制器实现对直线一级柔性倒立摆的控制,显然可大大减少控制规则数量.

基于融合函数的模糊控制策略可以用如下公式表示:

$$Y = F_2[F_1(X)].$$

式中:算法 $F_i(x)$ 称为融合函数,它利用系统状态的相关性和输入信息的状态可合成性完成了组合、提

取问题信息的过程,将高维输入转化为低维输出. 算法 $F_2(\cdot)$ 称为模糊作用函数,它根据前级算法的输出对系统进行模糊控制. 这种模糊控制器原理图如图3所示:

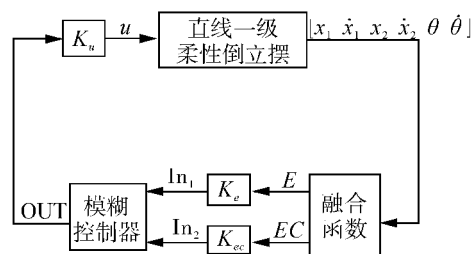


图3 模糊控制器原理图

Fig. 3 Fuzzy controller schematic

构造融合函数步骤:

1) 利用最优控制理论设计出一组可让柔性倒立摆系统的线性模型基本稳定的反馈增益矩阵

$$K = [K_{x_1} \ K_{\dot{x}_1} \ K_{x_2} \ K_{\dot{x}_2} \ K_{\theta} \ K_{\dot{\theta}}].$$

以下利用线性二次最优控制理论((LQR)来为柔性一级倒立摆的状态方程设计一个状态反馈矩阵.

最优控制性能指标函数:

$$J = \int_0^{\infty} [X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)] dt. \quad (7)$$

最优控制规律由

$$U(t) = -KX(t) = -R^{-1}B^T P X(t) \quad (8)$$

给出. 其中最优控制向量 K 为

$$K = R^{-1}B^T P. \quad (9)$$

矩阵 P 满足代数黎卡提方程

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0.$$

求解即可得到矩阵 P .

将矩阵 P 代入方程(9),求得的矩阵 K 就是最优矩阵.

在实际系统的控制过程中,取 Q 为对角阵,其中 $Q_{11} = 2\,000, Q_{22} = 1, Q_{33} = 1\,000, Q_{44} = 1, Q_{55} = 100, Q_{66} = 1; R = 1$,通过计算可得

$$K =$$

$$[2085.446 \ 21.4408 \ -2633.169 \ -57.8452 \ 1409.906 \ 25.7704].$$

2) 根据反馈增益矩阵构造函数 $F_1(X)$

$$K \cdot X = K_{x_1} x_1 + K_{\dot{x}_1} \dot{x}_1 + K_{x_2} x_2 + K_{\dot{x}_2} \dot{x}_2 + K_{\theta} \theta + K_{\dot{\theta}} \dot{\theta} = [K_{\theta} \ K_{\dot{\theta}}].$$

$$\begin{bmatrix} \frac{K_{x_1}}{K_{\theta}} & 0 & \frac{K_{x_2}}{K_{\theta}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{K_{\dot{x}_1}}{K_{\theta}} & 0 & \frac{K_{\dot{x}_2}}{K_{\theta}} & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

式中:

$$F_1(X) = \begin{bmatrix} \frac{K_{x_1}}{K_\theta} & 0 & \frac{K_{x_2}}{K_\theta} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{K_{\dot{x}_1}}{K_\theta} & 0 & \frac{K_{\dot{x}_2}}{K_\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

由此可得:

$$F_1(X) = \begin{bmatrix} 1.4791 & 0 & -1.8676 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8320 & 0 & -2.2446 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) 通过 $F_1(X)$ 把输入状态变量降维, 得到综合误差 E 和综合误差率 EC

$$\begin{bmatrix} E \\ EC \end{bmatrix} = F_1(X).$$

3 模糊控制器设计

通过融合函数使得倒立摆系统降维, 用降维得到的综合误差 E 和综合误差率 EC 作模糊控制器的输入, 所以只需设计一个二维模糊控制器即可, 使设计大大简化. 具体过程如下:

1) 确定隶属度函数

综合误差 E 和综合误差率 EC 的论域都取为 $[-180, 180]$, 其中 NB、NM、NS、PS、PM、PB 是综合误差论域 $[-180, 180]$ 上的模糊子集, NB、NM、ZO、PM、PB 是综合误差率 EC 论域 $[-180, 180]$ 上的模糊子集, 模糊集的隶属度函数均取“gaussmf”隶属度函数. 输出变量 U 的论域取为 $[-50, 50]$, NB、NM、NS、PS、PM、PB 是论域 $[-50, 50]$ 上的模糊子集, 模糊集的隶属度函数取“trimf”隶属度函数.

2) 设计模糊规则

设计模糊控制规则的基本原则: 当误差大或较大时, 选择控制量以尽快消除误差为主; 当误差较小时, 选择控制量要注意防止超调, 以系统稳定性为主要出发点.

3) 清晰化: 采用重心法来实现清晰化.

4) 确定量化因子和比例因子

为进行模糊化, 需将输入变量从基本论域 $[-x_e, x_e]$ 转换到模糊集的论域 $X = [-180, 180]$. 这中间须将输入变量乘以相应的因子即: 量化因子 (综合误差的量化因子 K_e 和综合误差率的量化因子 K_{ec}), 由如下 2 个公式确定:

$$K_e = \frac{180}{x_e}, K_{ec} = \frac{180}{x_{ec}}.$$

在模糊控制器的控制过程中, 误差和误差变化率的基本论域范围比模糊论域的范围小得多, 因此量化因子都远大于 1.

同样, 每次采样经模糊控制算法给出的控制量也不能直接控制对象, 需将转换到控制对象的基本论域中去.

输出控制量的比例因子可由下式确定:

$$K_u = \frac{y_u}{50}.$$

量化因子的大小对控制系统动态性能影响很大, K_e 较大时系统超调较大; K_{ec} 越大超调越小, 但系统响应速度会变慢; 输出比例因子 K_u 的大小影响着控制器的输出, 是模糊控制器的总的增益, 影响着模糊控制系统特性. K_u 太小会使系统动态响应过程变长, 而太大会使系统振荡加剧. 所以合理的选择量化因子和比例因子很重要.

4 仿真结果

当取初值为 $[0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]$, $k_3 = 18$, $k_{ec} = 5$, $k_u = 25$ 时, 仿真步长为 5 ms, 仿真时间为 5 s. 仿真结果图 3~8 所示:

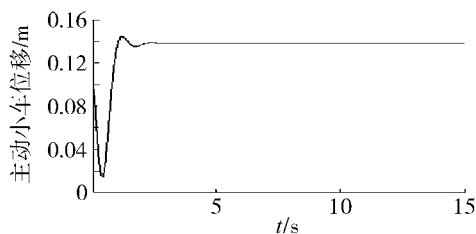


图4 主动小车位移响应曲线

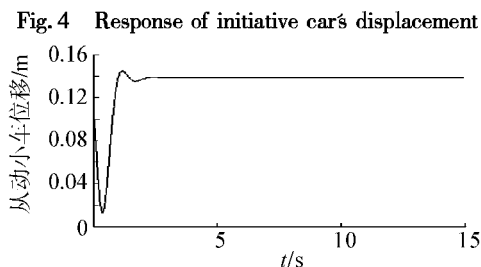


图5 从动小车位移响应曲线

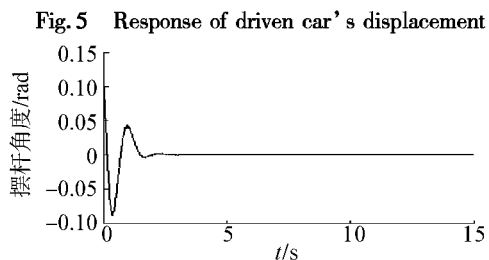


图6 摆杆角度响应曲线

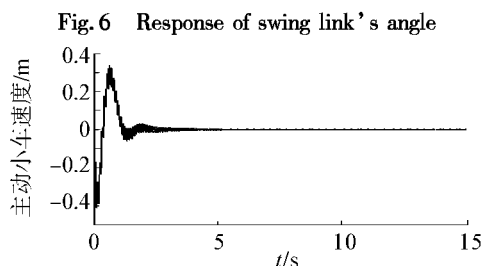


图7 主动小车速度响应曲线

Fig.7 Response of initiative car's rate

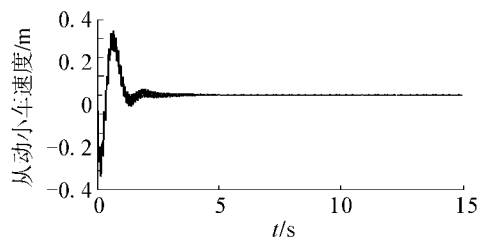


图8 从动小车速度响应曲线

Fig. 8 Response of driven car's

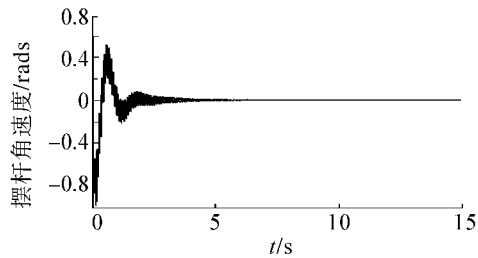


图9 摆杆角速度响应曲线

Fig. 9 Response of swing link's angular velocity

从图4、图5可看出主动小车和从动小车位移偏离平衡位置最大距离都小于0.1m,从图6可看出摆杆在2s达到平衡.由图7、图8、图9可知控制量也处于合理范围.仿真过程证明:模糊控制能实现对柔性倒立摆的平衡控制.

5 实际系统简介

柔性倒立摆硬件包括柔性倒立摆本体、电控箱、运动控制卡和普通的PC机.硬件框图如图10所示.

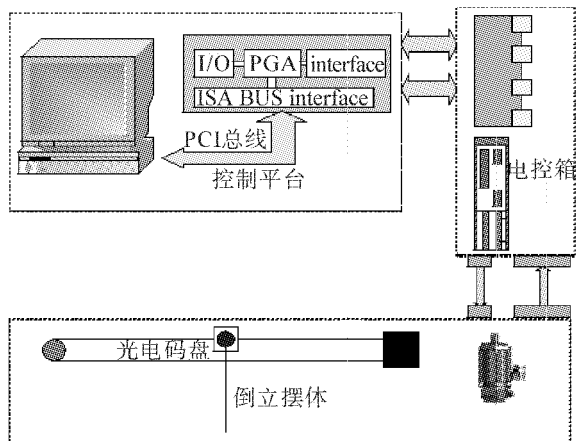


图10 倒立摆硬件框图

Fig. 10 Hardware block diagram of inverted pendulum

其中,控制平台包括:

- 1)带PCI总线插槽的PC机;
- 2)GT400-SV-PCI、运动控制卡;
- 3)计算机与运动控制卡的接口.

电控箱内安装有如下主要部件:

- 1)交流伺服电机驱动器;

- 2)运动控制器的端子板(I/O接口板);
- 3)直流电源;
- 4)开关、指示灯等电气元件.

控制系统实物图如图11所示.

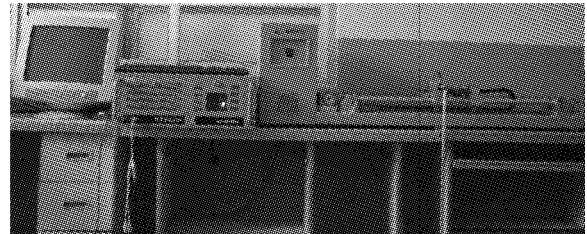


图11 实物图

Fig. 11 Object figure

6 实际系统控制实验

实验所使用的一整套装置(除PC机)由固高科技(深圳)公司提供(包括GLIP2011型直线一级柔性倒立摆本体、电控箱、运动控制卡(GT-400系列)以及控制软件和驱动程序).该公司的倒立摆实时控制工具包里还给出了LQR控制模型.在进行实验时,只需将LQR控制器修改为自己设计的控制器即可.实验结果通过示波器观察.

实时控制框图如图12所示.

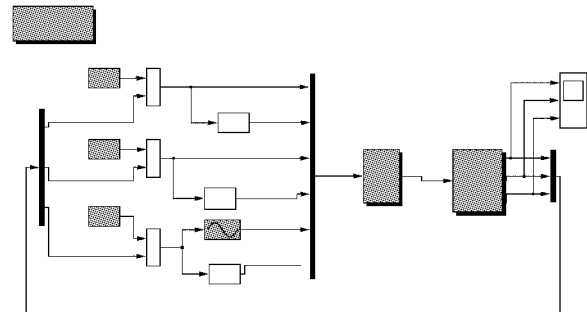


图12 柔性一级倒立摆实时控制框图

Fig. 12 Linear 1-stage flexible-joint inverted pendulum real-time control diagram

图中:“GT400-SV Initialization”是系统初始化模块,“Real Control”是实时控制模块,LQR-FUZZY Controller为基于融合函数的模糊控制器模块.实验结果如图13-15所示:

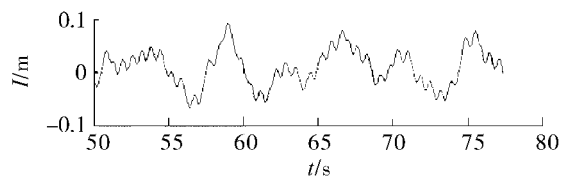


图13 主动小车实时响应

Fig. 13 Real time response of initiative car

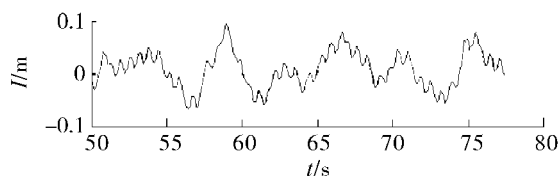


图14 从动小车实时响应

Fig.14 Real time response of driven car

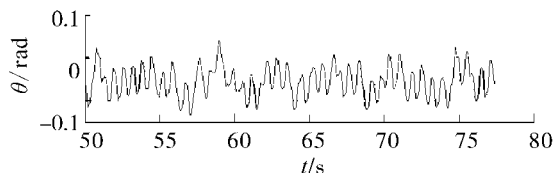


图15 摆杆角度实时响应

Fig.15 Real time response of swing link's angle

由上述响应曲线可知:主动小车和从动小车偏离0参考位置最大值小于0.1m,摆杆也基本能在3.14弧度附近摆动,实现了对柔性倒立摆的稳定控制。

7 结束语

本文运用基于融合函数的模糊控制算法对直线柔性一级倒立摆进行了研究,仿真和实际系统实验结果证明方案的正确性和可行性.但是由于未对模糊规则以及量化因子和比例因子进行优化,使得在实际的控制过程中摆杆存在一定的振动.这是本文需进一步改进的地方。

参考文献:

- [1] 张乃尧, EBERT C, BELSCHNER R, STRAHL H. 倒立摆的双闭环模糊控制[J]. 控制与决策, 1996, 11(1): 85-88.
ZHANG Naiyao, EBERT C, BELSCHNER R, STRAHL H. Fuzzy cascade control of inverted pendulum[J]. Control and decision, 1996, 11(1): 85-88.
- [2] 范醒哲, 张乃尧, 陈宁. 三级倒立摆的两种模糊串级控制方案[C]//第3届全球智能控制与自动化大会. 合肥: 2000:1721-1725.
FAN Xingzhe, ZHANG Naiyao, CHEN Ning. Two fuzzy cascade control schemes of a triple inverted pendulum [C]//Proceedings of 3rd world congress on the intelligent control and automation. Hefei, 2000:1721-1725.
- [3] 宋西蒙. 倒立摆系统 LQR-模糊控制算法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2006.

SONG Ximeng. LQR&FUZZY control algorithm of Inverted pendulum system [D]. Xi'an: Electronics Science and Technology University, 2006.

- [4] 李岩, 姚旭东. 二级倒立摆控制系统分析[J]. 沈阳工业学院学报, 1999, 18(2): 86-92.
LI Yan, YAO Xudong. Analysis of double inverted pendulum control system[J]. Transactions of Shenyang Ligong University, 1999, 18(2): 86-92.
- [5] 丛爽, 张冬军, 魏衡华. 单级倒立摆三种控制方法的对比研究[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(11): 47-49.
CONG Shuang, ZHANG Dongjun, WEI Henghua. Comparative study on three control methods of the single inverted pendulum system [J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(11): 47-49.
- [6] 洪旭. 倒立摆系统模糊控制算法研究[D]. 西安电子科技大学, 2005.
HONG Xu. Fuzzy control algorithm of Inverted pendulum system [D]. Xi'an Electronics Science and Technology University, 2005.
- [7] FURUTA K, OKUTAN T, SONE H. Computer control of a double inverted pendulum[J]. Computers & Electrical Engineering, 1978(5): 67-84.
- [8] 杨世勇, 王培进, 徐莉苹. 倒立摆的一种模糊控制方法[J]. 控制理论与应用, 2007, 26(7): 10-12.
YANG Shiyong, WANG Peijin, XU Liping. Fuzzy control of an inverted pendulum [J]. Control theory and applications, 2007, 26(7): 10-12.

作者简介:



赵潇菲, 女, 1983 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为智能控制。



张井岗, 男, 1965 年生, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制和智能控制及其应用. 主持和完成国家"九五"攻关项目、山西省自然科学基金项目、山西省青年科学基金项目等研究课题, 发表学术论文 60 多篇, 其中 20 余篇分别被 EI、SCI、ISTP 收录。