doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2010.01.007

基于集对分析的不确定性多属性决策模型与算法

赵克勤
(诸暨市联系数学研究所,浙江 诸暨 311811)

摘　要:针对不确定性多属性决策问题,提出统计学中的样本特征参数均值和方差也是模糊数(区间数、三角模糊数、梯形模糊数)特征参数的理论,并用联系数 $A+Bi$ 表示"均值+方差",再根据集对分析中的联系数理论计算"均值+方差"的"模",用这种"模"代表属性权重和属性值进行不确定性多属性决策,简便实用;利用"均值+方差"联系数中 i 的不同取值可以考察不确定性对排序的影响.应用实例表明该理论是有效和可行的.

关键词:不确定性;多属性决策;模糊数;联系数;集对分析
中图分类号:TP18　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-4785(2010)01-0041-10

Decision making algorithm based on set pair analysis for use when facing multiple uncertain attributes

ZHAO Ke-qin
(Institute of Zhuji Connection Number, Zhuji 311811, China)

Abstract: To help those making decisions when faced with multiple uncertainties, a theory was put forward that in statistics, the average and variance of characteristic parameters of a sample have the characteristic parameters of a fuzzy number. This includes interval number, triangular fuzzy number , and trapezoidal fuzzy number. Average + variance was shown as a connection number $A+Bi$. The modular of average + variance was then calculated according to connection number theory in set pair analysis. The module, representing the weight and value of attributes, can be employed to help make decisions when there are multiple uncertain attributes. The method is simple and practical. Taking various values of i , the effect of uncertainty on sorting can be determined. Practical examples were used to demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed theory.

Keywords: uncertainty; multiple attribute decision making; fuzzy number; connection number; set pair analysis

多属性决策是科学技术及社会经济领域中相当广泛的一类决策问题,也是智能决策中的常见问题.当属性权重与属性值都是确定的实数时,已有许多成熟的算法;当属性权重与属性值含有一定程度的不确定性时,相应的算法还在探讨之中.这些算法大致可分为基于模糊集理论的算法和基于概率统计的算法2大类,其中基于模糊集理论的算法又分为基于区间数的多属性决策算法[1-2]、基于三角模糊数的多属性决策算法[3-4]、以及基于梯形模糊数的多属性决策算法[5-6]这样3个子类,每个子类算法又分别结合地应用TOPSIS(technique for order preference by similarity to ideal solution)方法[7]、灰色理论[8]、AHP(analytic hierarchy process)法[9]等等.这些算法虽然各有特色而且有效,但另一方面,由于不同算法之间互有交集,也使得决策时难以适从;从科学研究的角度看,需要对不同的算法探讨其中共性的规律.因而讨探具有一定普适意义的不确定性多属性决策新算法仍显得十分重要.集对分析是站在确定性与不确定性对立统一哲学角度建立起来的一种新的不确定性系统理论[10-12],近年来在不确定性多属性决策研究中也崭露头角.例如文献[13-14]把集对分析的同异反联系数用于区间数多属性决策;文献[15-17]把集对分析的二元联系数用于区间数多属性决策;文献[18]把二元联系数用于三角模糊数多属性决策等等.事实上,根据集对分析的不确定性系统理论,可以把模糊集理论和概率统计理论在一定条件下统一起来加以研究.基于这一理念,并在文献[15-18]的基础上,提出统计学中的样本特征参数"均

收稿日期:2009-06-01.
通信作者:赵克勤.E-mail:zjzhaok@sohu.com.

值”和“方差”也是模糊数(区间数、三角模糊数、梯形模糊数)特征参数的观点,并用联系数 $A+Bi$ 表示“均值+方差”这种特征参数,再根据集对分析(set pair analysis,简记为 SPA)中的联系数理论把“均值+方差”转换成 D-U 空间中的三角函数表达式. 在此基础上给出不确定性多属性决策的“主值模型”和“一般模型”,其中的“主值模型”仅涉及到“均值+方差”的“模”的计算,用这种“模”代表属性权重和属性值进行不确定性多属性决策,得到了与其他算法相同的结果,算法相对简便;“一般模型”则通过联系数中 i 的不同取值考察不确定性对方案排序稳定性的影响,从而为不确定性多属性决策问题给出了既便于实际应用也适合智能机处理的一种统一算法.

1 均值和方差也是模糊数的特征参数

1.1 区间数的特征参数

记 $\mathbf{R}$ 为实数域,称闭区间 $[x^-,x^+]$ 为区间数,记为 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$,其中 $x^-\in\mathbf{R},x^+\in\mathbf{R},x^-\leqslant x^+$.

显然,若把 x^-、x^+ 看成是同一对象 X 的 2 个观察值(忽略不计 x^-、x^+ 出现的先后),那么,把这 2 个观测值的平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j=\frac{1}{2}(x^-+x^+) \tag{1}$$

与方差

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\sum_{j=1}^{2}(x_j-\bar{x})^2}=\sqrt{(x^--\bar{x})^2+(x^+-\bar{x})^2} \tag{2}$$

作为区间数 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$ 的特征参数是合理的. 因为至少从概率统计学的样本意义上[19]说明了区间数的集中性(确定性)与离散性(不确定性).

1.2 三角模糊数的特征参数

记 $\mathbf{R}$ 为实数域,称

$$\tilde{x}=[x^L,x^M,x^N] \tag{3}$$

是一个三角模糊数,其中 $0<x^L<x^M<x^N\in\mathbf{R}$,且称 x^L、x^N 分别为三角模糊数的下确界和上确界,x^M 为三角模糊数的中值.

显然,若把 x^L、x^M、x^N 看成是同一对象 X 的 3 个观察值(忽略不计 x^L、x^M、x^N 出现的先后),那么,把这 3 个观测值的平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j=\frac{1}{3}(x^L+x^M+x^N) \tag{4}$$

与方差

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{3}(x_j-\bar{x})^2}{2}}=\sqrt{\frac{(x^L-\bar{x})^2+(x^M-\bar{x})^2+(x^N-\bar{x})^2}{2}} \tag{5}$$

作为三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^N]$ 的特征参数是合理的. 因为至少从统计学的样本意义上说明了三角模糊数的集中性(确定性)与离散性(不确定性).

1.3 梯形模糊数的特征参数

记 $\mathbf{R}$ 为实数域,称

$$\tilde{x}=[x^L,x^M,x^N,x^U] \tag{6}$$

是一个梯形模糊数,其中 $0<x^L<x^M<x^N<x^U\in\mathbf{R}$,且称 x^L、x^U 为梯形模糊数的下确界和上确界,称区间 $[x^M,x^N]$ 为梯形模糊数的中值区间.

显然,若把 x^L、x^M、x^N、x^U 看成是同一对象 X 的 4 个观察值(忽略不计 x^L、x^M、x^N、x^U 出现的先后),那么,这 4 个观测值的平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j=\frac{1}{4}(x^L+x^M+x^N+x^U) \tag{7}$$

与方差

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{4}(x_j-\bar{x})^2}{3}}=\sqrt{\frac{(x^L-\bar{x})^2+(x^M-\bar{x})^2+(x^N-\bar{x})^2+(x^U-\bar{x})^2}{3}} \tag{8}$$

作为梯形模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^N,x^U]$ 的特征参数是合理的. 因为至少从统计学的样本意义上说明了梯形模糊数的集中性(确定性)与离散性(不确定性).

2 均值和方差的集对分析

根据集对理论,均值 $\bar{x}$ 和方差 s 既然是反映同一对象 X 的 $n(n\geqslant2)$ 个观察值的 2 个特征参数;因而可以看作是关于对象 X 的有联系的 2 个集合,并组成集对 $H=(\bar{x},s)$. 其中的均值 $\bar{x}$ 又可以看作是关于对象 X 的 $n(n\geqslant2)$ 个观察值的相对确定性(严格说是集中性)的测度,方差 s 是关于对象 X 的 $n(n\geqslant2)$ 个观察值相对不确定性(严格说是离散性)的测度. 集对 $H=(\bar{x},s)$ 因此是一个确定-不确定集对,可以用集对分析中的联系数 $A+Bi$ 表示均值 $\bar{x}$ 和方差 s 的相互关系.

定义 1 设 $\bar{x}$ 和 s 分别是同一对象 X 的 $n(n\geqslant2)$ 个观察值的平均值和方差,则称

$$u(\bar{x},s)=A+Bi\ (A=\bar{x},B=s,i\in[-1,1]) \tag{9}$$

或

$$u(\bar{x},s) = \bar{x} + si\ (i \in [-1,1]) \quad (10)$$

中的 $u(\bar{x},s)$ 为对象 X 的 n 个观察值的均值–方差联系数,简称均值–方差联系数或直称联系数.

均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 中的均值 $\bar{x}$ 和方差 s 的相互作用则可以映射到基于集对分析的二维确定-不确定空间[17](determination-uncertain,简称 D-U 空间)作进一步分析. 如图 1、2 所示,其中的 y 轴表示相对不确定性测度,x 轴表示相对确定性测度.

图 1　D-U 空间

Fig. 1　D-U space

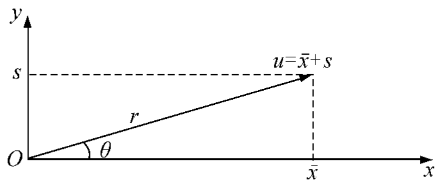

图 2　$H=(\bar{x},s)$ 在 D-U 空间上的映射

Fig. 2　The mapping of $H=(\bar{x},s)$ on the D-U space

由图 2 看出,均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 中的 $\bar{x}$、s 在 D-U 空间中存在相互协同作用,其相互协同作用的空间映像是从原点 O 指向 U 的向量 $\boldsymbol{OU}$,该映像的大小即相互协同作用的大小,也就是向量 $\boldsymbol{OU}$ 的“模”,记为 r.

$$r = |\boldsymbol{OU}| = \sqrt{\bar{x}^2 + s^2}. \quad (11)$$

θ 表示均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 经映射后得到的向量 $\boldsymbol{OU}$ 与 x 轴正向的夹角. 由图 2 易知:

$$x = r\cos\theta, \quad (12)$$

$$y = r\sin\theta. \quad (13)$$

于是,有

$$u(\bar{x},s) = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (14)$$

式(14)称为均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 在集对分析二维 D-U 空间中的三角函数表达式.

为明确起见,以下给出均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 的模以及幅角的定义.

定义 2　设有均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$,则称

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + s^2} \quad (15)$$

为均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 在集对分析二维 D-U 空间中的模. 称式(15)为 $u(\bar{x},s)$ 求模公式,记为

$$r = |u(\bar{x},s)|. \quad (16)$$

定义 3　设有均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$,则称

$$\theta = \arctan\frac{s}{\bar{x}} \quad (17)$$

为均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 在集对分析二维 D-U 空间中的幅角,称式(17)为均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 的幅角公式,记为 $\arg u(\bar{x},s)$.

3　均值–方差联系数的运算

3.1　普通运算

由于均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 在形式上就是集对分析中的二元联系数 $A+Bi$,因此其普通运算就是二元联系数 $A+Bi$ 的普通运算[20],为此可以在不计不确定性层次的条件下,对 i 的运算遵循以下规则:

$$i = ii = iii = \cdots = i^n, n = 1,2,\cdots,k. \quad (18)$$

据此可以使运算结果仍然为形为 $A+Bi$ 或 $\bar{x}+si$ 形式的联系数.

3.2　加法运算

若 $u_1(\bar{x}_1,s_1) = \bar{x}_1 + s_1 i$,$u_2(\bar{x}_2,s_2) = \bar{x}_2 + s_2 i$,则

$$u_1(\bar{x}_1,s_1) + u_2(\bar{x}_2,s_2) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + (s_1 + s_2)i. \quad (19)$$

由(19)式易知 2 个均值–方差联系数 $u(\bar{x},s)$ 的加法运算满足交换律,也就是

$$u_1(\bar{x}_1,s_1) + u_2(\bar{x}_2,s_2) = u_2(\bar{x}_2,s_2) + u_1(\bar{x}_1,s_1). \quad (20)$$

3 个或更多个均值–方差联系数相加的运算还满足加法结合律:

$$u_1(\bar{x}_1,s_1) + u_2(\bar{x}_2,s_2) + u_3(\bar{x}_3,s_3) = u_1(\bar{x}_1,s_1) + [u_2(\bar{x}_2,s_2) + u_3(\bar{x}_3,s_3)]. \quad (21)$$

证明略.

3.3　n 个均值–方差联系数的平均

记 n 个均值–方差联系数 $u_1(\bar{x}_1,s_1)$,$u_2(\bar{x}_2,s_2)$,$\cdots$,$u_n(\bar{x}_n,s_n)$ 的平均均值–方差联系数为 $\overline{u(\bar{x},s)} = \bar{\bar{x}} + \bar{s}i$,则有

$$\overline{u(\bar{x},s)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k(\bar{x}_k,s_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_k + s_k i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k i = \bar{\bar{x}} + \bar{s}i. \quad (22)$$

3.4　乘法运算

设有均值–方差联系数 $u_1(\bar{x}_1,s_1) = \bar{x}_1 + s_1 i$,$u_1(\bar{x}_2,s_2) = \bar{x}_2 + s_2 i$,$u_1(\bar{x}_1,s_1)$ 与 $u_2(\bar{x}_2,s_2)$ 的乘积为 $u(\bar{x},s)$,则

$$u(\bar{x},s) = [u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_2(\bar{x}_2,s_2)] = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 s_2 i + \bar{x}_2 s_1 i + s_1 i s_2 i. \quad (23)$$

根据式(18),可简化式(23)得

$$[u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_2(\bar{x}_2,s_2)] =$$

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2)+(\bar{x}_1 s_2+\bar{x}_2 s_1+s_1 s_2)i. \tag{24}$$

式(24)也称为均值–方差联系数乘法公式.

均值–方差联系数乘法与加法的混合运算满足:

1)交换律:

$$[u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_2(\bar{x}_2,s_2)]=[u_2(\bar{x}_2,s_2)][u_1(\bar{x}_1,s_1)]. \tag{25}$$

2)结合律:

$$[u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_2(\bar{x}_2,s_2)][u_3(\bar{x}_3,s_3)]=[u_1(\bar{x}_1,s_1)]\{[u_2(\bar{x}_2,s_2)][u_3(\bar{x}_3,s_3)]\}. \tag{26}$$

3)分配律:

$$[u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_2(\bar{x}_2,s_2)+u_3(\bar{x}_3,s_3)]=[u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_2(\bar{x}_2,s_2)]+[u_1(\bar{x}_1,s_1)][u_3(\bar{x}_3,s_3)]. \tag{27}$$

显然,根据上面相应的运算规则,易证式(25)、(26)、(27)成立,证明略.

3.5 均值–方差联系数三角函数式的运算

设

$$u_1(\bar{x}_1,s_1)=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$u_2(\bar{x}_2,s_2)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

这时2个均值–方差联系数的乘法运算公式为

$$u_1(\bar{x}_1,s_1)u_2(\bar{x}_2,s_2)=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]. \tag{28}$$

从而有

$$|u_1(\bar{x}_1,s_1)u_2(\bar{x}_2,s_2)|=|u_1(\bar{x}_1,s_1)||u_2(\bar{x}_2,s_2)|=r_1r_2, \tag{29}$$

$$\arg[u_1(\bar{x}_1,s_1)u_2(\bar{x}_2,s_2)]=\arg[u_1(\bar{x}_1,s_1)]+\arg[u_2(\bar{x}_2,s_2)]. \tag{30}$$

也就是说:2个用三角函数表示的均值–方差联系数$u(\bar{x},s)$相乘,结果仍是形如$\bar{x}+si$的均值–方差联系数,且乘积的模等于这2个联系数模的乘积,乘积的辐角等于它们辐角的和.

以上仅就本文涉及的均值–方差联系数$u(\bar{x},s)$运算作了介绍,进一步的运算可以参照文献[18].有关均值–方差联系数$u(\bar{x},s)$运算的统计学意义也将另文讨论.

4 基于均值–方差联系数的不确定性多属性决策模型与算法

4.1 问题描述

设有m个方案:$S_1,S_2,\cdots,S_m$;每个方案各有n个属性:$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$,每个属性的权重$w_t(t=1,2,\cdots,n)$且$\sum_{t=1}^{n}w_t=1$.第k个方案第t个属性的评价值为$p_{kt}(k=1,2,\cdots,m)$,权重w_t与评价值p_{kt}各为模糊数(区间数、三角模糊数、梯形模糊数)或"均值+方差"的特征参数,决策矩阵为$\boldsymbol{P}=(\tilde{p}_{kt})_{m\times n}$,$(k=1,2,\cdots,m,t=1,2,\cdots,n)$,假定属性$\tilde{p}_{kt}$已经过规范化处理为越大越好型,规范化处理后的属性决策矩阵为$\boldsymbol{R}=(\tilde{r}_{kt})_{m\times n}$.

要求对m个方案中决策出最优方案,并对这些方案作出从优到劣的排序.

4.2 决策模型

4.2.1 基本模型

设方案$S_k(k=1,2,\cdots,m)$的各属性权重为w_t,属性值为$p_{kt}(t=1,2,\cdots,n)$,其综合评价结果为$M(S_k)$,则有

$$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n}w_tp_{kt}. \tag{31}$$

式(31)称为不确定性多属性决策加权综合基本模型,其值称为加权综合值,或简称基本值.

由基本值$M(S_k)(k=1,2,\cdots,m)$构成的矩阵:

$$\overline{\boldsymbol{M}}(S_k)=[M(S_1)\quad M(S_2)\quad M(S_3)\quad M(S_k)]^{\mathrm{T}}$$

称为方案的加权综合基本值决策矩阵,有时也不加区分地用$M(S_k)$表示,以下类同.

4.2.2 一般综合模型

把式(31)中的权重w_t与属性值p_{kt}各自转换成均值–方差联系数$u(\bar{x},s)$的三角函数表达式,即

$$w_t=r_{w_t}(\cos\theta_{w_t}+i\sin\theta_{w_t}),$$
$$p_{kt}=r_{p_{kt}}(\cos\theta_{p_{kt}}+i\sin\theta_{p_{kt}}).$$

其中均值–方差联系数$u(\bar{x},s)$的模和幅角由式(16)、(17)确定,则有

$$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n}r_{w_t}r_{p_{kt}}[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})]. \tag{32}$$

式(32)称为基于集对分析的不确定性多属性决策一般综合模型,其值称为SPA综合决策值,也简称一般综合值.称式

$$r_{w_t}r_{p_{kt}}[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})] \tag{33}$$

为一般综合值的分量,$\overline{\boldsymbol{M}}(S_k)$为方案的综合一般值决策矩阵.

4.2.3 主值模型

当式(32)中的$[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})]=1$时,得

$$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n}r_{w_t}r_{p_{kt}}. \tag{34}$$

称式(34)为基于集对分析的不确定性多属性

决策综合主值模型,简称综合主值决策模型或主值模型,也称为"模"模型;其值称为综合决策主值,也简称主值或模值. 称 $r_{w_t} r_{p_{kt}}$ 为综合主值的分量,$\overline{\boldsymbol{M}}(S_k)$ 为方案的综合主值决策矩阵或简称模矩阵.

4.2.4　决策步骤

1)先把决策问题中给出的属性值作规范化处理.

当属性值 $\tilde{p}_{kt}$ 表示第 k 个方案在 t 个属性上的评价值是区间数,即 $\tilde{p}_{kt} = [p_{kt}^-, p_{kt}^+]$ $(k = 1,2,\cdots,m)$ 时,规范化公式为

对于效益型属性值,经规范化后的区间数为

$$x_{p_{kt}} = \left[\frac{p_{kt}^-}{\max\limits_k p_{kt}^+}, \frac{p_{kt}^+}{\max\limits_k p_{kt}^+}\right] = [x_{p_{kt}}^-, x_{p_{kt}}^+],\ k = 1,2,\cdots,m; \tag{35}$$

对于成本型属性值,经规范化后的区间数为

$$x_{p_{kt}} = \left[\frac{\min\limits_k p_{kt}^-}{p_{kt}^+}, \frac{\min\limits_k p_{kt}^-}{p_{kt}^-}\right] = [x_{p_{kt}}^-, x_{p_{kt}}^+],\ k = 1,2,\cdots,m, p_{kt}^- \neq 0. \tag{36}$$

当属性值 $\tilde{p}_{kt}$ 表示第 k 个方案在 t 个属性上的评价值是三角模糊数,即 $\tilde{p}_{kt} = [p_{kt}^L, p_{kt}^M, p_{kt}^N]$ $(k = 1,2,\cdots,m, t = 1,2,\cdots,n)$ 时,规范化公式为

对于效益型属性值,经规范化后的三角模糊数为

$$x_{p_{kt}} = \left[\frac{p_{kt}^L}{\max\limits_k p_{kt}^N}, \frac{p_{kt}^M}{\max\limits_k p_{kt}^N}, \frac{p_{kt}^N}{\max\limits_k p_{kt}^N}\right] = [x_{kt}^L, x_{kt}^M, x_{kt}^N],\ k = 1,2,\cdots,m; \tag{37}$$

对于成本型属性值,经规范化后的三角模糊数为

$$x_{p_{kt}} = \left[\frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^N}, \frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^M}, \frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^L}\right] = [x_{kt}^L, x_{kt}^M, x_{kt}^N],\ k = 1,2,\cdots,m, p_{kt}^L \neq 0. \tag{38}$$

当属性值 $\tilde{p}_{kt}$ 表示第 k 个方案在 t 个属性上的评价值是梯形模糊数,即 $p_{kt} = [p_{kt}^L, p_{kt}^M, p_{kt}^N, p_{kt}^U]$ $(k = 1,2,\cdots,m, t = 1,2,\cdots,n)$ 时,规范化公式为

对于效益型属性值,经规范化后的梯形模糊数为

$$x_{p_{kt}} = \left[\frac{p_{kt}^L}{\max\limits_k p_{kt}^U}, \frac{p_{kt}^M}{\max\limits_k p_{kt}^U}, \frac{p_{kt}^N}{\max\limits_k p_{kt}^U}, \frac{p_{kt}^U}{\max\limits_k p_{kt}^U}\right] = [x_{kt}^L, x_{kt}^M, x_{kt}^N, x_{kt}^U],\ k = 1,2,\cdots,m; \tag{39}$$

对于成本型属性值,经规范化后的梯形模糊数为

$$x_{p_{kt}} = \left[\frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^U}, \frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^N}, \frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^M}, \frac{\min\limits_k p_{kt}^L}{p_{kt}^L}\right] = [x_{kt}^L, x_{kt}^M, x_{kt}^N, x_{kt}^U],\ k = 1,2,\cdots,m, p_{kt}^L \neq 0. \tag{40}$$

2)计算规范化后的各属性权重和属性值的特征参数均值 $\bar{x}$ 和方差 s,写成均值-方差联系数 $u(\bar{x}, s)$ 的形式.

3)利用均值-方差联系数模及幅角的计算公式把决策问题中的各属性权重与属性值改写成三角函数表达式.

4)利用基于集对分析的综合主值决策模型式(34),计算各方案的综合主值,主值大的方案优先于主值小的方案.

5)如果同一决策问题已有采用其他方法所得结果,则把上面所得结果与其他方法所得结果相比较,完全一致时,可作出决策结论;不完全一致时,或者需要考虑属性权重和属性值的不确定性对方案排序稳定性的影响,则进入下一步.

6)利用一般综合决策模型式(32)计算各决策方案的一般综合值时,建议其中的 i 按比例取值原理取值,计算公式为

$$i = \frac{\cos(\theta_{w_t} + \theta_{p_{kt}})}{\cos(\theta_{w_t} + \theta_{p_{kt}}) + \sin(\theta_{w_t} + \theta_{p_{kt}})}. \tag{41}$$

有时也可以分别取 $i = -0.5$, $i = 0$, $i = 0.5$ 等这些特殊值,以考察由不确定性引起的一般综合值的变化及对决策方案排序的影响.

5　应用举例

5.1　在区间数多属性决策中的应用

例 1　考虑某所大学的 5 个学院(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)的综合评估,假定采用教学、科研和服务 3 个属性作为评估指标,各属性的权重和决策矩阵见表 1,试做出综合评估和排序[21].

表 1　5 个学院的区间数决策矩阵和属性权重

Table 1　Five colleges interval numbers decision matrix and attribute weight

学院	教学 Q_1 $w_1 =$ [0.335 0, 0.375 5]	科研 Q_2 $w_2 =$ [0.300 9, 0.313 8]	服务 Q_3 $w_3 =$ [0.319 4, 0.336 3]
S_1	[0.214, 0.220]	[0.166, 0.178]	[0.184, 0.190]
S_2	[0.206, 0.225]	[0.220, 0.229]	[0.182, 0.191]
S_3	[0.195, 0.204]	[0.192, 0.198]	[0.220, 0.231]
S_4	[0.181, 0.190]	[0.195, 0.205]	[0.185, 0.195]
S_5	[0.175, 0.184]	[0.193, 0.201]	[0.201, 0.211]

解:步骤 1):先按综合主值决策模型式(34)处理如下:

a)由于教学、科研和服务这 3 个属性都是越大越好的效益型属性,且题给出的各属性值已作无量纲的规范化处理,所以可以直接应用式(1)和式(2)计算权重区间数和决策矩阵中的各属性值区间数的均值-方差联系数得表 2.

表2　基于均值-方差联系数的5个学院决策矩阵和属性权重

Table 2　Five colleges interval numbers decision matrix and attribute weight based on the connection number of average-variance

学院	教学 Q_1 $w_1=0.35525+0.02862i$	科研 Q_2 $w_2=0.30735+0.00912i$	服务 Q_3 $w_3=0.32785+0.01196i$
S_1	$0.2170+0.00300i$	$0.1720+0.00849i$	$0.1870+0.00424i$
S_2	$0.2155+0.01344i$	$0.2245+0.00636i$	$0.1865+0.00636i$
S_3	$0.1995+0.00636i$	$0.1950+0.00424i$	$0.2255+0.00778i$
S_4	$0.1855+0.00636i$	$0.2000+0.00707i$	$0.1900+0.00707i$
S_5	$0.1795+0.00636i$	$0.1970+0.00566i$	$0.2060+0.00707i$

b)根据式(15),计算表2中各均值-方差联系数的模,得表3.

表3　各均值-方差联系数的模

Table 3　The modular matrix of each connection number of average-variance

学院	教学 Q_1 $\vert u_{w_1}\vert=0.3561$	科研 Q_2 $\vert u_{w_2}\vert=0.3075$	服务 Q_3 $\vert u_{w_3}\vert=0.3290$
S_1	0.2170	0.1722	0.1870
S_2	0.2159	0.2246	0.1866
S_3	0.1996	0.1950	0.2256
S_4	0.1856	0.2001	0.1901
S_5	0.1796	0.1971	0.2061

c)根据式(34)得各方案的加权计算结果,如表4.

表4　基于均值-方差联系数的模决策矩阵

Table 4　The modular decision matrix based on the connection number of average-variance

学院	教学 Q_1 $r_{w_1}r_{p_1}$	科研 Q_2 $r_{w_2}r_{p_2}$	服务 Q_3 $r_{w_3}r_{p_{k3}}$	$M(S_k)$
S_1	0.0773	0.0530	0.0615	0.1918
S_2	0.0769	0.0691	0.0614	0.2074
S_3	0.0711	0.0600	0.0742	0.2053
S_4	0.0661	0.0615	0.0625	0.1901
S_5	0.0640	0.0606	0.0678	0.1924

由于 $0.2074>0.2053>0.1924>0.1918>0.1901$,所以方案 S_2 优于方案 S_3 优于方案 S_5 优于方案 S_1 优于方案 S_4. 这个结果与文献[21]和文献[13]中的结果完全一致.

步骤2):再按一般综合模型式(34)处理如下:

a)由于步骤1)中已给出各区间数的均值-方差联系数的模,因此在这里先按式(17)计算表2中各均值-方差联系数的幅角. 以属性权重 w_1 为例:因为 $\arctan\dfrac{0.2862}{0.35525}=0.08056$,所以 $\theta_{w_1}=4.6060$. 其他计算结果见表5.

表5　各区间数的均值-方差联系数的幅角

Table 5　The argument of the connection number of average-variance of each interval numbers

θ_{kt}	教学 Q_1 $\theta_{w_1}=4.6060$	科研 Q_2 $\theta_{w_1}=1.6996$	服务 Q_3 $\theta_{w_1}=2.0892$
θ_{1t}	0.7921	2.8259	1.2989
θ_{2t}	3.5687	1.6227	1.9531
θ_{3t}	1.8260	1.2456	2.0014
θ_{4t}	1.9637	2.0246	2.1310
θ_{5t}	2.0292	1.6457	1.9656

b)按式(32)计算各学院的一般综合值,其中学院(S_1)第 $t=1$ 个一般综合值分量的计算如下:$r_{w_1}r_{p_{11}}[\cos(\theta_{w_1}+\theta_{p_{11}})+i\sin(\theta_{w_1}+\theta_{p_{11}})]=0.3561\times0.2170[\cos(4.6060+0.7921)+i\sin(4.6060+0.7921)]=0.0737[\cos5.3980+i\sin5.3980]=0.0737(0.9956+0.0941i)$,当 $i=0$ 时得0.0769,当 $i=0.5$ 时得0.0806,当 $i=-0.5$ 时得0.0733. 同理计算其他一般综合值分量,并按式(33)计算各学院的一般综合值得表6.

表6　5个学院的一般综合值排序

Table 6　Sorting of five colleges by general comprehensive value

学院	$i=-0.5$(排序)	$i=0$(排序)	$i=0.5$(排序)
S_1	0.1836(4)	0.1991(4)	0.2107(3)
S_2	0.1966(1)	0.2062(1)	0.2158(1)
S_3	0.1963(2)	0.2045(2)	0.2126(2)
S_4	0.1814(5)	0.1895(5)	0.1975(5)
S_5	0.1837(3)	0.1916(3)	0.1995(4)

从表6看出,在 $i=-0.5$ 与 $i=0$ 这2种情况时,由一般综合值得到的5个学院综合排序与按主值模型得到的排序相同;但当 $i=0.5$ 时,一般综合值排序显示学院 S_1 由排序④变成排序③,与此同时 S_5 由排序③变成排序④,其余3个学院的排序不变. 这说明该题中的区间数取值不确定性对5个学院的排序有一定影响. 限于篇幅,对 i 取其他值不作讨论.

5.2　在三角模糊数多属性决策中的应用

例2　设影响舰载机选型的主要参数有最大航速(u_1)、越海自由航程(u_2)、最大净载荷(u_3)、购置

费(u_4)、可靠性(u_5)、机动灵活性(u_6)6 项指标,现有 4 种机型(v_1,v_2,v_3,v_4)可供选取择,专家给出的各指标权重 $w_t(t=1,2,\cdots,6)$ 和各指标的评价值矩阵 $\boldsymbol{R}$ 用三角模糊数形式表示如下[22]:

$$w_1=[0.15,0.17,0.19],$$
$$w_2=[0.10,0.125,0.15],$$
$$w_3=[0.10,0.125,0.15],$$
$$w_4=[0.10,0.125,0.15],$$
$$w_5=[0.19,0.21,0.23],$$
$$w_6=[0.23,0.24,0.25].$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}[0.78,0.80,0.85] & [0.92,0.95,1.00] & [0.70,0.72,0.78] & [0.85,0.88,0.90]\\ [0.50,0.55,0.58] & [0.95,0.97,1.00] & [0.72,0.74,0.75] & [0.65,0.67,0.70]\\ [0.90,0.95,0.95] & [0.85,0.86,0.88] & [0.95,0.98,1.00] & [0.90,0.95,0.96]\\ [0.80,0.82,0.85] & [0.65,0.69,0.71] & [0.94,0.97,1.00] & [0.85,0.90,0.93]\\ [0.45,0.50,0.57] & [0.17,0.20,0.23] & [0.80,0.83,0.85] & [0.46,0.50,0.52]\\ [0.90,0.95,0.97] & [0.47,0.51,0.55] & [0.80,0.82,0.85] & [0.48,0.50,0.52]\end{pmatrix}.$$

解:1)根据式(4)和式(5),计算各属性权重三角模糊数和决策矩阵中的三角模糊数的特征参数均值和方差,写出相应的均值–方差联系数得:$w_1=0.17+0.0141i$, $w_2=0.1250+0.0177i$, $w_3=0.1250+0.0177i$, $w_4=0.1250+0.0177i$, $w_5=0.21+0.0141i$, $w_6=0.24+0.0071i$.

$$\boldsymbol{R}'=\begin{pmatrix}0.8100+0.0255i, & 0.9567+0.0286i, & 0.7333+0.0294i, & 0.8767+0.0178i\\ 0.5433+0.0286i, & 0.9733+0.0178i, & 0.7367+0.0108i, & 0.6733+0.0218i\\ 0.9333+0.0240i, & 0.8633+0.0108i, & 0.9767+0.0178i, & 0.9367+0.0227i\\ 0.8233+0.0000i, & 0.6833+0.0432i, & 0.9700+0.0212i, & 0.8933+0.0286i\\ 0.5067+0.0426i, & 0.2000+0.0212i, & 0.8267i+0.0178i, & 0.4933+0.0216i\\ 0.9400+0.0255i, & 0.5100+0.0283i, & 0.8233+0.0178i, & 0.5000+0.0141i\end{pmatrix}.$$

2)根据式(15),计算各属性权重均值–方差联系数和 $\boldsymbol{R}'$ 中各均值–方差联系数的模,得

$$|u_{w_1}|=0.1706,\ |u_{w_2}|=0.1262,$$
$$|u_{w_3}|=0.1262,\ |u_{w_4}|=0.1262,$$
$$|u_{w_5}|=0.2105,\ |u_{w_6}|=0.2401.$$

$$\boldsymbol{R}''=\begin{pmatrix}0.8104, & 0.9571, & 0.7339, & 0.8769\\ 0.5440, & 0.9735, & 0.7367, & 0.6737\\ 0.9335, & 0.8634, & 0.9769, & 0.9370\\ 0.8233, & 0.6847, & 0.9702, & 0.8938\\ 0.5085, & 0.2011, & 0.8269, & 0.4938\\ 0.9403, & 0.5108, & 0.8235, & 0.5002\end{pmatrix}.$$

3)根据式(34)得各方案的加权计算结果:

$$M(S_{v_1})=0.7614,M(S_{v_2})=0.6465,$$
$$M(S_{v_3})=0.8357,M(S_{v_4})=0.6879.$$

也就是机型 v_3 优于 v_1 优于 v_4 优于 v_2,这一结果与文献[22]所得结果完全一致.

5.3　在梯形模糊数多属性决策中的应用

例 3　已知 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 5 个方案,经群决策综合后的评价结果用梯形模糊数表示为

$$A_1=[\,0.8409,\ 0.8699,\ 0.9043,\ 0.9398\,],$$
$$A_2=[\,0.8891,\ 0.9154,\ 0.9492,\ 0.9772\,],$$
$$A_3=[\,0.8647,\ 0.8945,\ 0.9231,\ 0.9537\,],$$
$$A_4=[\,0.8650,\ 0.8986,\ 0.9392,\ 0.9707\,],$$
$$A_5=[\,0.8517,\ 0.8885,\ 0.9220,\ 0.9560\,].$$

试从梯形模糊数越大越好的角度作出综合排序[23].

解:先根据式(7)、式(8)计算得各方案的梯形模糊数的均值 $\bar{x}_k$ 和方差 $s_k(k=1,2,3,4,5)$,并写成均值–方差联系数 $u_k(\bar{x}_k,s_k)(k=1,2,3,4,5)$,再按式(15)、式(16)计算各均值–方差联系数的模 $r_k=|u_k(\bar{x}_k,s_k)|$,根据模的大小得各方案优劣排序结果(见表 7).

表 7　5 个方案的均值–方差联系数的模及其排序

Table 7　Sorting of five schemes based modular of connection number of average-variance

方案	$u_k(\bar{x}_k,s_k)$	r_k	排序
A_1	$0.8887+0.0371i$	0.8895	⑤
A_2	$0.9327+0.0338i$	0.9333	①
A_3	$0.9090+0.0332i$	0.9096	③
A_4	$0.9184+0.0400i$	0.9193	②
A_5	$0.9046+0.0387i$	0.9054	④

所得各方案的排序结果与文献[23]完全一致.

5.4 在蒙特卡罗随机模拟决策中的应用

例4 某水利工程拟定了5个投资方案，各方案的属性权重和属性值如表8所示[24].

表8 决策方案属性区间和属性权重区间数

Table 8 Attribute interval numbers and attribute weights for all alternatives

属性	方案1	方案2	方案3	方案4	方案5	权重
投资额	[5, 7]	[10, 11]	[5, 6]	[9, 11]	[6, 8]	[0.20, 0.30]
期望净现值	[4, 5]	[6, 7]	[4, 5]	[5, 6]	[3, 5]	[0.10, 0.20]
风险盈利率	[4, 6]	[5, 6]	[3, 4]	[5, 7]	[3, 4]	[0.15, 0.25]
风险损失值	[0.4, 0.6]	[1.5, 2.0]	[0.4, 0.7]	[1.3, 1.5]	[0.8, 1.0]	[0.35, 0.45]

表中的投资额和风险损失值为成本型属性，期望净现值和风险盈利值为效益型属性.

根据文献[24]，5个方案在用蒙特卡罗随机模拟方法并且模拟次数大于1 000次时的最优贴近度概率分布均值与方差如表9所示.

表9 5个方案的均值、方差、模及其排序

Table 9 Sorting of five schemes based modular of average and variance

属性	方案1	方案2	方案3	方案4	方案5
均值	0.068 0	0.877 8	0.139 6	0.740 3	0.381 5
方差	0.031 7	0.037 4	0.046 2	0.082 4	0.093 3
模	0.075 0	0.877 6	0.147 0	0.744 9	0.392 7
排序	①	⑤	②	④	③

解：由于该题在文献[24]中已把各属性统一规范化为越小越好的成本型属性，并通过综合加权计算和蒙特卡罗随机模拟方法给出各方案综合值的均值与方差；因此直接应用式(15)计算各方案均值与方差的模，并按模的由小到大排优劣，得到5个方案的优劣排序为：方案1优于方案3优于方案5优于方案4优于方案2. 这一排序结果与文献[24]完全一致.

6 讨 论

虽然以上4个例题在应用均值和方差的模进行决策后，都取得了同一问题与其他决策方法相同的结果，但不容忽视仅仅应用均值和方差的模进行决策的不足. 举个例子，有均值-方差联系数$u_1(\bar{x}_1,s_1)=1+9i$与$u_2(\bar{x}_2,s_2)=9+1i$，显然，这2个均值-方差联系数的模相同，都是$|u_1|=|u_2|=\sqrt{1^2+9^2}=\sqrt{9^2+1^2}=9.055\ 4$；但是这2个均值-方差联系数的辐角不同，其中$\theta_1=\arctan\dfrac{s}{x}=\arctan\dfrac{9}{1}=83.66°$，而$\theta_2=\arctan\dfrac{s}{x}=\arctan\dfrac{1}{9}=6.34°$. 所以在一般情况下，如没有其他方法可以作决策对照，建议采用式(32)所示的一般综合模型作为不确定性多属性决策的首选模型. 文中除例1外，对其他3个例题只所以仅仅应用了“主值模型”，一是因为这3个例题都有其他决策结果可以作对照，二是为了节约篇幅.

7 结束语

根据集对分析的不确定性系统理论，作者提出概率统计学中的样本特征参数均值和方差也是区间数、三角模糊数、梯形模糊数特征参数的理论. 在把“均值”作为它们相对确定性的测度，把“方差”作为它们的不确定性测度之后，进而把“均值+方差”用集对分析中的联系数$A+Bi$根据集对分析关于不确定性系统中确定性与不确定性的相互作用原理，计算联系数$A+Bi$的模，把区间数、三角模糊数、梯形模糊数转化成SPA意义下的普通实数，不仅简化了基于区间数、三角模糊数、梯形模糊数的模糊不确定性多属性决策算法，还给出了统一的决策模型，实例证明文中给出的模型和算法有效. 从理论上说，这种有效性一方面来自统计学中关于“均值”和“方差”是样本特征参数的理论，文中无非是把区间数、三角模糊数、梯形模糊数分别看成是统计学中样本容量$n=2$、3、4时的微小样本而已；客观上说，概率统计的理论研究和无数统计实践早已证明把“均值”和“方差”作为大样本特征参数是合理的，据此不难认可把“均值”和“方差”作为样本容量$n=2$、3、4这些微小样本的特征参数也同样是合理的，因为这些微小样本的“均值”和“方差”这2个特征参数能比大样本的“均值”和“方差”更真实地反映样本自身的统计特征. 另一方面则来自集对分析的不确定性系统理论，因为该理论认为，在一个不确定性系统中，确定性与不确定性存在相互作用，这种相互作用的大小可以在集对分析的D-U空间中得到定量刻划. 该理论所依据的相互作用原理其实也是被物理学等众多学科早已证实的一个科学原理. 许多文献的应用实例已充分说明这种确定性与不确定性在集对分析D-U空间中合成的合理性和在不确定

性多属性决策中的有效性. 当然,从算法上看,在应用文中所给出的均值-方差联系数进行不确定性多属性决策时,对于原始数据的规范化处理是一个前提;因为规范化后得到的属性数据,不仅消除了不同属性的量纲,而且使不同属性得到同质化(化为越大越好的效益型属性,但例 4 是化为越小越好的成本型属性),还使各属性值都落在[0,1]区间内,便于计算和比较.

但尽管如此,人们仍会考问:应用文中给出的不确定性多属性决策模型与算法之有效性到底是或然的,还是必然的? 是否还需要加一些限制条件和界定适用范围,是否具有普遍意义? 因此,文中给出的模型和算法仍然需要在理论上作进一步探讨,在应用上作更多验证.

参考文献:

[1]樊治平,尤天慧,张　尧. 属性权重信息不完全的区间数多属性决策方法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2005, 26(8): 798-801.
FAN Zhiping, YOU Tianhui, ZHANG Yao. Method for interval multiple attribute decision-making problem with incomplete attribute weights[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2005, 26(8): 798-801.

[2]徐泽水,达庆利. 区间型多属性决策的一种新方法[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2003, 33(4): 498-501.
XU Zeshui, DA Qingli. New method for interval multi-attribute decision-making[J]. Journal of Southeast University: Natural Science, 2003, 33(4): 498-501.

[3]许叶军,达庆利. 基于理想点的三角模糊数多指标决策法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(9): 1469-1471.
XU Yejun, DA Qingli. Method for triangular fuzzy number multiple attribute decision making based on ideal solution[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(9): 1469-1471.

[4]陈晓红,阳　熹. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(2): 278-282.
CHEN Xiaohong, YANG Xi. Multiple attributive group decision making method based on triangular fuzzy numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(2): 278-282.

[5]彭展声,李荣钧. 模糊多属性决策的投影折衷方法[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(4): 86-90.
PENG Zhansheng, LI Rongjun. Projected compromise method for fuzzy multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(4): 86-90.

[6]孙世岩,王航宇,邱志明. 一种模糊 ELECTRE 多属性决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(4): 91-94.
SUN Shiyan, WANG Hangyu, QIU Zhiming. One kind of fuzzy ELECTRE method for multi-attribute decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(4): 91-94.

[7]尤天慧,樊治平. 区间数多指标决策的一种 TOPSIS 方法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2002(9): 840-843.
YOU Tianhui, FAN Zhiping. TOPSIS method for multiple attribute decision making with intervals[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2002(9): 840-843.

[8]卫贵武. 区间数多指标决策问题的新灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1358-1359, 1383.
WEI Guiwu. New method of grey relational analysis to multiple attribute decision making with intervals[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(9): 1358-1359, 1383.

[9]晏明春,郜　菁. 混合 AHP 法在 ERP 系统供应商评价模型中的应用[J]. 计算机工程, 2007, 35(13): 90-92, 98.
YAN Mingchun, GAO Jing. Application of combined AHP in supplier evaluation model of ERP system[J]. Computer Engineering, 2007, 35(13): 90-92, 98.

[10]赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2000: 44-64.

[11]赵克勤. 集对分析的不确定性理论在 AI 中的应用[J]. 智能系统学报, 2006, 1(2): 16-25.
ZHAO Keqin. The application of uncertainty systems theory of set pair analysis (SPA) in the artiartificial intelligence[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2006, 1(2): 16-25.

[12]赵克勤,宣爱理. 集对论——一种新的不确定性理论方法与应用[J]. 系统工程, 1996, 14(1): 18-23.
ZHAO Keqin, XUAN Aili. Set pair theory—A new theory method of non-define and its applications[J]. Systems Engineering, 1996, 14(1): 18-23.

[13]叶跃祥,糜仲春,王宏宇,等. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1344-1347.
YE Yuexiang, MI Zhongchun, WANG Hongyu, et al. Set-pair-analysis-based method for multiple attributes decision-making with intervals[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(9): 1344-1347.

[14]黄英艺,蔡光程,刘文奇. 一种基于 SPA 的不确定多属性决策的排序方法[J]. 昆明理工大学学报:理工版, 2008, 33(6): 113-116.
HUANG Yingyi, CAI Guangcheng, LIU Wenqi. A ranking approach based on set-pair-analysis in uncertain multiple attribute decision making problems[J]. Journal of Kun-

ming University of Science and Technology: Science and Technology, 2008, 33(6): 113-116.

[15]刘秀梅,赵克勤. 基于联系数复运算的区间数多属性决策方法及应用[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(23): 57-64.

LIU Xiumei, ZHAO Keqin. Multiple attribute decision making and its applications based on complex number arithmetic operation of connection number with interval numbers[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008, 38(23): 57-64.

[16]刘秀梅,赵克勤. 基于区间数确定性与不确定性相互作用点的多属性决策[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(8): 68-75.

LIU Xiumei, ZHAO Keqin. Multiple attribute decision making based on the interval numbers certainty and the uncertainty interact on each other[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(8): 68-75.

[17]刘秀梅,赵克勤. 基于SPA的D-U空间的区间数多属性决策模型与应用[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(2): 167-174.

LIU Xiumei, ZHAO Keqin. Multiple attribute decision making and its applications with interval numbers based on D-U space of SPA[J]. Fuzzy Systems and Mathematics 2009, 23(2): 167-174.

[18]刘秀梅. 基于联系数的三角模糊数多指标评价方法[J]. 淮阴工学院学报, 2008, 17(5): 30-33.

LIU Xiumei. Multiple attribute decision making and its applications based on the connection number with triangular fuzzy numbers[J]. Journal of Huaiyin Institute of Technology, 2008, 17(5): 30-33.

[19]王梓坤. 概率论基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 218-219.

[20]赵克勤. 二元联系数 $A+Bi$ 的理论基础与基本算法及在人工智能中的应用[J]. 智能系统学报, 2008, 3(6): 476-486.

ZHAO Keqin. The theoretical basis and basic algorithm of binary connection $A+Bi$ and its application in AI[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2008, 3(6): 476-486.

[21]BRYSON N, MOBOLURIN A. An action Learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 6: 379-386.

[22]卜广志,张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊综合评判[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(9): 43-45, 62.

BU Guangzhi, ZHANG Yuwen. Grey fuzzy comprehensive evaluation method based on interval numbers of three parameters[J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(9): 43-45, 62.

[23]王坚强. 信息不完全的FUZZY群体多准则决策的规划方法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(11): 1604-1608.

WANG Jianqiang. Programming method of fuzzy group multiple criteria decision making with incomplete information[J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(11): 1604-1608.

[24]王 恕,张亦飞,郝春玲,等. 一种区间数多属性决策新方法及其工程应用[J]. 水利水运工程学报, 2006(3): 54-58.

WANG Shu, ZHANG Yifei, HAO Cunling, et al. A new method of multi-attribute decision-making for interval numbers and its engineering application[J]. Hydro-Science and Engineering, 2006(3): 54-58.

作者简介:

赵克勤,男,1950年生,研究员,浙江省诸暨市联系数学研究所所长,中国人工智能学会理事、人工智能基础专业委员会副主任、集对分析联系数学专业筹备委员会主任.主要研究方向为联系数学,1989年提出集对分析(联系数学),已出版《集对分析及其初步应用》专著1部,发表学术论文90余篇.