第 5 卷第 3 期　　智 能 系 统 学 报　　Vol. 5 №. 3
2010 年 6 月　　CAAI Transactions on Intelligent Systems　　Jun. 2010

doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2010.03.002

无穷概念的重新统一

何华灿[1],何智涛[2]

(1. 西北工业大学 计算机学院,陕西 西安 710072; 2. 北京航空航天大学 计算机学院,北京 100191)

摘　要:康托尔是用数学方法系统研究实无穷概念的第一人,为此他创立了集合论,为现代数学奠定了重要的理论基础,但其中的连续统假设和层次实无穷观又给数学带来了许多问题. 130 多年来不断有人怀疑连续统假设,但一直没有找到解决这个问题的有效办法. 文章首先在图灵机基础上提出完全编码算法和完全译码算法,揭示了无穷编码的不变性 (ICI 原理),证明了实数可数、连续统假设不成立,实现了实无穷概念的重新统一,从根本上解决了希尔伯特第一问题. 然后进一步证明所有的无穷集都可通过自然数集变换出来,自然数集是所有无穷集的数学模型. 最后讨论了有关无穷的数学哲学问题. 无穷概念的统一奠定了实无穷理论的基础,对数学、物理、逻辑、哲学和其他许多学科都将产生广泛而深远的影响.

关键词:实无穷;图灵机;无穷编码的不变性;连续统假设;希尔伯特问题;自然数集

中图分类号: O144.1; TP18　**文献标识码**:A　**文章编号**:1673-4785(2010)03-0202-19

Reunifying concepts of infinity

HE Hua-can[1], HE Zhi-tao[2]

(1. School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. School of Computer Science, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Georg Cantor was the first person to use mathematical methods to systematically study the concept of infinity. This work formed the basis of set theory, which in turn evolved into the primary theoretical basis for modern mathematics. However, the continuum hypothesis (CH) and the layered actual infinity view in set theory introduced long lasting paradoxes into modern mathematics. Over the past 130 years, many people have worked on CH, but no one has found a way to prove or disprove it. The authors proposed a solution based on the Turing machine. The complete encoding algorithm and the complete decoding algorithm revealed the infinite coding invariance (ICI principle), proving that the real number set is denumerable and CH does not hold. In this way the reunification of the concepts of infinity was established, effectively solving Hilbert's problem 1. Furthermore, it was proven that infinite sets can all be derived from the natural number set, and the natural number set is the mathematical model of all infinite sets. Finally, we discussed some problems with the mathematical philosophy of infinity. The establishment of a unified concept of infinity forms the basis of an actual infinity theory. It will have a significant effect on mathematics, physics, logic, philosophy and many other scientific disciplines.

Keywords: actual infinity; Turing machine; infinite coding invariance; continuum hypothesis; Hilbert's problems; natural number set

在探索实无穷概念的过程中,康托尔(G. Cantor)根据他的实数不可数定理($\omega_1 > \omega_0$)提出了连续统假设(the continuum hypothesis, CH):在 ω_0 和 ω_1 之间没有其他的超限基数存在. CH 是现行的层次实无穷观的理论基石,这种无穷观认为实无穷是一个由无穷多个大小不同的超限基数组成的系列 ω_0, ω_1, ω_2, $\cdots$ ($\omega_{i+1} = 2^{\omega_i}$)[1]. 由于 CH 涉及到数学、逻辑和哲学中的许多基本问题, 1900 年希尔伯特(D. Hilbert)把它作为 20 世纪需要重点解决的 23 个数学问题之首提了出来. 1938 年哥德尔(K. Gödel)证

收稿日期:2010-03-04.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60273087, 60575034);西北工业大学基础研究基金资助项目(W018101).
通信作者:何华灿. E-mail: hehuac@gmail.com.

明了 ZF 公理集合论与 CH 相容. 1963 年柯亨(P. J. Choen)用他创立的力迫法证明 ZF 系统与 CH 相容. 所以用数学公理方法不能解决 CH 问题,CH 的真伪至今没有结论[2]. 但是,这些证明都是在承认 $\omega_1 > \omega_0$ 的基础上去证明 CH 是否正确,没有人怀疑 $\omega_1 > \omega_0$ 的正确性. 现在,在 $\omega_1 > \omega_0$ 的基础上已经形成了许多自圆其说的"理论",它们妨碍了后人对实无穷问题的继续探索. 我们将直接证明 $\omega_1 > \omega_0$ 本身是不正确的,CH 当然就不成立.

笔者认为,所谓建立统一的实无穷概念就是要定义一个特殊的数∞,它在运算中必须满足 2 个条件: 1)∞ 比任何有限数都大;2)不存在比∞ 更大的数. 康托尔规定正整数集的势为 ω_0,满足了对实无穷的条件 1),他用一一对应方法来确定 2 个无穷集之间的等势关系,已成功地证明对任意正整数 $n \in \mathbf{N}_+$, $n + \omega_0 = n \times \omega_0 = (\omega_0)^n = \omega_0$ 成立[1]. 只是由于没有找到证明 $2^{\omega_0} = \omega_0$ 的合适方法,才最后放弃了对统一实无穷概念的追求,转而提出了相对实无穷概念. 我们根据无穷编码的不变性(infinite coding invariance, ICI 原理)进一步证明 $2^{\omega_0} = \omega_0$,说明 ω_0 能够满足实无穷的条件 2),所以 ω_0 就是统一的实无穷∞. 又由于∞ 比任何有限数都大,其中已经包含了潜无穷的思想,所以∞ 也是统一的无穷概念.

1　研究背景

1.1　数的发展简史

人类认识数至少已有 30 万年的历史,到 19 世纪实数概念已基本形成,其间经历了自然数、分数、数字"0"、负数和无理数等 5 个主要认识阶段,近 100 多年来对数的深入认识主要表现在 2 个方面: 一是继续探索实无穷概念,以最终完成对实数性质的认识;二是通过对实数的组合运用,形成更复杂的数,如复数(加入虚数)、狭义数(加入超复数)和广义数(加入向量、张量、矩阵等)[3].

1.2　3 种无穷观

在历史上关于无穷曾经出现过 2 种完全不同的观念: 一种是潜无穷观(potential infinity),它认为无穷是一个永无终止的增长过程,它不是数;另一种是实无穷观(actual infinity),它认为无穷是一个有确定含义的特殊数. 亚里士多德(Aristotle)是历史上明确区分实无穷和潜无穷的第一人, 他的老师柏拉图(Plato)则是持实无穷观的最早代表. 伽利略(G. Galilei)最先发现一个无穷集可与自己的真子集等势,他用一一对应的方法证明了自然数集{0, 1, 2, 3, 4, …}与平方数集{0, 1, 4, 9, 16, …}等势,从而推翻了欧几里德(M. Eukleides)整体一定大于部分的看法. 在微积分理论的萌芽时期,曾经采取过纯粹的实无穷观,把无穷小量(infinitesimal)看成是一个确定的特殊数. 在柯西(A. L. Cauchy)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)建立了严格的极限理论后,无穷小量概念被抛弃,实无穷观被绝对地排斥, 整个 19 世纪几乎完全被潜无穷观统治[2]. 直到 19 世纪末康托尔创立集合论,才使实无穷观重新回到数学的视野,不过他建立的却是介乎潜无穷和实无穷之间的第 3 种无穷观,称为层次实无穷观(layered infinity). 为了与康托尔的实无穷观相区别,以后在称他之前的实无穷观为统一实无穷观. 概括起来看这 3 种无穷观的主张分别是:

1)潜无穷观: 认为无穷是一个永无终止的增长过程,它不是数,不能参加运算. 也就是说无穷只是一种说话方式,它表示对任何一个整数,都能找到一个比它更大的数,但决不可能穷举所有的整数.

2)统一实无穷观: 认为无穷是一个惟一存在的特殊数,它不仅比任何有限数都大,而且不存在比无穷更大的数. 也就是说无穷的任何运算结果都不会大于无穷,无穷是能够包容一切增长过程的极限.

3)层次实无穷观: 层次无穷观是现行的无穷观,它认为实无穷有不同的层次,最低的实无穷是可数无穷 ω_0,由于有性质 $n \in \mathbf{N}_+$, $n + \omega_0 = n \times \omega_0 = (\omega_0)^n = \omega_0$ 的保证,ω_0 是一个相对稳定的特殊数; 更高一级的实无穷是不可数无穷 ω_1,$2^{\omega_0} = \omega_1$,其他以此类推. 这就像原子的能级结构一样,电子平常稳定在一个较低的能级上旋转,只有吸收到足够的能量后,才会上升到更高的能级. 可见, 在层次无穷观中使用的是相对实无穷概念,而在实无穷观中使用的是统一实无穷概念.

这 3 种无穷观都承认无穷是一个永无终止的增长过程,差别仅仅是无穷是否是数以及有多少个无穷.

本文的论证目标是利用 ω_0 的相对稳定性(即 $n \in \mathbf{N}_+$, $n + \omega_0 = n \times \omega_0 = (\omega_0)^n = \omega_0$)来直接证明 $2^{\omega_0} = \omega_0$ 成立,即证明更高一级的无穷 ω_1 根本不存在,统一实无穷观是惟一正确的无穷观. 为此首先介绍康托尔的层次实无穷观,并且分析他的成功和不足.

1.3　可数集和不可数集

为了说明相对实无穷概念,康托尔把正整数集 $\mathbf{N}_+$ 定义为可数集(denumerable set)的基准,规定 $\mathbf{N}_+$ 的势是最小的无穷 ω_0. 然后用一一对应方法来确定一个无穷集 A 是否与 $\mathbf{N}_+$ 等势(equinumerous),如果等势则 A 也可数;否则 A 不可数(uncountable),

具有比 $\mathbf{N}_+$ 更大的势. 他已经成功地证明了整数、$\mathbf{N}_+ \times \mathbf{N}_+$、有理数和代数数都可数. 还证明了单位区间实数集和实数集等势，这反映在下面的一些重要定理中[1, 4-5].

本文直接使用了朴素集合论中的许多基本概念，如："具有某种特定性质的事物的全体称之为集合，组成集合的每一个事物称为该集合的元素"、"不含元素的集合称为空集 Ø"、"集合中的元素必须具有确定性、互异性和无序性"、集合 S 中元素的个数叫 S 的基数(cardinal number)或势(cardinality)，用 $|S|$ 表示.

定义 1 如能在 2 个集合 A、B 的元素之间建立一一对应关系，则称这 2 个集合等势，用 $|A| = |B|$ 表示.

定义 2 如果 1 个集合能够和它的真子集等势，则叫无穷集，否则叫有限集.

定义 3 正整数集 $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 是可数集，它的势是最小的实无穷，用超限基数 ω_0 表示.

由于有限集不能和自己的真子集等势，所以有限集之间等势关系的确定与元素之间的对应方式无关. 而无穷集可与自己的真子集等势，所以必须有如下定义 4.

定义 4 只要能找到 1 种方法证明无穷集 A 与正整数集 $\mathbf{N}_+$ 等势，则称 A 为可数集；反之，只有所有的方法都不能证明 A 与 $\mathbf{N}_+$ 等势时，才能称 A 为不可数集，不可数集的势大于可数集的势.

康托尔根据上述定义已经证明了下述结论：

定理 1 单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 和任意有限区间实数集 $\mathbf{R}_n$ 等势.

定理 2 单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 和无限区间实数集 $\mathbf{R}$ 等势.

定理 3 单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 和正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的幂集 $\rho(\mathbf{N}_+)$ 等势.

定理 4 自然数集 $\mathbf{N} = \{0,1,2,3,4,\cdots\}$ 是可数集.

定理 5 正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的直积 $\mathbf{N}_+ \times \mathbf{N}_+$ 是可数集.

定理 6 整数集 $\mathbf{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 是可数集.

定理 7 奇数集 $O = \{\cdots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$ 是可数集.

定理 8 偶数集 $E = \{\cdots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$ 是可数集.

定理 9 有理数集 $\mathbf{Q} = \{x \mid x = p/q,\ p, q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0, p, q$ 间没有公因子$\}$ 是可数集.

定理 10 代数数集 $A = \{x \mid x$ 是整系数代数方程的根$\}$ 是可数集.

推论 1 可数集与有限集的并集是可数集；反之，可数集可分解为一个有限集和可数集的并集.

推论 2 2 个不同可数集的并集是可数集；反之，可数集可分解为 2 个不同可数集的并集.

推论 3 至多可数个不同可数集的并集是可数集；反之，可数集可分解为至多可数个不同可数集的并集.

推论 4 对于任何 $n \in \mathbf{N}_+$，可数集的势 ω_0 具有以下运算性质：$n + \omega_0 = n \times \omega_0 = (\omega_0)^n = \omega_0$.

1.4 实数不可数定理和连续统假设

在自然数的运算中，加法是最小的基本增值运算，其次是乘法和乘方，最大的基本增值运算是幂乘. 康托尔已经证明 $n + \omega_0 = n \times \omega_0 = (\omega_0)^n = \omega_0$，只要他能够进一步证明 $2^{\omega_0} = \omega_0$，统一实无穷的概念就成立了. 遗憾的是由于康托尔始终没有找到证明实数可数的一一对应方法，而在 1874 年得出了实数不可数、$2^{\omega_0} = \omega_1 > \omega_0$ 的结论，并根据这个结论在 1878 年提出了连续统假设和层次无穷观. 1874 年康托尔证明实数不可数定理的过程十分复杂，对角论法是他 3 年后提出的另一个比较简单的证法[6]. 该方法用反证法证明单位区间的实数集 $\mathbf{R}_1$ 是不可数集合，下面用二进制数模仿康托尔的对角线法来进行实数不可数定理的证明(见图 1).

$\mathbf{R}_1$ \ $\mathbf{N}_+$	1	2	3	4	⋯	i	⋯
X_1	$0.\ a_{11}$	a_{12}	a_{13}	a_{14}	⋯	a_{1i}	⋯
X_2	$0.\ a_{21}$	a_{22}	a_{23}	a_{24}	⋯	a_{2i}	⋯
X_3	$0.\ a_{31}$	a_{32}	a_{33}	a_{34}	⋯	a_{3i}	⋯
X_4	$0.\ a_{41}$	A_{42}	a_{43}	a_{44}	⋯	a_{4i}	⋯
⋮	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
X_i	$0.\ a_{i1}$	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	⋯	a_{ii}	⋯
⋮	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

Y	$0.\ b_1$	b_2	b_3	b_4	⋯	b_i	⋯

图 1 康托尔的对角线法

Fig. 1 Cantor's diagonal method

伪定理 1(实数不可数定理) 单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 是不可数集，$2^{\omega_0} = \omega_1 > \omega_0$.

证明 用反证法证：

1)设 $\mathbf{R}_1$ 是可数集，它必然与正整数集 $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \cdots, i, \cdots\}$ 等势，可表示成 $\mathbf{R}_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_i, \cdots\}$，二者在 i 和 $x_i (i = 1, 2, 3, 4, \cdots)$ 之间存在一一对应关系；

2)将每一个单位区间实数都以无穷小数的全码形式 $x_i = 0.\ a_{i1} a_{i2} a_{i3} a_{i4} \cdots a_{ii} \cdots$ 表达，即保留二进制编码中全部无效位和有效位，且不允许有近似性的舍入出现(例如严格区分 $0.\ 0\underline{11\cdots1}$ 和 $0.\ 1\underline{00\cdots0}$ 是 2

个完全不同的数）；

3）规定实数集 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_i, \cdots\}$ 中的顺序是随机排列的；

4）将每个 $x_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots a_{ii}\cdots$ 中 a_{ii} 的值改变为 $\{0, 1\}$ 中的另一个值 b_i；

5）这样就可得到单位区间中的一个新实数 $y = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots b_i\cdots$，由于 y 中至少有 b_i 与 x_i 中的 a_{ii} 不相同，所以 $y \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_i, \cdots\}$；

6）由于 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_i, \cdots$ 的顺序是随机排列的，可以任意改变，a_{ii} 的值也是随机出现的，可以任意改变，所以上述几点已经一般性地证明了实数集 $\mathbf{R}_1$ 是可数集合的前提假设不成立.

7）根据定义 4，实数集 $\mathbf{R}_1$ 是不可数集合，其势 $|\mathbf{R}_1| > \omega_0$；

8）由于实数 $x_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots a_{ii}\cdots$ 中每位都有 0、1 两种取值的可能性，实数集 $\mathbf{R}_1$ 的势 $|\mathbf{R}_1| = 2^{\omega_0}$，所以有 $2^{\omega_0} = \omega_1 > \omega_0$ 成立.

根据伪定理 1（后面将用伪定理 2 证明它的错误），康托尔认为潜无穷观和统一实无穷观都不正确，他提出了著名的连续统假设和超限基数假设，形成了他自己的层次实无穷观.

假设 1（连续统假设 CH）　在 ω_1 和 ω_0 之间没有其他的超限基数存在.

假设 2（超限基数假设）　实无穷不是一个惟一确定的特殊数，而是一个可无限增大的超限基数序列：$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots$ $(\omega_{i+1} = 2^{\omega_i}, i = 0, 1, 2, 3, \cdots)$.

康托尔曾经多次声称要给出连续统假设的证明，但直到临终他也没有发表. 与他当年在数学界遭到普遍反对的情况不同，在现代数学中，康托尔的层次实无穷观和相对实无穷概念已经牢牢地占据了统治地位.

1.5　康托尔的层次实无穷观和相对实无穷概念

根据超限基数假设，康托尔把无穷分成了许多不同的等级：0 级实无穷是可数无穷，它广泛存在，其典型实例是正整数集和有理数集的势；1 级实无穷是不可数无穷，其典型实例是实数集和正整数幂集的势；2 级实无穷的典型实例是所有函数的集合和 $\mathbf{R}_1$ 幂集的势；2 级以上的实例现在也说不清楚.

定义 5　设 $f(\omega_i)$、$g(\omega_i)$ 是定义在超限基数序列 ω_i $(i = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 上的基本增值函数，如果 $f(\omega_i) = \omega_i$，则称 $f(\omega_i)$ 为 i 级保级函数；如果 $g(\omega_i) = \omega_{i+1}$，则称 $g(\omega_i)$ 为升级函数.

由推论 4 知，康托尔已经证明在可数集合中有 0 级保级函数 $f_1(\omega_0) = n + \omega_0 = \omega_0$、$f_2(\omega_0) = n \times \omega_0 = \omega_0$ 和 $f_3(\omega_0) = (\omega_0)^n = \omega_0$；在不可数集合中有 1 级保级函数 $f_1(\omega_1) = n + \omega_1 = \omega_0 + \omega_1 = \omega_1$，$f_2(\omega_1) = n \times \omega_1 = \omega_0\omega_1 = \omega_1$ 和 $f_3(\omega_1) = (\omega_1)^n = \omega_1$；用类似的方法还可证明这 3 个保级函数能推广到任意 i 级. 由伪定理 1 知，康托尔已经发现的升级函数只有 $g(\omega_i) = 2^{\omega_i} = \omega_{i+1}$.

由此可见，康托尔提出的相对实无穷不是统一实无穷，因为它不是惟一存在的特殊数；但也不是潜无穷，因为它是特殊的数，有相对确定的大小，在各种保级函数的保护下具有相对的稳定性，只有在遇到升级函数作用时，才会改变它的大小. 所以康托尔的无穷观是层次实无穷观，他使用的是相对实无穷概念. 下面给出严格的数学描述.

定义 6　如果存在一个超限基数 ∞，它对任意正整数 $n \in \mathbf{N}_+$ 满足：1）$n < \infty$；2）对任意基本增值函数 $f(x)$ 有 $f(\infty) \leqslant \infty$，则称 ∞ 为统一实无穷.

定义 7　如果存在一个无限增大的超限基数序列：$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots$ $(\omega_{i+1} = 2^{\omega_i}, i = 0, 1, 2, \cdots)$，其中的任意 ω_i 都满足：$n \in \mathbf{N}_+$，1）$n < \omega_i$；2）存在保级函数 $f(\omega_i) = \omega_i$（如 $n + \omega_i = n \times \omega_i = \omega_i^n = \omega_i$）；3）存在升级函数 $g(\omega_i) = 2^{\omega_i} = \omega_{i+1}$，则称 ω_i 为相对实无穷.

概括起来说，康托尔的层次实无穷观有以下要点：

1）不存在一个统一的实无穷 ∞；

2）存在无穷多个大小不同的相对实无穷 ω_i $(\omega_{i+1} = 2^{\omega_i}, i = 0, 1, 2, \cdots)$；

3）正整数集的势是最小实无穷 ω_0 的典型代表，单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 的势是 ω_1 的典型代表，$\mathbf{R}_1$ 幂集的势是 ω_2 的典型代表；

4）在每级无穷 i 内，都有一些保级函数 $f(\omega_i) = \omega_i$ 使相对实无穷 ω_i 在 i 级内保持稳定不变；

5）只有升级函数 $g(\omega_i) = 2^{\omega_i} = \omega_{i+1}$ 才能提升相对实无穷的层次.

形成康托尔层次实无穷观的关键因素是实数不可数定理（伪定理 1），它是升级函数 $g(\omega_i) = 2^{\omega_i} = \omega_{i+1}$ 成立的理论依据，是促使实无穷不断升分级的根源. 要想建立统一实无穷理论，必须首先推翻这个定理.

100 多年来有不少数学家和哲学家发现，连续统假设为数学带来悖论和许多麻烦，因而怀疑康托尔的层次实无穷观，但至今没有找到解决它的有效办法. 在我国，一直有人在以各种不同的方式论证实数可数、连续统假设不成立，但是这些工作一直没有引起数学界的足够重视[7-8].

本文将用无穷编码的不变性原理证明 $2^{\infty} = \infty$ 成立，重新统一无穷概念，所以下面直接用 ∞ 表示无穷.

2 完全编码算法和自然数集

2.1 自然数集的原始形态

1)最典型的无穷集是数集,而数集又有自然数、整数、有理数、实数、复数、狭义数和广义数之分[3-4]. 从数的发展史上看,最早出现的是自然数,它是纯粹的数字编码符号串. 后来出现的各种数集都是在这个编码符号串的基础上,或者在串外增加小数点的位置标志,或者在串内增加某些辅助符号(如表示+、-的符号位,表示虚部和实部的i/r位),或者给编码符号串指定位置标志(如在数组、行列式中表示不同分量的特别标志符 a_n),如此等等,就形成了不同类型的数集. 所以从本质上看,各种数集都是变形的数字编码符号串,或者说是在自然数编码基础上的变形.

2)本文讨论的各种无穷数集都是完全集,它包含了该数集中可能有的全部元素(数值),其中包括通常见到的有限值数和理论上存在的无穷值数两大部分,且可以从小到大顺序地排列.

3)自然数集同时具有内蕴性(inner implication property)和排序性(ordering property)2种不同的性质,它在无穷性方面也有2种不同的表现. 内蕴性是潜藏于自然数列中的微观属性,表现为个别数与数之间的各种不同关系,这些关系将随自然数列的不断延伸而变化,永远不可能被完全认识. 排序性是自然数列中的宏观本性,表现为自然数列整体所具有的单一序结构,它不随自然数列的不断延伸而变化,可以被完全认识. 根据自然数集的内蕴性,必然主张潜无穷观,认为无穷是一个永远不会完成的开放过程. 根据自然数集的排序性,可以形成实无穷观,认为无穷是一个已经完成了的封闭过程. 可见康托尔定义正整数集的势是实无穷∞,利用的就是自然数集的排序性,在这里正整数集{1,2,3,4,…}是一个已经完成了(延伸达于终止)的无限过程[9].

4)由于{1,2,3,4,…}是一个已经完成了的无限过程,它有∞个元素,所以可用外推法在原来考虑的对象{1,2,3,4,…}中添加理想元∞而得到{1,2,3,4,…,∞},这个新的数学实体既可把"∞"圈在其中,又把原来的东西原封不动地保留下来[4]. {1,2,3,4,…,∞}的意思是集合中的元素可以无限制的增加,但是它总是从1开始,到∞结束. "无穷集合在形式上有下界和上界"并不是荒谬的事情,例如[0,1]区间的实数集就是这样,它从0开始,到1结束,中间包含有无穷多个元素. 其实,添加理想元素的方法在数学中经常使用,如在射影空间中为了表示平面中2条平行线能够在无穷远处相交,在直线上增加一个无穷远点∞,得到了"扩充直线"的概念. 又如在拓扑学中的单点紧化、非欧几何模型和数论中的库默理想数等.

5)自然数中的所有数都可用进位制数来具体表示(本文以二进制数为例进行讨论). 从编码的角度看,尽管通常见到的有限数可以用有限位编码来表示,但理论上存在的无穷数必然是无穷位编码. 所以,为了得到数集中的全部数值,必须用无穷位计数器来生成这些数的编码. 对有限数来说,编码中包含有效位和无效位,通常的表示方法是省略无效位,保留有效位. 而理论上存在的无穷数必须是无穷位编码,其中没有无效位可以省略. 为了方便讨论,规定一律使用无穷位全码表示法,不允许省略无效位.

综上几点,可以得出这样的结论:1)任何一个完全的数集都需要用一个无穷位计数器来进行编码,编出的不同符号串代表数集中的不同数值;2)数集中的数包括有穷值和无穷值,它们全都用无穷位的编码符号串来表示,即本文中不允许把有穷值中的无效位省略.

不加任何辅助符号的数字编码符号串的直接解释就是自然数,所以称自然数集为原始数集,自然数集以外的其他数集为现实数集. 本节用完全编码算法先研究原始形态的自然数集,下节再用完全译码算法研究各种添加了辅助符号的现实数集.

由康托尔的层次实无穷观知,尽管统一实无穷不存在,存在的都是相对实无穷,但以正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的势为代表的0级实无穷仍然是一个相对稳定的特殊基数∞. ∞的包容性已经非常强大,按照康托尔发现的0级保级函数知,$n+\infty=n\times\infty=(\infty)^n=\infty$,这就是说,∞的容量已经大到可以容下$(\infty)^n$多个∞在里面,只是在遇见了升级函数$2^\infty$后,才会升到1级实无穷. 本文将进一步证明∞不仅是相对稳定的特殊基数,而且是绝对稳定的特殊基数. 也就是说,先假定∞是0级实无穷,然后证明1级实无穷等于0级实无穷,即∞是统一实无穷.

2.2 完全编码算法

根据图灵机原理,完全编码算法(complete encoding algorithm, CEA)由完全计数器(complete counter, CC)和原始存储器(primitive memory, PM)两部分组成. CC的功能是按照二进制进行连续地计数,生成所有∞位二进制原始码,它从∞位0(用$\underline{0\cdots00}$表示)开始,不断地加1,直到∞位1(用$\underline{1\cdots11}$表示)结束,共生成了2^∞个不同的原始码. 无穷位计数过程在理论上能够结束,是因为按照0级无穷的性

质,理论上讲∞位是计数器的最高位,如果到∞位1…11后还要继续加 1,将产生进位溢出,重新回到∞位0…00状态. PM 的功能是顺序存放 CC 生成的所有原始码,它共有 2^{∞} 个存储单元,按照 0,1,2,…,$2^{\infty}-1$ 顺序编号.

图 2 是 PM 的存储状态图,其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_{\infty}$表示计数器的$\infty$位,$d_0,d_1,d_2,d_3,\cdots$表示存储器的地址编号. 图 2(a)是 2 位计数的状态,它共有 $2^2=4$ 种不同的原始编码: 00、01、10、11; 图 2(b)是 3 位计数的状态,它共有 $2^3=8$ 种不同的原始编码: 000、001、010、011、100、101、110、111; 图 2(c)是∞位计数的状态,它共有 2^{∞} 个不同的原始编码: 0…00,0…01,0…010,0…011,…,1…11.

1	1	d_3
1	0	d_2
0	1	d_1
0	0	d_0
a_2	a_1	

(a)

1	1	1	d_7
1	1	0	d_6
1	0	1	d_5
1	0	0	d_4
0	1	1	d_3
0	1	0	d_2
0	0	1	d_1
0	0	0	d_0
a_3	a_2	a_1	

(b)

1	…	1	1	1	$d_{1'}$
1	…	1	1	0	$d_{2'}$
1	…	1	0	1	$d_{3'}$
1	…	1	0	0	$d_{4'}$
…	…	…	…	…	⋮
…	…	…	…	…	⋮
…	…	…	…	…	⋮
0	…	1	1	1	d_7
0	…	1	1	0	d_6
0	…	1	0	1	d_5
0	…	1	0	0	d_4
0	…	0	1	1	d_3
0	…	0	1	0	d_2
0	…	0	0	1	d_1
0	…	0	0	0	d_0
a_{∞}	…	a_3	a_2	a_1	

(c)

图 2　PM 的存储状态图

Fig. 2　Illustration of the storage states of PM

2.3　ICI 原理

定理 11　原始码集合 $P=\{$0…00,0…01,0…010,0…011,…,1…11$\}$的势是 2^{∞}.

证明　用数学归纳法证明如下(参见图 2):

因为计数器的每一位都有 0、1 两种可能性,所以由完全编码算法 CEA 可知,CC(2)可生成 $2^2=4$ 个不同的原始码;CC(3)可生成 $2^3=8$ 个不同的原始码;如果 CC(n)可生成 2^n 个不同的原始码,则 CC($n+1$)可生成 $2\times2^n=2^{n+1}$个不同的原始码; 由数学归纳法可知,当 $n\to\infty$ 时,CC 可生成 2^{∞}个不同的原始码. 而 PM 正好能够存放 CC 生成的 2^{∞} 个不同的原始码,所以原始码集合 $P=\{$0…00,0…01,0…010,0…011,…,1…11$\}$的势是 2^{∞}.

定理 12　原始码集合 $P=\{$0…00,0…01,0…010,0…011,…,1…11$\}$的数值解释是自然数集 **N**, P 是可数集.

证明　将 P 中的原始码看成是二进制整数,由于其中的无效位并不影响数的值,得到的数值是$\{$0,1,10,11,100,…,1…11$\}$,所以 P 的数值解释是自然数集 **N**,按照定理 4,P 是可数集.

以后常常称原始码集合 $P=\{$0…00,0…01,0…010,0…011,…,1…11$\}$为自然数集的原始形式或者自然数集,称 CC 为自然数生成器,称 PM 为自然数存储器.

推论 5(无穷编码的不变性 ICI 原理)　由∞位计数器生成的代码数仍然是∞,即 $2^{\infty}=\infty$.

在这里利用康托尔的相对实无穷概念和性质,进一步证明了升级函数 $g(\omega_i)=2^{\omega_i}=\omega_{i+1}$不成立,相对实无穷 ω_0 就是惟一存在的实无穷∞.

2.4　ICI 原理的物理解释

ICI 原理有 3 层含义,它们都体现在图 2 中,图 2 是一个值得反复领悟的重要对象.

第 1 层意思是关于∞是 0 级相对实无穷的诠释. 由于 0 级保级函数的性质 $n+\infty=n\times\infty=(\infty)^n=\infty$ 保持了∞的相对稳定性,它最多可以容下$(\infty)^n$ 多个∞而不会升级;所以在图 2(c)中,无论计数器 CC 的长度是相对地增加或是缩短,它仍然是∞位. 计数器 CC 的长度∞不变,它在 PM 中生成的全部编码也就不变,仍然是从∞位0…00 开始,不断地加 1,直到∞位1…11 结束,这个计数状态图十分稳定.

第 2 层意思是关于∞是统一实无穷的诠释. 从图 2(a)和(b)看,n 位计数器可编出 2^n个码,显然有 $2^n>n$,但是从图 2(c)看,情况就完全不同了. 尽管∞位计数器编出的码有 2^{∞}个,但由于∞位计数器本身是自然数生成器,它编出的全部编码集就是自然数集,其势必然是∞,所以 $2^{\infty}=\infty$. 这就是说,用∞位的计数器,生成的全部编码集仍然是∞. 所以有一个无穷符号∞就完全够用了,不需要更多的无穷符号,∞是统一实无穷.

第 3 层意思是关于∞中有潜无穷思想的诠释. 在实无穷的概念中并没有排斥潜无穷的思想,而是融进了潜无穷的思想. 从图 2(c)看,尽管计数器有∞位 (即 ω_0),但这个∞只是代表一个永无终止的增长过程的抽象符号. 图 2(c)用这个抽象符号规定了一个新的计数过程(即 ω_1),它从∞位0…00 开始,不断地加 1,直到∞位1…11 结束. 由于这个计数过程要等待一个永无终止的增长过程,即全1…11状态的到来才能结束,所以这个计数过程也是一个永无终止的增长过程,它仍然可以用同一个抽象符号∞来代表. 如果再把这个计数过程 (即 ω_1)当成计数器的∞位,重新规定了一个新的计数过程(即 ω_2),情况仍然会同样地重复下去,永远不会改变

(即 $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \infty$). 从这个意义上讲,在实无穷∞中,包含有潜无穷的思想,即这个特殊数∞代表的是一个永无终止的增长过程.

概括起来说,通过 ICI 原理可以得出如表 1 所示的结论.

表 1 根据 ICI 原理所得出的结论

Table 1 The conclusions through the ICI principle

无穷观	被 ICI 原理证实的观点	被 ICI 原理证伪的观点
潜无穷观	无穷是一个永无终止的增长过程	无穷不是数,不能参加运算
层次实无穷观	无穷是一些特殊数,它比任何有限数都大(即它也是一个永无终止的增长过程). 具体体现在定义可数无穷 $\omega_0 = \vert \mathbf{N}_+ \vert$,用一一对应方法证明 $n \in \mathbf{N}_+, n + \omega_0 = n \times \omega_0 = (\omega_0)^n = \omega_0$	因为 $2^{\omega_0} = \omega_1 > \omega_0$,所以无穷是一个不断增加的无穷序列 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots$ ($\omega_{i+1} = 2^{\omega_i}, i = 0,1,2,3,\cdots$)
统一实无穷观	无穷是一个特殊数,它比任何有限数都大(即它也是一个永无终止的增长过程),不存在比无穷更大的数. 具体体现在定义$\infty = \vert \mathbf{N}_+ \vert$,用一一对应方法证明 $n \in \mathbf{N}_+, n + \infty = n \times \infty = \infty^n = 2^\infty = \infty$	无

现在已经很清楚,能够重新统一无穷概念的基础是 3 种无穷观都认为无穷是一个永无终止的增长过程. 过去潜无穷论者之所以反对实无穷观,是因为他们没有发现用一个特殊的数(即理想元∞)来抽象地表示这个过程的方法;后来尽管康托尔发现了用一个特殊的数来抽象地表示这个过程的方法,但由于没有找到证明 $2^\infty = \infty$ 的有效方法,得出了 $2^\infty > \infty$ 的错误结论,所以他又提出层次实无穷观来反对统一实无穷观;本文在康托尔的基础上进一步证明了 $2^\infty = \infty$,重新统一了无穷概念,最终确立了统一实无穷观.

ICI 原理是信息世界的基本属性之一,这个性质对人类正确认识和理解与无穷有关的各种自然规律有重要意义. ICI 原理是理解本文的关键,而数的无穷位编码原理又是理解 ICI 原理的关键,它们是统一无穷概念、进一步建立统一实无穷理论的重要基础.

2.5 连续统假设不成立的更多证明

本来,ICI 原理的发现已经直接推翻了 $2^\infty > \infty$ 的错误结论,层次无穷观已经失去了它存在的前提,自然就回到了统一实无穷观. 但是,由于层次无穷观已经渗透到数学的每一个细胞,最近 100 多年来在它的基础上已经形成了各种各样自圆其说的概念、理论和学说,要想让人们马上接受这个颠覆性结果绝非易事. 可以想象,不少人的第一反应肯定是强烈的反对,他们会不自觉地根据在 $2^\infty > \infty$ 基础上形成的这些概念、理论和学说,对 $2^\infty = \infty$ 提出各种各样的疑问和非难. 有的人甚至会不屑一顾,认为它不过是众多的"民科抄作"之一. 为了积极回应可能出现的疑问和非难,下面将用更多的方法来证明 $2^\infty = \infty$ 成立,它们的作用和 ICI 原理等效.

1) 利用单位区间实数集证明 $2^\infty = \infty$.

定理 13 单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 与自然数集等势,$2^\infty = \infty$.

证明 单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 用无穷位小数的全码{$0.\underline{0\cdots00}, 0.\underline{0\cdots001}, 0.\underline{0\cdots010}, 0.\underline{0\cdots011}, 0.\underline{0\cdots0100}, \cdots, 0.\underline{1\cdots11}$}来表示,由于每位都有 0、1 两种可能性,其势是 2^∞. 又因为计数器的编码状态与小数点的有无毫无关系,显然在单位区间实数集的全码与自然数集的全码之间存在如下的一一对应关系.

自然数	$\underline{0\cdots00}$	$\underline{0\cdots01}$	$\underline{0\cdots0}10$	$\underline{0\cdots0}11$	$\underline{0\cdots0}100$	$\cdots$	$\underline{1\cdots11}$
单位区间实数	$0.\underline{0\cdots00}$	$0.\underline{0\cdots01}$	$0.\underline{0\cdots0}10$	$0.\underline{0\cdots0}11$	$0.\underline{0\cdots0}100$	$\cdots$	$0.\underline{1\cdots11}$

按照定义 4 知,单位区间实数集 $\mathbf{R}_1$ 与自然数集等势,$|\mathbf{R}_1| = \infty$. 所以,$2^\infty = \infty$.

2) 利用正整数的幂集证明 $2^\infty = \infty$.

定理 14 正整数的幂集 $\rho(\mathbf{N}_+) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{2,1\}, \{3\}, \cdots, \{\infty, \cdots, 4, 3, 2, 1\}\}$ 与自然数集等势,$2^\infty = \infty$.

证明 由于 $\mathbf{N}_+$ 的势是∞,而 $\mathbf{N}_+$ 中每个元素在 $\mathbf{N}_+$ 的每个子集中都有出现或不出现 2 种可能性,所以 $|\rho(\mathbf{N}_+)| = 2^\infty$. 将原始码集 P 中的 0、1 代码作下列变换:将全部 0 变换成 $\varnothing$,将 a_i ($i = 1,2,3,4,\cdots,\infty$) 位中的全部 1 变换成 i,然后把每个∞位编码串内部的符号取并集,就可以发现在正整数幂集 $\rho(\mathbf{N}_+)$ 和原始码集 P 之间有如下的一一对应关系存在.

自然数	$\underline{0\cdots00}$	$\underline{0\cdots01}$	$\underline{0\cdots010}$	$\underline{0\cdots011}$	$\underline{0\cdots0100}$	…	$\underline{1\cdots11}$
正整数的幂集	$\varnothing$	{1}	{2}	{2,1}	{3}	…	{∞,…,4,3,2,1}

而原始码集就是自然数集,按照定义 4 知,正整数幂集与自然数集等势,$|\rho(\mathbf{N}_+)|=\infty$. 所以,$2^\infty=\infty$.

3) 利用 $\infty+1=\infty$ 证明 $2^\infty=\infty$.

康托尔已经证明可数无穷具有基本运算性质 $\infty+1=\infty$,直接利用 $\infty+1=\infty$ 和数学归纳法,同样可证明 $2^\infty=\infty$ 成立.

公理 1　子集的势不大于全集的势.

例如,$|\{1,2\}|\leqslant|\mathbf{N}|$,$2^\infty\geqslant\infty$,$2^\infty\leqslant\infty^\infty$ 等.

定理 15　如果 ∞ 是可数无穷,它满足 $\infty+1=\infty$,则必然满足 $2^\infty=\infty$.

证明　反复利用基本性质 $\infty+1=\infty$ 和数学归纳法:

第 1 次:由 $\infty+1=\infty$ 知,$(\infty+1)+1=\infty+2=\infty$,$(\infty+2)+1=\infty+3=\infty$,如果 $\infty+n=\infty$ 成立,则 $(\infty+n)+1=\infty+(n+1)=\infty$ 成立,根据数学归纳法可知有 $\infty+\infty=\infty$ 成立,也就是 $2\infty=\infty$ 成立;

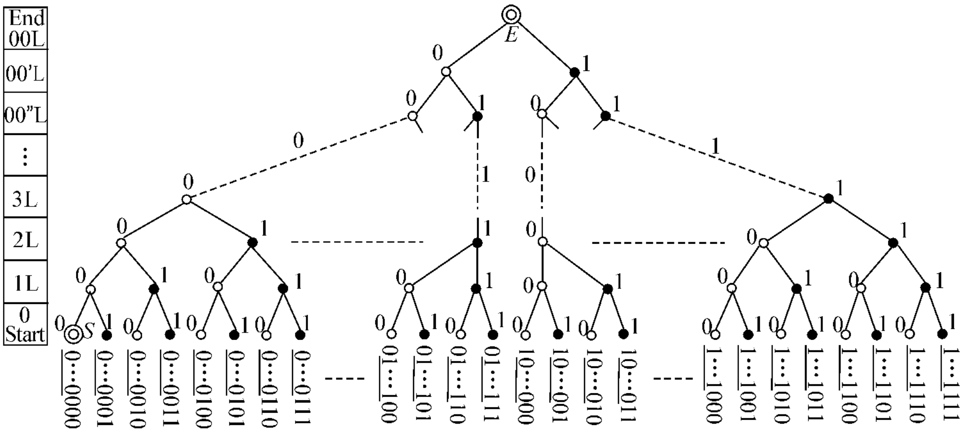
第 2 次:由 $\infty+\infty=2\infty=\infty$ 知,$2\infty+\infty=3\infty=\infty$,$3\infty+\infty=4\infty=\infty$,如果 $n\infty+\infty=(n+1)\infty=\infty$ 成立,则 $(n+1)\infty+\infty=(n+2)\infty=\infty$ 成立,根据数学归纳法可知有 $\infty\infty=\infty$ 成立,也就是 $\infty^2=\infty$ 成立;

第 3 次:由 $\infty\infty=\infty^2=\infty$ 知,$\infty^2\infty=\infty^3=\infty$,$\infty^3\infty=\infty^4=\infty$,如果 $\infty^n\infty=\infty^{n+1}=\infty$ 成立,则 $\infty^{n+1}\infty=\infty^{n+2}=\infty$ 成立,根据数学归纳法可知有 $\infty^\infty=\infty$ 成立.

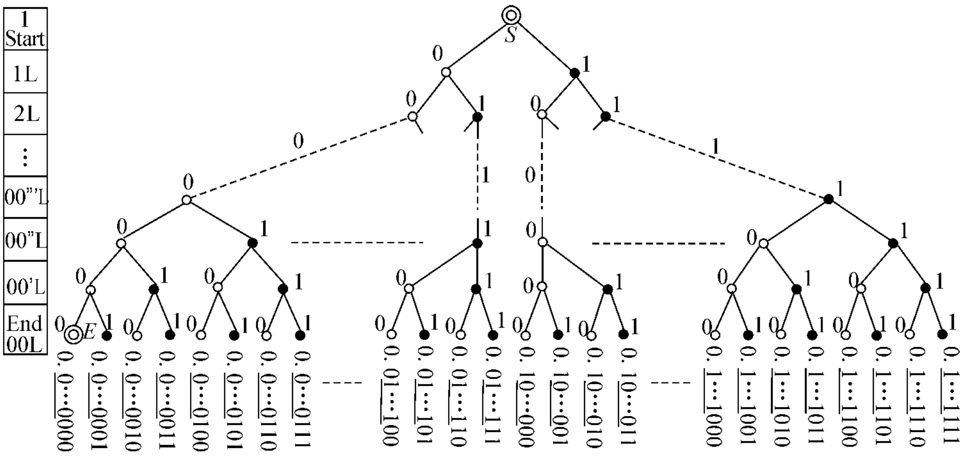
根据公理 1 知 $2^\infty\geqslant\infty$,又由 $\infty^\infty=\infty$ 知 $2^\infty\leqslant\infty^\infty=\infty$,所以 $2^\infty=\infty$ 成立.

4) 利用无穷层满二叉树证明 $2^\infty=\infty$.

有 2 种不同的方法生成无穷层满二叉树(见图 3):



(a) 用无限倍增法生成的无穷层满二叉树



(b) 用无限二分法生成的无穷层满二叉树

图 3　2 个不同的无穷层满二叉树完全同构

Fig. 3　Two different infinite levels full binary trees are complete isomorphism a)一种是自下向上的无限倍增法(见图3(a)),它能够生成全部的自然数,其具体过程是:

从最左叶结点 S 开始,它代表自然数0;

通过倍增生成第1层父结点,得到的叶结点代表[0,1]中的全部自然数0和1;

通过倍增生成第2层父结点,得到的叶结点代表[0,3]中的全部自然数0、1、10、11;

通过倍增生成第3层父结点,得到的叶结点代表[0,7]中的全部自然数0、1、10、11、100、101、110、111;

……

一般地,通过倍增生成第 n 层父结点,得到的叶结点代表 $[0,2^n-1]$ 中的全部自然数0,1,10,11,100,101,110,111,…,1…11;

……

最后,通过倍增生成第∞层父结点,得到的叶结点代表全部自然数0,1,10,11,100,101,110,111,…,$\underline{1\cdots11}000$,$\underline{1\cdots11}001$,$\underline{1\cdots11}010$,$\underline{1\cdots11}011$,$\underline{1\cdots11}100$,$\underline{1\cdots11}101$,$\underline{1\cdots11}110$,$\underline{1\cdots11}$;

根结点 E 表示过程结束. 整个无穷层满二叉树有共有∞层,2^∞ 个叶结点.

b)另一种是自上向下的无限二分法(见图3(b)),它能生成全部的单位区间实数,其具体过程是:

从根结点 S 开始,它代表将被分割的实数1;

用二分法生成根的第1层子结点0、1,它们代表小数点后面1位的全部单位区间实数0.0、0.1;

用二分法生成根的第2层子结点00、01、10、11,它们代表小数点后面2位的全部单位区间实数0.00、0.01、0.10、0.11;

用二分法生成根的第3层子结点000、001、010、011、100、101、110、111,它们代表小数点后面3位的全部单位区间实数0.000、0.001、0.010、0.011、0.100、0.101、0.110、0.111;

……

一般地,用二分法生成根的第 n 层子结点0…00,0…01,0…010,0…011,…,1…11,它们代表小数点后面 n 位的全部单位区间实数0.0…00,0.0…01,0.0…010,0.0…011,…,0.1…11;

……

最后,用无限二分法生成根的第∞层子结点 $\underline{0\cdots0}0$,$\underline{0\cdots0}01$,$\underline{0\cdots0}10$,$\underline{0\cdots0}11$,…,$\underline{1\cdots11}$,它们代表小数点后面∞位的全部单位区间实数0.$\underline{0\cdots00}$,0.$\underline{0\cdots0}01$,0.$\underline{0\cdots0}10$,0.$\underline{0\cdots0}11$,…,0.$\underline{1\cdots11}$;

最左叶结点0代表过程结束,用 E 表示. 整个无穷层满二叉树有∞层,2^∞ 个叶结点,每个叶结点正好代表1个单位区间实数.

对比图3(a)和(b)2棵无穷层满二叉树,尽管一个代表自然数集,其势是∞,另外一个代表单位区间实数,其势是 2^∞;但它们都有∞层,2^∞ 个叶结点,是完全同构的,而已经定义自然数集的势是∞,所以必然有 $2^\infty=\infty$ 成立.

从康托尔的层次实无穷观到无穷概念的重新统一,历史走过了一个多世纪,但从公式上看,只差一个符号:是 $2^\infty=\infty$ 还是 $2^\infty>\infty$? 由于本文证明了 $2^\infty=\infty$ 成立,升级函数变成了保级函数,促使实无穷不断升级的根源消除了,层次实无穷观失去了理论支撑,自然回归为统一实无穷观.

2.6 康托尔失误的原因

康托尔证明实数不可数定理的基本思想是:正整数的势是∞,实数的势是 2^∞,它们之间当然不可能建立一一对应关系. 康托尔在对角线法中把单位区间的实数表示成无穷位编码 $x_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$,把正整数表示为几何点1,2,3,…,∞,这没有错误. 因为任何一个数值点只有惟一一个数值编码,反之亦然. 错误发生在他把作为"点"的正整数和无穷位编码形式的实数中"位"进行了一一对应的捆绑. 这就使得问题的性质发生了根本的改变,不再是数集和数集之间的比较,而成了在无穷位计数器中,位数和它生成的编码数的直接比较. 这就像是用计数器的"位数"作为长度单位,去丈量计数器生成的编码数目,结果肯定是 $2^\infty/\infty$ 不等于1(见图4(a)). 所以通过这样的捆绑后,用对角线法永远只能考察到实数中的一个真子集,没有可能遍及所有 2^∞ 个不同的值. 由定义4可知,根据对角线法只能得出在实数中存在许多可数的真子集的结论,不能得出实数不可数的结论.

反之,如果承认对角线法的证明是正确的,那么同样可以利用它证明自然数集不可数. 办法十分简单:只需在证明中将 x_i 的小数点去掉,就得到一个全码表示的自然数 $x_i=a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$. 在这里 x_i 的表示与通常的自然数表示有2点不同:一般的表示是从低位向高位排序为 $a_{i\infty}\cdots a_{ii}\cdots a_{i3}a_{i2}a_{i1}$,且有效位前面的0全部被省略. 但这种形式上的差别不会影响证明的有效性. 同样利用 $a_{ii}(i=1,2,3,\cdots)$ 将自然数的位数和正整数的值数捆绑起来,就可以构造出一个新的自然数 $b=b_1b_2b_3\cdots b_i\cdots b_\infty$ 来,于是

就证明了自然数集不可数! 这和定理 4 是矛盾的. 详细的证明过程如下:

伪定理 2(自然数不可数定理)　自然数集 $\mathbf{N}$ 是不可数集,$|\mathbf{N}| = \omega_1$.

证明　用反证法:

1)假设 $\mathbf{N}$ 是可数集,它必然与正整数集 $\mathbf{N}_+ = \{1,2,3,4,\cdots,i,\cdots\}$ 等势,可表示成 $\mathbf{N} = \{x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_i,\cdots\}$,在 i 和 $x_i(i=1,2,3,4,\cdots)$ 之间存在一一对应关系;

2)将每一个自然数都以无穷位的全码形式 $x_i = a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots a_{ii}\cdots$ 表达,即保留有穷数的二进制编码中全部无效位和有效位,不允许省略有效位前面的所有 0(例如自然数"0"是无穷位全 0($\underline{00\cdots00}$),自然数"1"是无穷位全 0 后面一个 1($\underline{00\cdots01}$));

3)规定自然数集 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_i,\cdots\}$ 中的顺序是随机排列的;

4)将每个自然数 $x_i = a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots a_{ii}\cdots$ 中 a_{ii} 的值改变为 $\{0,1\}$ 中的另一个值 b_i;

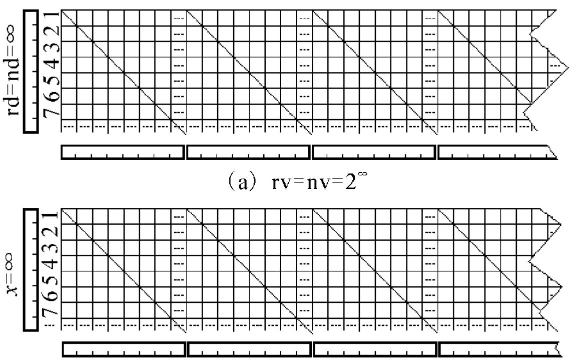
5)这样就可得到一个新的全码形式的自然数 $y = b_1b_2b_3b_4\cdots b_i\cdots$,由于 y 中至少有 b_i 与 x_i 中的 a_{ii} 不相同,所以 $y \notin \{x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_i,\cdots\}$;

6)由于自然数集 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_i,\cdots\}$ 的顺序是随机排列的,可以任意改变,a_{ii} 的值也是随机出现的,可以任意改变,所以上述几点已经一般性地证明了自然数集 $\mathbf{N}$ 是可数集合的前提假设不成立.

7)根据定义 4,自然数集 $\mathbf{N}$ 是不可数集合,其势 $|\mathbf{N}| > \omega_0$;

8)由于自然数 $x_i = a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots a_{ii}\cdots$ 中每位都有 0、1 两种取值的可能性,自然数集 $\mathbf{N}$ 的势 $|\mathbf{N}| = 2^{\omega_0}$,所以有 $2^{\omega_0} = \omega_1 > \omega_0$ 成立.

这显然是个不可接受的错误证明,然而它与伪定理 1 的证明过程完全一样,差别只是一个小数点的有无! 可见对角线法是否正确是值得怀疑的. 更有甚者,利用对角线法可以导出如下悖论:如果定义正整数集是可数集,则可以证明正整数集是不可数集. 为什么会这样? 从编码的角度看,其中的道理十分简单,因为自然数集和实数的原始编码完全一样,都有 ∞ 位和 2^∞ 个不同的值,即 rd = nd,rv = nv(见图 4). 而正整数集和自然数集两者只差一个自然数"0",也有 ∞ 位和 2^∞ 个不同的值. 可见对角线法和伪定理 1 都是错误的,康托尔的连续统假设、超限基数假设和层次实无穷观都是错误的.



(a) rv=nv=2^∞

(b) $y=n\infty$

图 4　实数集和自然数集都有 ∞ 位和 2^∞ 个值

Fig. 4　The number of digits are ∞, and the number of values are 2^∞, for real number set and the natural number set

上述 2 次使用对角线法进行证明之所以都是错误的,其根本原因是:放在位数 d 位置上的正整数 1,2,3,4,…保持着几何点的形式,而放在值数 v 位置上的实数(或自然数) $x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots$ 被展开成了无穷位编码符号串 $x_i = 0.\,a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$(或者 $x_i = a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$, $i=1,2,3,\cdots,\infty$),它们之间的一一对应关系是不同"质"的对应关系,没有可比性,其结论当然是无效的. 考察康托尔的其他证明,之所以都正确无误,是因为他把所有的数都同时作为几何点来看待的,是在同"质"的基础上进行的对比,也没有出现如图 4(b)那样的整体和局部对应的错误.

现在回头来分析,康托尔当年选择实无穷理论作为他的探索目标是正确的;他以集合论为工具来研究无穷概念的基本路线是正确的;他用元素之间的一一对应方法来判定集合间的等势关系也是正确的;他已经成功地证明了 3 个保级函数 $n+\infty = n\times\infty = (\infty)^n = \infty$ 的成立,如果再进一步证明了 $2^\infty = \infty$ 也是保级函数,他建立实无穷的道路就全部打通了. 但是由于"实数不可数定理"的失误,他得到了一个使实无穷不断扩大的升级函数 $2^\infty > \infty$,才不得不提出层次实无穷观和相对实无穷概念. 可见康托尔离建立实无穷概念的目标只差一步之遥,他没能走完这最后一步是非常遗憾的,为此数学在这里徘徊了 130 多年!

3　完全译码算法和现实数

根据完全编码算法,已经从原理上明白了一个重要的自然规律:无穷位计数器生成的全部编码仍然是无穷个,也就是说通过无穷位计数器的编码不

可能得到更大或者更小的无穷集.利用自然数集的原始编码形式可以很容易地发现,各种现实数集都可以由自然数集变换出来.变换的方法是通过不同的完全译码算法来规定小数点在符号串上的位置,将0、1符号串中的某些符号变换成辅助符号 x 或 y (如 - 或 +、r 或 i、$<a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n>$ 中的 a_i 标志符等).而保级函数 $n+\infty=\infty$ 可以保证这种变换过程是"变形不变势",所以各种现实数与自然数之间都存在一一对应的变换关系.

3.1 完全译码算法

n 位完全译码算法(complete decoding algorithm) CDA(n)由 n 位完全观察窗(complete window) CW(n),n 位完全译码器(complete decoder) CD(n)和现实存储器(realistic memory) RM 三部分组成.CW(n)的功能是按照某种二进制计数规律阅读PM中所有的 n 位二进制自然数,窗口中可出现从 n 位全$\underline{0\cdots00}$开始,到 n 位全$\underline{1\cdots11}$结束的所有 n 位二进制自然数.无穷位完全观察窗用CW表示,它能阅读PM中所有的无穷位二进制自然数.CD(n)的功能是对CW(n)中的所有 n 位二进制自然数进行某种译码,如规定小数点在符号串上的位置,对符号串中每位的0、1符号进行解释或变换等.无穷位完全译码器用CD表示,它能把无穷位完全观察窗CW中的所有无穷位二进制自然数翻译成某种现实数.RM的功能是存放CD译码的结果,它与PM的存储单元数目和地址编号完全相同,但存储的形式不同,在RM中的现实值可以用任意符号表示,不一定是二进制编码.

不同的现实数由不同的完全观察窗CW和不同的完全译码器CD相互配合生成,相应的完全译码算法CDA也不相同.要研究自然数集与其他各种现实数集及无穷集的关系,主要是研究不同的完全译码算法CDA.其中特别需要掌握原始存储器PM和现实存储器RM的异同点:PM和RM的存储地址数目和编号完全相同,但存储机制各不相同.PM是格式存储器,它的每个存储单元都有无穷位,每位只能写一个0或1,不能不写,也不能多写,所以只能存储原始形态的自然数;RM是自由存储器,它的每个存储单元都可以存储由完全译码器CD翻译出来的任何符号.下面详细举几个实例进行具体说明.

3.2 单位区间实数的完全译码算法CDA-11

1型完全观察窗CW-1从 $n=2$ 开始按照 $n+1$ 递增,1型完全译码器CD-1规定小数点位置在最高位的前面.算法的功能是将PM中所有的自然数都变换成单位区间的实数存储在RM中.下面是详细的译码过程:

由CW-1(2)能阅读到所有2位二进制数00、01、10、11,因此CD-1(2)能把它们翻译成单位区间的实数0.00、0.01、0.10、0.11;由CW-1(3)能阅读到所有3位二进制数000、001、010、011、100、101、110、111,因此CD-1(3)能把它们翻译成单位区间的实数0.000、0.001、0.010、0.011、0.100、0.101、0.110、0.111;如果所有 n 位二进制数$\underline{0\cdots00}$,$\underline{0\cdots00}1$,$\underline{0\cdots00}10$,$\underline{0\cdots00}11$,…,$\underline{1\cdots11}$能被CW-1(n)阅读到,所有 n 位单位区间实数0.$\underline{0\cdots00}$,0.$\underline{0\cdots00}1$,0.$\underline{0\cdots00}10$,0.$\underline{0\cdots00}11$,…,0.$\underline{1\cdots11}$(它们的十进制表示是$0/2^n,1/2^n,2/2^n,3/2^n,\cdots,(2^n-1)/2^n$)能被CD-1($n$)翻译出来;则所有 $n+1$ 位二进制数$0\underline{0\cdots00}$,$0\underline{0\cdots00}1$,$0\underline{0\cdots00}10$,$0\underline{0\cdots00}11$,…,$1\underline{1\cdots11}$能被CW-1($n+1$)阅读到,所有 $n+1$ 位单位区间的实数0.$0\underline{0\cdots00}$,0.$0\underline{0\cdots00}1$,0.$0\underline{0\cdots00}10$,0.$0\underline{0\cdots00}11$,…,0.$1\underline{1\cdots11}$(它们的十进制表示是$0/2^{n+1},1/2^{n+1},2/2^{n+1},3/2^{n+1},\cdots,(2^{n+1}-1)/2^{n+1}$)能被CD-1($n+1$)翻译出来;由数学归纳法可知,由CW-1能阅读到所有无穷位二进制数$\underline{0\cdots00}$,$\underline{0\cdots01}$,$\underline{0\cdots0}10$,$\underline{0\cdots0}11$,…,$\underline{1\cdots11}$,CD-1能把它们翻译成单位区间的实数0.$\underline{0\cdots00}$,0.$\underline{0\cdots01}$,0.$\underline{0\cdots0}10$,0.$\underline{0\cdots0}11$,…,0.$\underline{1\cdots11}$.可见在自然数和单位区间实数之间存在一一对应的变换关系.

3.3 整数的完全译码算法CDA-12

1型完全观察窗CW-1从2开始按照 $n=n+1$ 递增,2型完全译码器CD-2将最高位的"0"解释为负号"-",它后面的各位数字取补码(反码加1,例如将$0\underline{1\cdots11}$变换成$-\underline{0\cdots00}1$);将最高位的"1"解释为正号"+",它后面的各位数字取原码,算法的功能是将PM中所有的自然数都变换成整数存储在RM中.下面是详细的译码过程:

由1位完全观察窗CW-1(2)能阅读到所有2位二进制数00、01、10、11,因此2位完全译码器CD-2(2)能把它们翻译成整数-10、-1、0、1;由3位完全观察窗CW-1(3)能阅读到所有3位二进制数000、001、010、011、100、101、110、111,因此3位完全译码器CD-2(3)能把它们翻译成整数-100、-11、-10、-1、+0、+1、+10、+11;如果由 n 位完全观察窗CW-1(n)能阅读到所有 n 位二进制数$0\underline{0\cdots00}$,…,$0\underline{1\cdots1}01$,$0\underline{1\cdots10}$,$0\underline{1\cdots11}$,$1\underline{0\cdots00}$, 10…001,10…0010,…,11…11,n 位完全译码器 CD-2(n)能把它们翻译成整数 $-10…0,…-11,-10,-1,+0,+1,+10,+1…11$(即 $-2^{n-1},…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…,2^{n-1}-1$);则由 $n+1$ 位完全观察窗 CW-1($n+1$)能阅读到所有 $n+1$ 位二进制数 000…00,…,011…101,011…10,011…11,100…00,100…001,100…0010,…,111…11,$n+1$ 位完全译码器 CD-2($n+1$)能把它们翻译成整数 $-100…0,…,-11,-10,-1,+0,+1,+10,…,+11…11$(即 $-2^{n-1},…,-3,-2,-1,0,1,2,…,2^{n-1}-1$);由数学归纳法可知,无穷位完全观察窗 CW-1 能阅读到 PM 中所有无穷位二进制数**00…00**,…,**01…101**,**01…110**,**01…11**,**10…00**,**10…001**,**10…010**,…,**11…11**,无穷位完全译码器 CD-2 能把它们翻译成整数 $-\infty,…,-3,-2,-1,0,1,2,…,\infty$ 并存储到 RM 中,可见在自然数集和整数集之间存在一一对应的变换关系.

自然数	00…00	…	01…101	01…110	01…11	10…00	10…001	10…010	…	11…11
整　数	$-\infty$	…	−3	−2	−1	0	1	2	…	∞

3.4　正整数幂集的完全译码算法 CDA-13

1 型完全观察窗 CW-1 从 2 开始按照 $n=n+1$ 递增,3 型完全译码器 CD-3 规定将所有的“0”变换成空集 Ø,将所有的“1”变换成它所在的数位号 i,然后在变换后的每个符号串内部,将所有的符号取并集得到一个子集,用所有子集组成一个集合,就得到了与所有二进制自然数集相应的正整数的幂集,它存储在 RM 中. 下面是详细的译码过程(见图 5).

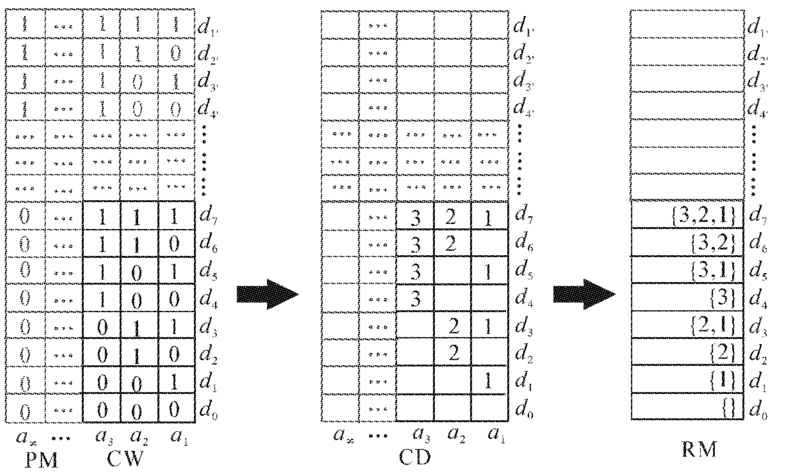


图 5　正整数幂集的完全译码算法 CDA-13

Fig. 5　Complete decoding algorithm of power set of positive integers CDA-13

由 2 位完全观察窗 CW-1(2)能阅读到所有 2 位二进制数 00、01、10、11,2 位完全译码器 CD-3(2)能把它们翻译成 2 位正整数的幂集如下:变换的结果是 ØØ、Ø1、2Ø、21,全部子集是 Ø、{1}、{2}、{1,2},幂集是{Ø,{1},{2},{1,2}};由 3 位完全观察窗 CW-1(3)能阅读到所有 3 位二进制数 000、001、010、011、100、101、110、111,3 位完全译码器 CD-3(3)能把它们翻译成 3 位正整数的幂集如下:变换的结果是 ØØØ、ØØ1、Ø2Ø、Ø21、3ØØ、3Ø1、32Ø、321,全部子集是 Ø、{1}、{2}、{2,1}、{3}、{3,1}、{3,2}、{3,2,1},幂集是{Ø,{1},{2},{2,1},{3},{3,1},{3,2},{3,2,1}};如果由 n 位完全观察窗 CW-1(n)能阅读到所有 n 位二进制数 0…000,0…001,0…010,0…011,…,1…100,1…101,1…110,1…111,n 位完全译码器 CD-3(n)能把它们翻译成 n 位正整数的幂集{Ø,{1},{2},{2,1},…,{n,…,4,3},{n,…,4,3,1},{n,…,4,3,2},{n,…,4,3,2,1}};则由 $n+1$ 位完全观察窗 CW-1($n+1$)能阅读到所有 $n+1$ 位二进制数 0…000,0…001,0…010,0…011,…,1…100,1…101,1…110,1…111,$n+1$ 位完全译码器 CD-3($n+1$)能把它们翻译成 $n+1$ 位正整数的幂集{Ø,{1},{2},{2,1},…,{$n+1$,n,…,4,3},{$n+1$,n,…,4,3,1},{$n+1$,n,…,4,3,2},{$n+1$,n,…,4,3,2,1}};由数学归纳

法可知,无穷位完全观察窗 CW-1 能阅读到所有无穷位二进制数0…00,0…001,0…010,0…011,0…0100,…,1…11,无穷位完全译码器 CD-3 能把它们翻译成正整数的幂集{Ø,{1},{2},{2,1},{3},…,{∞,…,4,3,2,1}}. 可见在自然数集和正整数集的幂集之间存在一一对应的变换关系.

4 无穷集的数学模型

为了证明没有比自然数集更大的无穷集,所有的无穷集都可以从自然数集变换出来,自然数集是所有无穷集的数学模型,下面用简明的方式介绍更多类型的完全译码算法.

4.1 正整数的完全译码算法 CDA-14

1 型完全观察窗 CW-1 从 2 开始按照 $n=n+1$ 递增,4 型完全译码器 CD-4 将 PM 中所有的自然数都加 1 之后存到 RM 中, 可见正整数与自然数之间有一一对应的变换关系.

自然数	0…000	0…001	0…010	0…011	0…0100	…	1…111
正整数	1	2	3	4	5	…	∞

用类似的方法可以建立自然数(n)与偶数($m=2n$)、奇数($m=2n+1$)、平方数($m=n^2$)等有双射函数关系的数($m=f(n)$),它们之间的一一对应关系如下:

自然数	0…000	0…001	0…010	0…011	0…0100	…	1…111
偶　数	0	2	4	6	8	…	∞
奇　数	1	3	5	7	9	…	∞
平方数	0	1	4	9	16	…	∞

4.2 有限区间实数的完全译码算法 CDA-25

以[0,4]区间为例来讨论有限区间实数问题,即小数点前面最多只有 2 位整数.

2 型完全观察窗 CW-2 从 3 开始按照 $n=n+1$ 递增,5 型完全译码器 CD-5 规定小数点的位置永远放在最高 2 位的后面. 最后当 $n\to\infty$ 时,PM 中所有的自然数都可变换成[0,4]区间的实数并存到 RM 中. 可见自然数与[0,4]区间的实数之间有一一对应的变换关系.

自然数	000…00	000…01	000…010	…	001…11	010…00	010…01	010…010	…	011…11
区间实数	00.0…00	00.0…01	00.0…010	…	00.1…11	01.0…00	01.0…01	01.0…010	…	01.1…11
自然数	100…00	100…01	100…010	…	101…11	110…00	110…01	110…010	…	111…11
区间实数	10.0…00	10.0…01	10.0…010	…	10.1…11	11.0…00	11.0…01	11.0…010	…	11.1…11

4.3 正实数的完全译码算法 CDA-36

3 型完全观察窗 CW-3 从 2 开始按照 $n=n+2$ 递增,6 型完全译码器 CD-6 规定小数点位置在窗口的中间,最后当 $n\to\infty$ 时,PM 中所有的自然数都可变换成正实数并存到 RM 中. 可见自然数与正实数之间有一一对应的变换关系.

自然数	0…00 0…00	0…00 0…01	0…00 0…010	…	0…00 1…11	0…01 0…00	0…01 0…01
正实数	0	0.0…01	0.0…010	…	0.1…11	1.0…00	1.0…01
自然数	0…01 0…010…	0…01 1…11	…	1…11 0…00	1…11 0…01	1…11 0…010…	1…11 1…11
正实数	1.0…010…	1.1…11	…	1…11.0…00	1…11.0…01	1…11.0…010…	∞

4.4 实数的完全译码算法 CDA-47

4 型完全观察窗 CW-4 从 3 开始按照 $n=n+2$ 递增,7 型完全译码器 CD-7 规定将最高位的"0"解释为负号"-",它后面的各位数字取补码; 将最高

位的“1”解释为正号“+”,它后面的各位数字取原码,小数点位置在有效数位的中间,最后当 $n\to\infty$ 时,PM 中所有的自然数都可变换成实数并存到 RM 中. 可见自然数与实数之间有一一对应的变换关系.

自然数	$0\underline{0\cdots00}\ \underline{0\cdots00}$	…	$0\underline{1\cdots11}\ \underline{0\cdots00}$	…	$0\underline{1\cdots11}\ \underline{1\cdots1}01$	$0\underline{1\cdots11}\ \underline{1\cdots11}0$	$0\underline{1\cdots11}\ \underline{1\cdots11}$
实　数	$-\infty$	…	$-\underline{0\cdots01}.\underline{0\cdots00}$	…	$-\underline{0\cdots00}.\underline{0\cdots01}1$	$-\underline{0\cdots00}.\underline{0\cdots01}0$	$-\underline{0\cdots00}.\underline{0\cdots0}1$

自然数	$1\underline{0\cdots00}\ \underline{0\cdots00}$	$1\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}1$	$1\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots01}0$	…	$1\underline{0\cdots0}1\ \underline{0\cdots00}$	…	$1\underline{1\cdots11}\ \underline{1\cdots11}$
实　数	0	$+\underline{0\cdots0}.\underline{0\cdots0}1$	$+\underline{0\cdots0}.\underline{0\cdots01}0$	…	$+\underline{0\cdots01}.\underline{0\cdots00}$	…	∞

4.5　会计数的完全译码算法 CDA-58

通常的会计数只保留小数点后面的有限位,有正负数之分,以保留小数点后面 2 位为例讨论.

5 型完全观察窗 CW-5 从 3 开始按照 $n=n+1$ 递增,8 型完全译码器 CD-8 规定小数点的位置永远放在最低 2 位的前面,将最高位的“0”解释为负号“-”,它后面的各位数字取补码; 将最高位的“1”解释为正号“+”,它后面的各位数字取原码. 最后当 $n\to\infty$ 时,PM 中所有的自然数都可变换成精确到小数点后面 2 位的会计数并存到 RM 中. 可见自然数与会计数之间有一一对应的变换关系.

自然数	$0\underline{0\cdots0}00$	…	$0\underline{1\cdots1}000$	$0\underline{1\cdots1}001$	$0\underline{1\cdots1}010$	$0\underline{1\cdots1}011$	$0\underline{1\cdots1}00$	…	$0\underline{1\cdots1}11$
会计数	$-\infty$	…	-10.00	-1.11	-1.10	-1.01	-1.00	…	-0.01

自然数	$1\underline{0\cdots0}00$	$1\underline{0\cdots0}01$	$1\underline{0\cdots0}10$	…	$1\underline{1\cdots10}11$	$\underline{11\cdots1}00$	$1\underline{1\cdots1}01$	$1\underline{1\cdots1}10$	$1\underline{1\cdots1}11$
会计数	0.00	$+0.01$	$+0.10$	…	$+\underline{1\cdots1}0.11$	$+\underline{1\cdots1}.00$	$+\underline{1\cdots1}.01$	$+\underline{1\cdots1}.10$	∞

4.6　复数的完全译码算法 CDA-69

6 型完全观察窗 CW-6 从 4 开始按照 $n=n+2$ 递增,9 型完全译码器 CD-9 规定将最高位的“0”解释为实部“r”(通常省略),最高位的“1”解释为虚部“i”. 规定将次高位的“0”解释为负号“-”,它后面的各位数字取补码; 将次高位的“1”解释为正号“+”,它后面的各位数字取原码,小数点位置在有效数数字位的中间. 最后当 $n\to\infty$ 时,PM 中所有的自然数都可变换成复数并存到 RM 中,它的实部和虚部都是实数. 可见自然数与复数之间有一一对应的关系.

自然数	$00\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}$	…	$00\underline{1\cdots11}\ \underline{0\cdots0}$	…	$00\underline{1\cdots1}\ \underline{1\cdots1}$	$01\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}$	$01\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}1$	…	$01\underline{0\cdots0}1\ \underline{0\cdots0}$	…	$01\underline{1\cdots1}\ \underline{1\cdots1}$
复　数	r$-\infty$	…	r$-\underline{0\cdots01}.\underline{0\cdots0}$	…	r$-\underline{0\cdots0}.\underline{0\cdots0}1$	r0	r$+\underline{0\cdots0}.\underline{0\cdots0}1$	…	r$+\underline{0\cdots0}1.\underline{0\cdots0}$	…	r∞

自然数	$10\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}$	…	$10\underline{1\cdots11}\ \underline{0\cdots0}$	…	$10\underline{1\cdots1}\ \underline{1\cdots1}$	$11\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}$	$11\underline{0\cdots0}\ \underline{0\cdots0}1$	…	$11\underline{0\cdots0}1\ \underline{0\cdots0}$	…	$11\underline{1\cdots1}\ \underline{1\cdots1}$
复　数	i$-\infty$	…	i$-\underline{0\cdots01}.\underline{0\cdots0}$	…	i$-\underline{0\cdots0}.\underline{0\cdots0}1$	i0	i$+\underline{0\cdots0}.\underline{0\cdots0}1$	…	i$+\underline{0\cdots0}1.\underline{0\cdots0}$	…	i∞

4.7　其他更复杂的数集

如狭义数中的超复数,广义数中的向量、张量和矩阵等,它们都是由有限个实数组合而成的,可以用类似复数的方法来处理. 为了表示 m 个分量,如果 $2^{n-1}<m\leqslant 2^n$(n 是正整数),则需要在前面留 n 个空位. 如对 8 元向量 $<a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7>$,应在最前面留 3 位,并规定 000 代表 a_0,001 代表 a_1,010 代表 a_2,011 代表 a_3,100 代表 a_4,101 代表 a_5,110 代表 a_6,111 代表 a_7. 后面其他位的翻译与实数完全一样. 而对 7 元向量 $<a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$,规定 000 代表 a_0,001 代表 a_1,010 代表 a_2,011 代表 a_3,100 代表 a_4,101 代表 a_5,11X 代表 a_6. 对 6 元向量 $<a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5>$,规定 000 代表 a_0,001 代表 a_1,010 代表 a_2,011 代表 a_3,10X 代表 a_4,11X 代表 a_5. 其余类推.

4.8　自然数集是所有无穷集的数学模型

图 6 表明各种无穷数集是一套编码的多种解释,其中△表示小数点的位置. 由于自然数集和各种无穷数集之间可以相互翻译,而自然数集十分简单直观,所以可以把自然数集作为各种无穷数集的数

学模型来使用. 方法是首先用特定的完全译码算法把一个无穷数集和其中的原始问题一同翻译成自然数集和其中的同构问题,对它进行求解,得出自然数集中的同构结果,然后把同构结果反向翻译成这个无穷数集中的原始形式,形成最后结果.

除了数集之外,任何事物都可以组成无穷集合,它们一般是无次序的. 但非数的无穷集只有2类:一类是由离散分布的元素组成,如宇宙中所有量子组成的集合;另一类是由连续分布的元素组成,如宇宙中的场. 可以人为地把元素按照某种规则顺序编号,使离散型的无穷集转化成正整数集,使连续型的无穷集转化成正实数集,而这2种数集都可转化成自然数集. 可见一般的无穷集都与自然数集等势,在屏蔽掉这种附加的次序关系后,自然数集也可以作为一般无穷集合的数学模型.

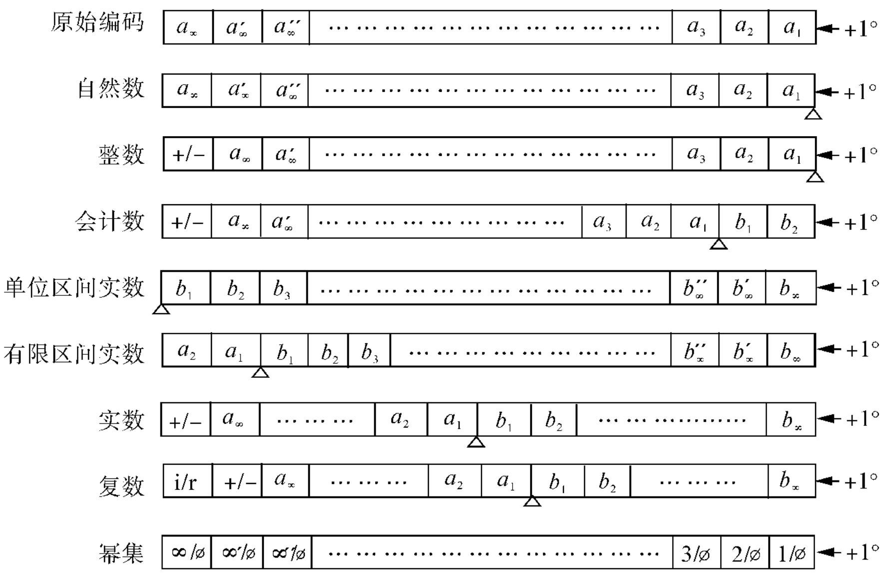


图6 一套编码多种解释

Fig. 6 A set of codes with different interpretations

4.9 进一步认识实无穷概念和实无穷观

本文从各种不同的角度系统地考察了各种无穷集合的状况和无穷概念的涵义,现在有条件来建立完整准确的实无穷概念和实无穷观,它包括以下要点:

1)无穷是一个永无终止的增长过程;

2)这个增长过程可用一个特殊的数"∞"表示,它数值上等于正整数集的势,即$\infty = |\{1,2,3,4,\cdots\}|$;

3)可参加各种运算,由于对$n \in \mathbf{N}_+$, $n+\infty = n\times\infty = (\infty)^n = n^\infty = \infty$,所以运算的结果都不可能大于∞;

4)由于$\infty = |\{1,2,3,4,\cdots\}|$是一个理论上有确定含义的数,它代表一个已经完成了的无限过程,所以正整数集可写成$\{1,2,3,4,5,\cdots,\infty\}$;

5)为什么不会出现比∞更大的数,因为∞代表的不是一般意义的数,而是一个代表永无终止的增长过程的抽象符号,就象$\{1,2,3,4,5,\cdots,\infty\}$那样,它从1开始,一个一个不断地增大,直到∞为止,而∞本身的涵义就是永无终止的增长过程. 可见在∞的涵义中,并不关心具体增长了多少步,只关心它是不是一个永无终止的增长过程. 由于没有比永无终止的增长过程更长的过程,所以$n+\infty = n\times\infty = (\infty)^n = n^\infty = \infty$能够成立,也就是说不可能出现比∞更大的数. 这是无穷和有限的本质差别.

6)我们所见到的形形色色的无穷数集都是由原始形态的自然数集变换出来的;

7)自然数集是一切有序无穷集合的数学模型,它们都可写成$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \cdots, d_\infty\}$的形式,如果忽略了有序无穷集合中的序关系,它就是无穷集合.

根据这些要点,我们能够更清楚地知道,康托尔的对角线法为什么是错误的,无穷概念为什么能够重新统一,可从根本上避免图4那样的错误.

5 有关的哲学思考

希尔伯特曾经说过:无穷大! 任何一个其他问题不曾如此深刻地影响人类的精神;任何一个其他观点不曾如此有效地激励人类的智力;然而,没有任何概念比无穷大更需要澄清.

由于本文得出的一些结论与现行的许多“数学常识”相左,难免会引起各种各样的争议和思考,下面从数学哲学角度谈几点作者自己的思考,请读者批评指正.

5.1　无穷和有界

本文的无穷位二进制计数器有最低位和最高位,它生成的二进制数也是从无穷位$\underline{0\cdots00}$开始,逐步增加到无穷位$\underline{1\cdots11}$结束,两者都有边界. 这种有界的集合还是无穷集合吗? 怀疑论者首先提出的可能就是这个问题.

确实许多人都有这样的数学常识:“无穷不能有界,有界就不是无穷”. 这其实是受潜无穷思想长期影响形成的错觉. 建立实无穷概念的目的就是要找到一个比任何数都大的惟一确定的数∞,如果∞存在,它当然就是数的上界. 从已有的数学的实践来看,“无穷”和“有界”并不是 2 个相互排斥不能共存的概念. 例如,整数常表现为一种双向无限扩张的形式$\{-\infty,\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots,\infty\}$,是无始无终没有边界的无穷集合;自然数常表现为单向无限扩张的形式$\{0,1,2,3,4,\cdots,\infty\}$,是一个有始无终的半封闭无穷集合;而单位区间的实数可表现为一种完全向内无限扩张的形式$\{0.\underline{0\cdots00},\ 0.\underline{00\cdots0}1,\ 0.\underline{0\cdots0}10,\ 0.\underline{0\cdots}011,\ \cdots,\ 0.\underline{1\cdots11}\}$,它从小数点后面的无穷位$\underline{0\cdots00}$开始,逐步增加到小数点后面的无穷位$\underline{1\cdots11}$结束,是有始有终的完全封闭的无穷集合. 如果承认∞也同$0.\underline{0\cdots00}$和$0.\underline{1\cdots11}$一样是一个数,那么上述 3 种形式上的差别就完全消失了,无穷和有界的共存并不存在矛盾.

当然,在这里引入的上界∞不是通常的数,而是一个理想元素,目的是建立一个新的数学实体,它既能把∞圈在其中,又能把原来考虑的对象$\{1,2,3,4,\cdots\}$中的所有东西都原封不动地保留下来[4]. $\{1,2,3,4,\cdots,\infty\}$的意思是集合中的元素可以无限制地增加,但是它总是从 1 开始,到∞结束. 其实,添加理想元素的方法在数学中经常使用.

5.2　模拟数和数字数

怀疑本文的另一个重要论点是我们讨论的都是“数字数”,它本质上是“离散”的,而实数是“模拟数”,它本质上是“连续”的.

在现实世界中,确实有数字计算机和模拟计算机之分,而且数字计算机是离散的,模拟计算机是连续的. 但是在理想情况下,当像图灵机那样把数字计算机的位数扩充到无穷时,数字计算机和模拟计算机在表示精度方面的差别就消失了,“离散”和“连续”之间的差别也随之消失了. 最著名的实例有:

1) 康托尔在实数不可数定理的证明中,已经把单位区间的实数表示成$x_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$,可见他认为无穷位小数能精确地表示每一个实数.

2) 在图灵机中,通过引入无限长的磁带可把计算机的字长扩充到无穷,把存储器的地址空间扩大到无穷. 因此图灵机能够处理“离散型”和“连续型”的所有计算问题,是数字计算机和模拟计算机共同的理想计算模型.

所以我相信就单位区间的实数来说,除了数字形式的实数$x_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$之外,不存在模拟形式的实数,也就是说,数字形式的实数和模拟形式的实数都是$x_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots a_{i\infty}$.

5.3　稀疏的整数和稠密的实数

“整数十分稀疏,实数非常稠密”已作为科学常识深入人心,要接受它们等势的结论十分困难.

这其实完全是数的认识过程的局限性造成的错觉. 人们认识整数的过程是从 1、2、3 开始的,这是从原始数的最低位开始认识数,它一个一个排列地十分规整,相邻数的差值恒定是 1,按照这个局部特征想象,无穷大的整数也应该是这样分布,于是就形成了整数十分稀疏,有均匀间隙的感觉. 人们认识实数的过程则相反,例如认识单位区间的实数是从 0.0、0.1 开始的,这是从原始数的最高位开始认识实数. 一步步细分下去的过程是 2 位:0.00、0.01、0.10、0.11; 3 位:0.000、0.001、0.010、0.011、0.100、0.101、0.110、0.111; ……直到无穷位.

在这个认识过程中,“0.1”不仅代表了实数 0.1 本身,而且还代表了高位是 0.1 的无穷多个实数. 不断地细分下去,看到的情况都是这样. 根据这个局部特征就形成了实数非常稠密的感觉. 一般情况下实数有整数部分和小数部分,从整数部分看,实数有∞个不同的整数值,从小数部分看,每 2 个相邻整数之间又分布有∞个不同的实数值,这更加强化了实数无限稠密的感觉. 其实,从无穷位的编码集合可以看出,整数集和实数集完全等势,相对于各自的覆盖范围来说,它们的“疏密”程度都一样.

在现实生活中有这样的实例:当在树林中散步时,我们只能见到身边一棵一棵巨大的树木,然后以这个局部知识为基础,通过想象可以知道由无穷多的树木可以组成更加巨大的无边无际的大森林;相反,

当在高空中鸟瞰一片大森林时,我们只能见到密密麻麻没有间隙的林子,然后以这个局部知识为基础,通过想象可以知道这片大森林由无穷多的微小的树木组成. 其实树木就是树木,森林就是森林,它们没有任何变化,变化的只是人们观察它的视角.

5.4 数学和辩证矛盾

众所周知,在数学中绝不允许出现任何逻辑矛盾,否则就会形成悖论,危及数学的生存. 但在数学的建立和发展过程中,又无法回避各种辩证矛盾,否则数学就会停滞不前. 实数可数性的证明就是一个典型的例证:一方面∞位二进制数有2^{∞}个不同的数值,按照有限位编码的规律应该是$2^{\infty}>\infty$;另一方面建立实无穷的概念又要求$2^{\infty}=\infty$,这是现代数学发展过程中无法回避的一个辩证矛盾.

在这个问题上只有2种可能的选择:一是按照有限位编码的规律选择$2^{\infty}>\infty$,结果不仅使建立实无穷的努力失败,上述辩证矛盾还由于可在推理过程中任意扩散,诱发出各种逻辑矛盾;二是按照无穷位编码的规律(ICI原理)选择$2^{\infty}=\infty$,可将上述辩证矛盾完全封闭在实无穷的定义之内,不让它在推理过程中任意扩散,有效地避免了各种次生的逻辑矛盾. 本文为在数学中如何包容和处理辩证矛盾提供了一个成功的范例.

5.5 方法简单不可信

还有一种怀疑本文正确性的普遍看法是:100多年来,不少人用各种各样的先进方法都没有能够推翻连续统假设,说明康托尔的层次实无穷观是十分稳固的. 本文用如此简单原始的方法,没有长篇的复杂证明过程或大量的实验统计数据支持,就企图推翻连续统假设和层次实无穷理论,建立统一实无穷理论,这本身就是一件不可信的事情.

笔者认为,方法的对错不在于它的复杂或者深奥程度,证明的有效性不在于它的长短,关键是看它是否抓住了问题的本质,是否切中了问题的要害并把问题真正解决了. 就连续统假设和层次实无穷理论来说,它的核心问题就是回答$2^{\infty}>\infty$还是$2^{\infty}=\infty$? 康托尔之所以出错,是因为他把正整数保留在通常的几何点状态下,而把单位区间实数展开成了无穷位的编码符号串,然后对两者进行了非同质的一一对应比较. 这是出现错误的根本原因,不针对这个关键问题,采用任何复杂的先进方法和长篇抽象的证明都没有作用,反而会掩盖问题的实质,模糊人们的视线.

本文之所以正确,是因为把正整数和单位区间实数同时展开成了无穷位的编码符号串,然后对两者进行同质的一一对应比较,结果发现它们都是∞位的编码符号串,都有2^{∞}个,因此两者当然等势. 道理本来十分简单,从编码符号串的角度看,无穷位的整数和无穷位的实数除了小数点之外没有什么差别,而小数点存在于计数器的工作机制之外,它的有无和位置变化对计数器生成的编码结果没有任何影响. 这不需要任何高深的数学原理和方法就能说清楚,之所以用这样长的篇幅反复从各个方面进行说明论证,只是因为经过100多年的沉淀,连续统假设和层次实无穷理论已经渗透到数学的每一个细胞,影响到许多学科的一些基本概念和方法,昔日备受争议的假设早已成为人人皆知的数学常识,不对也对;而ICI原理才刚刚被发现和提出,人们一下子转不过弯来,不得不从各方面产生怀疑和抵制,对也不对. 其实医生都有这样的经验,治病救人不在乎药物的贵贱和手术的繁简,关键在于是否对症施治,是否把病人治好了.

5.6 返朴归真

理解统一实无穷理论的关键是ICI原理,理解ICI原理的关键是完全数集的无穷位编码原理,它们为我们带来了一个从各方面看都能协调一致的统一的无穷概念. 可以用物理世界中的一个实例作形象地比喻:如果要严格地说宇宙是“无穷大”的,那就不能像在地球上那样,区分球的半径、直径、赤道、表面积和体积的大小关系. 因为如果那样,定义“宇宙的半径是无穷大A”,就会出现“宇宙的体积是更大的无穷大B”;用体积数B作半径,又会得出“更更大的无穷大C”;如此反复迭代下去,会产生无穷多的无穷大,就像现行的层次实无穷理论那样. 怎么能让理想的气球模型不会变成理想的洋葱模型呢?惟一有效的办法是同时承认宇宙的半径、直径、赤道、表面积和体积都是相同的无穷大. 然而用什么方法能把这个道理说得通顺圆满,不会产生逻辑矛盾呢?

其实康托尔提出的原理和方法是完全可行和有效的. 他首先定义正整数集的势是无穷∞,表示∞是一个可以不断地增大,没有任何限制的过程,然后用一一对应方法检验2个无穷集合是否等势. 他缺少的只是一个理想的气球模型(即本文中的完全编码算法). 这个理想的气球模型可以从一个0点开始,连续不断地充气,一步一步地扩大,没有任何限制. 如果用符号∞来表示这个无限增长的过程,就可以

发现,宇宙的半径、直径、赤道、表面积和体积都是这样一个无限增长的过程,它们都可以用符号∞来表示. 当然你也许会反问,如果充气的速度是恒定不变的,那么宇宙的半径、直径、赤道、表面积和体积的增长速度和加速度都是完全不同的,如何能够一样呢? 因为我们在∞的定义中不关心变化的速度和加速度,只关心它是否可以无限地增长. 例如在图 2(c)中,从计数器的位上看它从 a_1 到 a_∞ 是一位一位增加的,是 ∞. 从计数器生成的编码符号串上看,它从∞位$\underline{0\cdots00}$开始,不断地加 1,直到∞位$\underline{1\cdots11}$结束,也是∞. 至于计数器增加 1 位,生成的编码会增加一倍的增长速度差别,与理想元∞的定义无关,可以忽略. 这点在正确理解实无穷概念上非常重要.

自然规律本来是简单的,所以越接近本质的原理和方法越简单. 例如,作为现代数学理论基础的集合论是非常简单朴素的,连续统假设只是其中的局部瑕疵,可是为了修补这个瑕疵,集合论已经越变越复杂,越变越抽象,变得多数人无法理解,我们希望它能返朴归真. 又如,作为计算机科学理论基础的图灵机更是非常简单朴素,数学家却称它为 20 世纪最重要的数学概念之一.

6　结　论

1)希尔伯特说:“数学是关于无穷的科学”. 这说明无穷在数学中占有极其重要的位置,无穷是数学的灵魂. “数值”和“计数”同源,是一个问题的 2 个方面,我们关于无穷的研究是在计数器基础上进行的. 计数器生成的编码都是自然数,由于有限 n 位二进制数只能有 2^n 个不同的编码,仍然是有限值的自然数,所以,无限值的自然数必然是无穷位的进位制数. 根据图灵机原理构造了一个无穷位二进制计数器,将其全部清 0 后不断地加 1,就形成了一个计数过程. 由于计数器的位数是无限的,所以它能无限制地计数下去,生成完整的自然数集,其中包括常见的有限值自然数和理论上存在的无限值自然数.

2)根据自然数集的排序性,这个完整的自然数集是一个已经完成(延伸达于终止)了的封闭的无穷集合. 也就是说,可用外推法在自然数集中添加一个理想元∞而得到$\{0,1,2,3,4,\cdots,\infty\}$,它的意思是说自然数集有无穷多个元素,它从 0 开始,按照 0、1、2、3、4 这样的规律不断地加 1,直到“结束”. 这似乎十分荒唐,但类似的方法在数学中早已普遍使用,如单位区间的实数集是无穷集合,它有 0、1 两个固定的端点,无穷性仅仅表现在单位区间内部的无限可细分上.

3)由上述 2 点可得出一个必然结论:完整的自然数集必须由无穷位的计数器生成.

4)在研究无穷位计数器的编码特性时,发现了无穷编码的不变性(ICI 原理). 它表现在 2 个方面:一方面,如果说计数器有 ∞ 位(类似几何中的 ∞ 个点),那么,按照计数器的工作原理,它生成的全部自然数编码有 2^∞ 个. 可是按照定理 4,自然数集的势必须是 ∞,这样就出现了矛盾,只有承认 $2^\infty=\infty$,才能消除这个矛盾;另一方面,如果直接把计数器的 ∞ 位(即 ∞ 点)的编号 $1,2,3,4,\cdots,\infty$ 用无穷位二进制编码一个一个认真地写出来(包括所有的无效位),也只有写到 2^∞ 个不同的编码时才能写完(写到 ∞ 点). 为了避免 ∞ 点和 ∞ 编码之间的上述矛盾,只能规定 $2^\infty=\infty$. 这说明任何数值的大小都有 2 种不同的表示形式:一是利用数轴上的几何点,通过点的不同位置来表示不同的数值,二是利用进位制编码,通过不同的编码来表示不同的数值. 在有限值的情况下,点和编码之间可建立严格的一一对应关系. 但是,同样一个无穷集合 A,如果根据 A 的点集形式定义它的势是∞,那么根据 A 的编码形式就会得出它的势是 2^∞. 可见,对所有的基本增值运算来说,在有限值自然数范围内,任何大于 1 的 $m,n\in\mathbf{N}$,有 $n+m>m,n\times m>m,m^n>m,2^m>m$. 在无穷值的范围内,任何大于 1 的 $n\in\mathbf{N}$,有$n+\infty=n\times\infty=\infty^n=2^\infty=\infty$. 这些性质全面地反映了有限和无穷的本质差别.

5)$2^\infty>\infty$ 是有限值范围内的规律,康托尔把它引入到无穷的性质中是个历史性的错误. 为什么会形成这样影响深远的错误?从思想认识层面上讲,是由于数学中长期形成的思维和表示习惯. 实数通常都会用无穷位编码的形式 $x=0.a_1a_2a_3\cdots a_i\cdots a_\infty$ 表示,所以康托尔很容易相信实数集有 2^∞ 个元素;而自然数通常都用几何点的形式$\{0,1,2,3,4,\cdots,\infty\}$表示,所以很容易相信自然数集有 ∞ 个元素. “实数稠密,整数稀疏”的日常经验强化了他的信念. 从证明技术层面上讲,是由于对角线法的错误使用. 康托尔当时不仅没有注意到点和编码在形式上的上述差异,反而不自觉地利用这个差异来将正整数集中的点和单个实数编码中的位进行一一对应的捆绑,牵强附会地证明了 $2^m>m$ 成立. 当他把对角线法用在正整数集(∞ 个点)和实数集(2^∞个编码)之间时,形成的错误很难被发现,反而被认为是“天才

的创新”[10-12]. 但把同样的对角线法用在正整数集(∞ 个点) 和自然数集(2^∞个编码) 之间时,其错误就大白于天下了.

6)承认所有的数都有点和编码 2 种不同的表示形式,并且承认∞位二进制计数器可生成2^∞个不同的编码,是理解 ICI 原理和本文的其他结论的关键. 否则会被许多围绕$2^\infty > \infty$而建立起来的概念、理论和学说蒙蔽双眼,从思想上拒绝和排斥统一实无穷概念[10-12].

7)继续研究的目标就是要在 ICI 原理的基础上,通过引入数集的界壳概念、无穷小概念、连续等各种与无穷有关的概念后,最终建立数的理想模型. 建立在无穷位计数器原理基础上的数的理想模型是理想计算机模型的自然延伸和发展. 我们相信,数的理想模型将在数学研究中发挥重要作用,就像图灵机在计算机科学中发挥的作用那样.

参考文献:

[1]艾克塞尔 A D. 神秘的阿列夫[M]. 左平,译. 上海: 上海科学技术文献出版社,2008: 74-82.

[2]彭漪涟,马钦荣. 逻辑学大辞典[M]. 上海: 上海辞书出版社,2004: 431,481.

[3]张顺燕. 数学的源与流[M]. 北京: 高等教育出版社,2000: 12-46.

[4]赵焕光. 数的家园[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 77-80, 115-117, 315-317.

[5]朱梧槚,肖奚安. 集合论导引[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2008: 68-98.

[6]DAUBEN J W. 康托的无穷的数学和哲学[M]. 郑毓信,刘晓力,译. 大连: 大连理工大学出版社, 2008: 108-109.

[7]沈卫国. 论自然科学的若干基本问题[M]. 福州:海风出版社,1998: 1-53.

[8]沈卫国. 论实数集(连续统)的可数性及其相关问题[J]. 天津职业院校联合学报, 2006, 5: 112-122.
SHEN Weiguo. Discuss about the countability of set of real numbers and the relevant problems[J]. Journal of Tianjin Vocational Institutes, 2006, 5: 112-122.

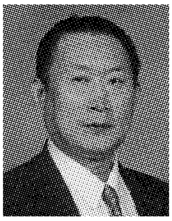
[9]徐利治. 徐利治谈数学哲学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2008: 173-177.

[10]FATICONI T G. The mathematics of infinity: a guide to great ideas[M]. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006: 103-162.

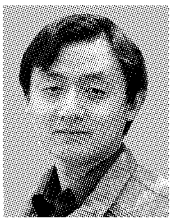
[11]MAOR E. 无穷之旅——关于无穷大的文化史[M]. 王前,武学民,金敬红,译. 上海: 上海教育出版社, 2000: 75-92.

[12]朱梧槚. 数学与无穷观的逻辑基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2008: 203-296.

作者简介:



何华灿,男,1938 年生,教授、博士生导师. 1980 年参与发起成立中国人工智能学会,先后任常务理事、副理事长至今,中国人工智能学会人工智能基础专业委员会主任. 主要研究方向为人工智能应用、人工智能基础和泛逻辑学、实无穷理论. 曾主持设计了两个型号的航空机载计算机,完成国家自然科学基金项目、省部级基金项目、学校基础研究重点项目和横向合同项目 10 余项,设计过 8 个实用专家系统. 发表学术论文 160 余篇,出版《人工智能导论》、《泛逻辑学原理》和《统一实无穷理论》等专著,主编出版《信息、智能与逻辑》丛书.



何智涛,男,1972 年生,讲师、博士,中国人工智能学会人工智能基础专业委员会委员. 主要研究方向为软件测试、知识理论和无穷理论,发表学术论文 10 余篇.