

不确定隶属函数 T-S 模糊控制器设计与稳定分析

李东升¹, 邵山², 陈军¹, 魏晨¹, 段海滨¹, 邹杰³

(1. 北京航空航天大学 飞行器控制一体化技术国防科技重点实验室, 北京 100191; 2. 沈阳飞机设计研究所 飞行控制部, 辽宁 沈阳 110035; 3. 洛阳光电设备研究所 火力控制技术国防科技重点实验室, 河南 洛阳 471009)

摘要:针对许多非线性系统存在的结构不确定和难以用精确数学模型表达等问题,在研究基本 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型的基础上,通过增加一个隶属函数自由变量,利用线性矩阵不等式 (LMI) 设计了一个使得闭环系统渐进稳定的状态反馈控制器,并给出稳定条件. 所得到的条件充分利用了前件变量隶属函数的结构信息和后件局部子系统之间的相互关系,降低了常规 T-S 模糊系统的稳定性条件的保守性和求解难度. 通过仿真实例验证了该方法的可行性和有效性.

关键词: T-S 模糊模型; 模糊控制器; 隶属函数; 线性矩阵不等式 (LMI); 不确定隶属度

中图分类号: TP273.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-4785(2010)01-0017-07

Design and stability analysis of a fuzzy controller with uncertain degrees of membership

LI Dong-sheng¹, SHAO Shan², CHEN Jun¹, WEI Chen¹, DUAN Hai-bin¹, ZOU Jie³

(1. National Key Laboratory of Science and Technology on Holistic Flight Control, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. Department of Flight Control, Shenyang Aircraft Design and Research Institute, Shenyang 110035, China; 3. Key Laboratory of National Defense Science and Technology on Fire Control Technology, Luoyang Institute of Electro-Optical Equipment, Luoyang 471009, China)

Abstract: Many nonlinear systems are so uncertain that they are difficult to be described accurately with mathematical models. Following an analysis of the basic Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model, by adding a free variable in the membership function, we were able to design a state feedback controller using linear matrix inequalities (LMI). The controller made the closed-loop system tend to an asymptotic stability. Stable conditions made full use of relationships between constructive information about prior states and the consequences of actions in local subsystems. The proposed method reduced the complexity of descriptions of the conditions leading to stability in conventional T-S fuzzy models and also reduced complexity when solving related problems. Experimental results indicated that the proposed approach is feasible and effective.

Keywords: Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model; fuzzy controller; membership function; linear matrix inequality (LMI); uncertain grades of membership

近年来, Takagi-Sugeno (T-S) 模糊控制方法引起了学者的广泛关注. T-S 模糊模型是一种通过模糊规则给出非线性系统的局部线性模型, 然后用隶属度函数将这些线性模型整合起来表达整个非线性系统. 文献[1-2]中证明了 T-S 模糊系统可以以任意精度逼近非线性系统, 然后可以利用线性系统的理论

和方法分析和设计模糊控制系统.

早期的 T-S 模糊系统的稳定性分析是采用二次李亚普洛夫函数 $V(t) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, \mathbf{P} 为正定矩阵. 最初, Tanaka 和他的合作者们通过离线地确定任意时刻所能产生作用的最大规则数以及解析地考虑各个模糊子系统之间的相互关系, 应用二次李亚普洛夫函数在文献[3]中给出了 T-S 模糊系统稳定的充分条件. 它要求所有的子系统有一个使系统局部稳定的公共的对称正定矩阵, 但该条件没有考虑各个子系统之间的相互关系, 是相当保守的. 如果系统比较复杂, 所要描述的子系统比较多, 就很难找到一个满足条件的

收稿日期: 2009-10-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60474499); 航空科学基金重点资助项目 (2008ZC01006); 北京科技新星计划资助项目 (2007A017); 总装重点实验室基金资助项目 (9140C4602010802).

通信作者: 李东升. E-mail: shengdongli@163.com.

公共矩阵. 在文献[3]的基础上, Kim 等人在文献[4]中通过引进自由变量矩阵, 将各个子系统相互关系表示为由子系统的系数矩阵组成的单独矩阵, 然后将这个矩阵引入到线性矩阵不等式中, 从而获得了放宽的稳定性充分条件. 接着, Fang 等人注意到在文献[4]中关于规则之间隶属函数的乘积是二次的, 而后在文献[5]中利用同一规则下隶属度函数为1的特点, 将二次变为三次, 同时引入更多的变量矩阵, 得到了比文献[4]更为放松的条件.

上面的方法没有考虑隶属度函数和系统状态之间的关系, 由于隶属度函数往往依赖于某些精确的系统状态; 因此各个子系统在整个系统的权重也是实时依赖于系统状态, 但这些结论并没有充分考虑到隶属函数信息, 得到的结果自然是保守的. 针对以上不足, 文献[6]中将隶属函数的具体信息考虑进来, 得到了较好的结果. 然后, 文献[7]通过增加额外的矩阵变量, 得到了更好的结果.

然而, 实际中大多数系统是含有参数不确定的. 在处理稳定性与鲁棒性的焦点问题中, 高度的模型非线性使得分析非常困难. 文献[8]将模糊模型与模糊控制器采用了不相同的前件变量, 其中, 前件变量中含有不确定参数的变量, 由于前件变量的不确定性, 可以将参数的不确定性体现到隶属函数的不确定性上. 文献[8]得到的结论有很好的鲁棒性, 但是还是有很大的保守性. 文献[9]将文献[8]的结论推广到离散系统.

本文在文献[8]的基础上, 通过增加一个隶属函数自由变量, 并利用线性矩阵不等式 (linear matrix inequalities, LMI) 设计了一个使得非线性系统渐进稳定的状态反馈控制器, 并对其稳定性进行了理论分析和仿真验证.

1 问题描述以及系统建模

1.1 问题描述

考虑下面的含有不确定参数的非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \theta \cdot \psi(\mathbf{x}). \quad (1)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \phi_1(\mathbf{x}) \\ x_2 \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_n \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix};$$

$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ 是系统的状态向量, $u \in \mathbf{R}$ 是系统的控制输入, θ 是未知参数, $\phi_i(\mathbf{x})$ ($i=1, \dots, n$) 是有界函数.

控制目的是设计一个鲁棒状态反馈控制器, 使得上述闭环系统渐进稳定.

1.2 系统建模与反馈控制器设计

首先将上述非线性系统用 T-S 模糊模型来逼近. 考虑由 IF-THEN 规则描述的 T-S 模糊系统, 该模型的第 i 条规则为

规则 i : 如果 $f_1(\mathbf{x}(t))$ 是 $M_1^{i_1}$ ($i_1=1, 2, \dots$), \dots , $f_n(\mathbf{x}(t))$ 是 $M_n^{i_n}$ ($i_n=1, 2$), 则

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t). \quad (2)$$

式中: $i=1, \dots, p$, $p=2^n$, $f_1(\mathbf{x}(t)) = \phi_1 \theta, \dots$, $f_n(\mathbf{x}(t)) = \phi_n \theta$, M_1^1 是 $f_1(\mathbf{x}(t))$ 的最小值, M_1^2 是 $f_1(\mathbf{x}(t))$ 的最大值, \dots , M_n^1 是 $f_n(\mathbf{x}(t))$ 的最小值, M_n^2 是 $f_n(\mathbf{x}(t))$ 的最大值;

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} + f_{1\min} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + f_{2\min} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + f_{n\min} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + f_{1\max} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + f_{2\min} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + f_{n\min} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} a_{11} + f_{1\max} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + f_{2\max} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + f_{n\max} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \cdots = \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

式中: $f_{i\min}$ 和 $f_{i\max}$ 分别是 $f_i(\mathbf{x}(t))$ 的最小值与最大值 ($i=1, 2, \dots, n$), M_i^j 是在第 i 条模糊规则下 $f_j(\mathbf{x}(t))$ 的值 ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, p$).

规则 1 为当所有前件变量取下限值时的情况. 有 1 个取上限值: 规则 2 为当第 1 个前件变量取上限值. 其他均为下限值时的情况; 规则 3 为当第 2 个前件变量取上限值, 其他均取下限值时的情况; 以此类推, 规则 $2+n$ 为当最后一个前件变量取上限值, 其他均取下限值时的情况. 有 2 个取上限值: 规则 $n+3$ 为前 2 个取最大, 后面均取最小时的情况. 以此类推有 3 个取上限值: 规则 $n+3 + \frac{n \times (n-1)}{2}$. 为

前3个取最大,后面均取最小的情况……最后,所有都取上限值。

应用单点模糊化、乘积推理、中心加权解模糊化的推理方法,可得动态模糊系统的全局模糊系统模型为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^p \omega_i(\mathbf{x}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t)). \quad (3)$$

式中: $\sum_{i=1}^p \omega_i(\mathbf{x}(t)) = 1, \omega_i(\mathbf{x}(t)) \in [0, 1]$, 并且对所有 i 有

$$\omega_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mu_{M_1^i}(f_1(\mathbf{x}(t))) \times \cdots \times \mu_{M_n^i}(f_n(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{i=1}^p (\mu_{M_1^i}(f_1(\mathbf{x}(t))) \times \cdots \times \mu_{M_n^i}(f_n(\mathbf{x}(t))))} \quad (4)$$

以上前件变量的隶属函数表达式为

$$\begin{aligned} \mu_{M_1^1}(f_1(\mathbf{x}(t))) &= \frac{-f_1(\mathbf{x}(t)) + f_{1\max}}{f_{1\max} - f_{1\min}}, \\ \mu_{M_1^2}(f_1(\mathbf{x}(t))) &= 1 - \mu_{M_1^1}(f_1(\mathbf{x}(t))), \\ \mu_{M_2^1}(f_2(\mathbf{x}(t))) &= \frac{-f_2(\mathbf{x}(t)) + f_{2\max}}{f_{2\max} - f_{2\min}}, \\ \mu_{M_2^2}(f_2(\mathbf{x}(t))) &= 1 - \mu_{M_2^1}(f_2(\mathbf{x}(t))), \\ &\vdots \\ \mu_{M_n^1}(f_n(\mathbf{x}(t))) &= \frac{-f_n(\mathbf{x}(t)) + f_{n\max}}{f_{n\max} - f_{n\min}}, \\ \mu_{M_n^2}(f_n(\mathbf{x}(t))) &= 1 - \mu_{M_n^1}(f_n(\mathbf{x}(t))). \end{aligned}$$

其中 $i=1, 2, \dots, p$.

根据上式,可以知道非线性模型是基于参数不确定的,而参数不确定全部出现在隶属函数的表达式中,也就是说参数不确定转变成了隶属函数 $\omega_i(\mathbf{x}(t))$ 的不确定。

由于要将不确定参数转变为不确定的隶属函数,模糊模型的前件与模糊控制器的前件采取不一致^[8]的形式,并且模糊控制器与模糊模型采用相同数量的规则。

模糊控制器用下面的形式表示:

规则 j : 如果

$$g_1(\mathbf{x}(t)) \text{ 是 } N_1^j, \dots, g_n(\mathbf{x}(t)) \text{ 是 } N_n^j, \quad (5)$$

那么

$$\begin{aligned} u(t) &= G_j \mathbf{x}(t), \\ u(t) &= \sum_{j=1}^p m_j(\mathbf{x}(t)) G_j \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\sum_{j=1}^p m_j(\mathbf{x}(t)) = 1, m_j(\mathbf{x}(t)) \in [0, 1]$, 并且对于所有 j 有

$$m_j(\mathbf{x}(t)) =$$

$$\frac{\mu_{N_1^j}(g_1(\mathbf{x}(t))) \times \cdots \times \mu_{N_n^j}(g_n(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{k=1}^p (\mu_{N_1^k}(g_1(\mathbf{x}(t))) \times \cdots \times \mu_{N_n^k}(g_n(\mathbf{x}(t))))} \quad (7)$$

则整个模糊控制系统的形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^p \omega_i(\mathbf{x}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + \\ &B_i (\sum_{j=1}^p m_j(\mathbf{x}(t)) G_j \mathbf{x}(t))) = \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \omega_i(\mathbf{x}(t)) m_j(\mathbf{x}(t)) H_{ij} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $H_{ij} = A_i + B_i G_j$.

2 不确定参数与不确定隶属度的关系

通过一个具体的实例说明不确定参数是怎么体现到隶属函数上的。

考虑1个球在横梁上运动的系统^[10],系统用下面的形式表示:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = B(x_1(t)x_4(t)^2 + g\sin(x_3(t))), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = u(t). \end{cases}$$

在上述非线性系统中, B 代表该系统的不确定参数. 球与横梁系统可以用4个 T-S 模糊规则来表示. 其中第 i 个规则可以用下面的形式来表述:

$$\begin{aligned} \text{规则 } i: \text{ 如果 } f_1(\mathbf{x}(t)) \text{ 是 } M_1^i, f_2(\mathbf{x}(t)) \text{ 是 } M_2^i, \text{ 则} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t). \end{aligned} \quad (9)$$

式中:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}(t)) &= kx_4(t)^2, \\ f_2(\mathbf{x}(t)) &= -k \cdot \frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)}. \end{aligned}$$

则动态系统描述为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^4 \omega_i(\mathbf{x}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t)). \quad (10)$$

式中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]$,

$$x_1(t) \in [x_{1\min}, x_{1\max}] = [-0.35, 0.35],$$

$$x_2(t) \in [x_{2\min}, x_{2\max}] = [-1, 1];$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{1\min} & 0 & -gf_{2\min} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{1\min} & 0 & -gf_{2\max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{1\max} & 0 & -gf_{2\min} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{1\max} & 0 & -gf_{2\max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

选择 $f_{1\min} = -1, f_{1\max} = 1, f_{2\min} = 0.6, f_{2\max} = 1$. 其中: $f_{1\min}$ 是 $f_1(x(t))$ 的最小值, $f_{1\max}$ 是 $f_1(x(t))$ 的最大值;

$$\omega_i(x(t)) = \frac{\mu_{M_1^l}(f_1(x(t))) \times \mu_{M_2^l}(f_2(x(t)))}{\sum_{l=1}^2 (\mu_{M_1^l}(f_1(x(t))) \times \mu_{M_2^l}(f_2(x(t))))},$$

$$\mu_{M_1^l}(f_1(x(t))) = \frac{-f_1(x(t)) + f_{1\max}}{f_{1\max} - f_{1\min}},$$

$$\mu_{M_1^2}(f_1(x(t))) = 1 - \mu_{M_1^1}(f_1(x(t))),$$

$$\mu_{M_2^1}(f_2(x(t))) = \frac{-f_2(x(t)) + f_{2\max}}{f_{2\max} - f_{2\min}},$$

$$\mu_{M_2^2}(f_2(x(t))) = 1 - \mu_{M_2^1}(f_2(x(t))).$$

可以看出,参数不确定性全部在隶属函数中,参数不确定性就转变为隶属函数的不确定性.

3 主要结果

3.1 新结论

本文的结论是对文献[8]结论的改进. 整体思路与文献[8]是一致的,但是所得到的线性矩阵不等式与文献[8]所得到的线性矩阵不等式相比,降低了条件的保守性. 该方法扩充了矩阵的调参范围.

文献[3-7]中提到的模糊模型与控制器都采用相同的前件变量,但是由于本文中隶属函数都是不确定的,如果模糊模型与控制器还采用相同的前件变量,将不能够处理这类不确定隶属函数的控制器的设计. 因此,在本文中,模糊模型与控制器采用不同的前件变量.

本文的结论在以前的基础上,通过增加一个隶属函数自由变量,放宽了参数的范围. 由此得到以下定理.

定理1 如果存在对称矩阵 Q_{ij}, Y_{ijk} , 满足下面的线性矩阵不等式, 则所设计的模糊控制器(5)使得模糊系统(2)能够渐进稳定.

$$\begin{cases} \rho_i^M Q_{ii} - Y_{iii} > 0, \rho_i^m Q_{ii} - Y_{iii} > 0, \\ \rho_i^M Q_{ii} + \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0, \\ \rho_i^M Q_{ii} + \rho_j^m Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0, \\ \rho_i^m Q_{ii} + \rho_j^m Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0, \\ \rho_i^m Q_{ii} + \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0, \\ \rho_i^M Q_{ii} + \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^m Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0, \\ \rho_i^M Q_{ii} + \rho_j^m Q_{ij} + \rho_i^m Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0, \\ \rho_i^m Q_{ii} + \rho_j^m Q_{ij} + \rho_i^m Q_{ji} - (Y_{ijj} + Y_{iji} + Y_{ijj}^T) > 0. \end{cases}$$

式中:

$$\rho_i^m = \rho_{i1}, \rho_i^M = \rho_{i2}, \rho_i^m \leq \frac{m_i}{\omega_i} \leq \rho_i^M,$$

$$\begin{aligned} & \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} + \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^M Q_{lj} + \rho_i^M Q_{li} + \rho_l^M Q_{il} - \\ & (Y_{ijl} + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T) > 0, \\ & \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} + \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^M Q_{lj} + \rho_i^M Q_{li} + \rho_l^M Q_{il} - \\ & (Y_{ijl} + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T) > 0, \\ & \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} + \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^M Q_{lj} + \rho_i^M Q_{li} + \rho_l^M Q_{il} - \\ & (Y_{ijl} + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T) > 0, \\ & \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} + \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^m Q_{lj} + \rho_i^M Q_{li} + \rho_l^M Q_{il} - \\ & (Y_{ijl} + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T) > 0, \\ & \vdots \\ & \rho_j^m Q_{ij} + \rho_i^m Q_{ji} + \rho_l^m Q_{jl} + \rho_j^m Q_{lj} + \rho_i^m Q_{li} + \rho_l^m Q_{il} - \\ & (Y_{ijl} + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T) > 0, \\ & \begin{bmatrix} Y_{1i1} & Y_{1i2} & \cdots & Y_{1ip} \\ Y_{2i1} & Y_{2i2} & \cdots & Y_{2ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{pi1} & Y_{pi2} & \cdots & Y_{pip} \end{bmatrix} \geq 0, \\ & i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

证明 考虑下面的 Lyapunov 函数 $V = x(t)^T P x(t)$, 其中 P 是对称正定矩阵.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) = \\ & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \omega_i m_j x(t)^T Q_{ij} x(t). \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= -(H_{ij}^T P + P H_{ij}), \\ m_l(x(t)) &= \rho_l(x(t)) \omega_l(x(t)), \\ 0 &< \frac{m_{l\min}}{\omega_{l\max}} = \rho_{l\min} = \min_{x(t)} \left(\frac{m_l(x(t))}{\omega_l(x(t))} \right) \leq \\ \rho_l(x(t)) &\leq \max_{x(t)} \left(\frac{m_l(x(t))}{\omega_l(x(t))} \right) = \rho_{l\max} = \frac{m_{l\max}}{\omega_{l\min}} < \infty. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \rho_j \omega_i \omega_j \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{x}(t), \\ \rho_j = & \eta_{j1} \rho_{j1} + \eta_{j2} \rho_{j2}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \eta_{jk} \rho_{jk} \omega_i \omega_j \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{x}(t) = \\ & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \omega_i \omega_j \mathbf{x}(t)^T \left(\frac{\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right) \mathbf{x}(t) = \\ & - \left(\sum_{i=1}^p \omega_i \right) \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \left[\omega_i \omega_j \mathbf{x}(t)^T \cdot \right. \\ & \left. \left(\frac{\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right) \mathbf{x}(t) \right] < 0. \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \omega_i \omega_j \left(\frac{\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right) < 0, \\ & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \omega_i \omega_j \left(\frac{\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right) = \\ & - \left(\sum_{i=1}^p \omega_i \right) \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \omega_i \omega_j \left(\frac{\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right) = \\ & - \sum_{i=1}^p \omega_i^3 \sum_{k=1}^2 \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ii} - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \omega_i^2 \omega_j \sum_{k=1}^2 (\eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ii} + \eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}) - \\ & \sum_{i=1}^{p-2} \sum_{j=i+1}^{p-1} \sum_{l=j+1}^p \omega_i \omega_j \omega_l (\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji} + \\ & \eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{lj} + \eta_{lk} \rho_{lk} \mathbf{Q}_{jl} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{li} + \eta_{lk} \rho_{lk} \mathbf{Q}_{il}). \end{aligned}$$

当满足定理中的线性矩阵不等式时,结合定理中的不等式,有

$$\begin{aligned} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{Y}_{iii} & > 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \eta_{ik} (\rho_{ik} \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{Y}_{iii}) & > 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{Y}_{iii} & > 0. \end{aligned}$$

式中: $i=1, 2, \dots, p; k=1, 2$. 并且

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \eta_{jk} (\rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \rho_{iy} \mathbf{Q}_{ji} - \mathbf{Y}_{iji} - \mathbf{Y}_{iji}^T) \geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} (\rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \rho_{iy} \mathbf{Q}_{ji} - \mathbf{Y}_{iji} - \mathbf{Y}_{iji}^T) & \geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} (\rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \rho_{iy} \mathbf{Q}_{ji}) - & \\ \sum_{k=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} (\mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji}^T) & \geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} (\rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \rho_{iy} \mathbf{Q}_{ji}) - (\mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji}^T) & \geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + & \\ \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} \rho_{iy} \mathbf{Q}_{ji} - (\mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji}^T) & \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \eta_{i\gamma} \eta_{jk} \rho_{iy} \mathbf{Q}_{ji} \right) - & \\ (\mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji}^T) \geq 0 & \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^2 (\eta_{jk} \rho_{jk} \mathbf{Q}_{ij} + \eta_{ik} \rho_{ik} \mathbf{Q}_{ji}) - (\mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji}^T) & \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

结合式(11),可以得到第2个不等式. 同理可以得到第3个不等式. 因此可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \sum_{i=1}^p \omega_i^3 \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Y}_{iii} \mathbf{x}(t)^T - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^2 \omega_i^2 \omega_j (\mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji} + \mathbf{Y}_{iji}^T) + \\ & \sum_{i=1}^{p-2} \sum_{j=i+1}^{p-1} \sum_{l=j+1}^p [\omega_i \omega_j \omega_l \times \\ & (\mathbf{Y}_{ijl} + \mathbf{Y}_{ilj} + \mathbf{Y}_{jil} + \mathbf{Y}_{ijl}^T + \mathbf{Y}_{ilj}^T + \mathbf{Y}_{jil}^T)] = \\ & - \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{x}(t) \\ \omega_2 \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \omega_p \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}^T \cdot \\ & \left(\sum_{i=1}^p \omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1i1} & \mathbf{Y}_{1i2} & \cdots & \mathbf{Y}_{1ip} \\ \mathbf{Y}_{2i1} & \mathbf{Y}_{2i2} & \cdots & \mathbf{Y}_{2ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{pi1} & \mathbf{Y}_{pi2} & \cdots & \mathbf{Y}_{pip} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{x}(t) \\ \omega_2 \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \omega_p \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \\ & - \mathbf{z}(t)^T \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{z}(t) = - \mathbf{x}(t)^T \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_p \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_p \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \\ & - \mathbf{x}(t)^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

因此 $\dot{V} < 0$, 这就证明了定理1中的结论.

3.2 与文献[8]结论的比较

文献[8]得到的线性矩阵不等式为

$$\begin{cases} \rho_i^M \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{X} > 0, \rho_i^m \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{X}_{ii} > 0, \\ \rho_j^M \mathbf{Q}_{ij} + \rho_i^M \mathbf{Q}_{ji} - (\mathbf{X}_{ij} + \mathbf{X}_{ji}) > 0, \\ \rho_j^m \mathbf{Q}_{ij} + \rho_i^m \mathbf{Q}_{ji} - (\mathbf{X}_{ij} + \mathbf{X}_{ji}) > 0, \\ \rho_j^M \mathbf{Q}_{ij} + \rho_i^M \mathbf{Q}_{ji} - (\mathbf{X}_{ij} + \mathbf{X}_{ji}) > 0, \\ \rho_j^m \mathbf{Q}_{ij} + \rho_i^m \mathbf{Q}_{ji} - (\mathbf{X}_{ij} + \mathbf{X}_{ji}) > 0. \end{cases}$$

$$\text{式中: } \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \cdots & \mathbf{X}_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}_{r1} & \cdots & \mathbf{X}_{rr} \end{bmatrix} > 0.$$

当把 \mathbf{Y} 矩阵选取为下列特殊情况下时,本文所得到的稳定性条件与文献[8]得到的条件是一致的.

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{iii} = \mathbf{X}_{ii}, \mathbf{Y}_{ijj} = \mathbf{X}_{ij}, \mathbf{Y}_{iji} = \mathbf{X}_{ii}, \\ \mathbf{Y}_{ijl} = \mathbf{X}_{il}, \mathbf{Y}_{ilj} = \mathbf{X}_{ij}, \mathbf{Y}_{jil} = \mathbf{X}_{jl}. \end{cases}$$

令 $1 \leq i < j < l \leq p$ 得到

$$\begin{cases} \rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} - (X_{ij} + X_{ji}) > 0, \\ \rho_l^M Q_{il} + \rho_i^M Q_{li} - (X_{il} + X_{li}) > 0, \\ \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^M Q_{lj} - (X_{jl} + X_{lj}) > 0. \end{cases}$$

将上面3个分式叠加,得到

$$\rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} + \rho_l^M Q_{il} + \rho_i^M Q_{li} + \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^M Q_{lj} - (X_{ij} + X_{ji} + X_{il} + X_{li} + X_{jl} + X_{lj}) > 0.$$

亦即

$$\rho_j^M Q_{ij} + \rho_i^M Q_{ji} + \rho_l^M Q_{il} + \rho_i^M Q_{li} + \rho_l^M Q_{jl} + \rho_j^M Q_{lj} - (X_{ij} + X_{ji} + X_{il} + X_{li} + X_{jl} + X_{lj}) > 0.$$

所以当Y阵取为某些特殊情况下时,本文与文献[8]的结论是一致的.

4 仿真实例

考虑一个典型模糊系统^[8]:

规则1:如果 $x_1(t)$ 是 M_1 ,则 $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$.

规则2:如果 $x_1(t)$ 是 M_2 ,则 $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$.

规则3:如果 $x_1(t)$ 是 M_3 ,则 $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$.

这里,

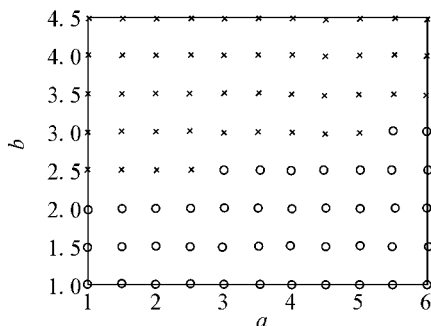
$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

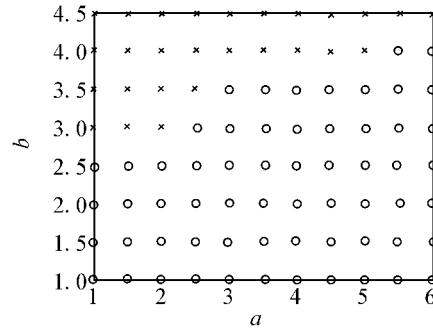
$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

假定模糊控制器的隶属函数与模糊模型的不一致,定理1的稳定条件与文献[8]用来证明闭环系统的稳定性.对于提出的方法,假定 $\rho_{j1} = \rho_{j\min} = 0.6667, \rho_{j2} = \rho_{j\max} = 1.5$.

图1给出了定理1与文献[8]的方法所得到的稳定区域.假设 $1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 4.5$.图中圆圈表示条件可行;叉叉表示条件不可行.



(a)文献[8]的稳定区域



(b)本文的稳定区域

图1 本文结果与文献[8]结果对比

Fig. 1 Comparison results between our method and reference [8]

5 结束语

本文对参数不确定的T-S模糊系统的稳定性进行了研究,将参数不确定性转变为隶属函数的不确定性.新的放宽的稳定性条件通过增加一个隶属函数自由变量,增加了线性矩阵不等式的个数.仿真与理论均表明新得到的条件降低了条件的保守性.在后续的研究中,可以将单一的李雅普洛夫函数转变为模糊李雅普洛夫函数,并将其应用在解决实际控制问题中.

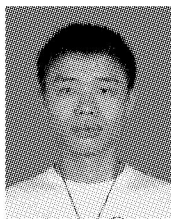
参考文献:

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.
- [2] SUGENO M, KANG G T. Structure identification of fuzzy model [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 28: 15-33.
- [3] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based design [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998, 6: 250-265.
- [4] KIM E, LEE H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 523-534.
- [5] FANG C, LIU Y, KAU S, et al. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(3): 386-397.
- [6] SALA A, ARINO C. Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy system with knowledge on membership function overlap [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2007, 37(3): 727-732.
- [7] CHEN Zhaona, LIU Bin, JING Yuanwei. Robust stabiliza-

tion for T-S fuzzy control systems with parametric uncertainty via LMI approach[C]//Proceedings of Chinese Control and Decision Conference. Yantai, China, 2008: 3398-3402.

- [8] LAM HK, LEUNG F H F. Stability analysis of fuzzy control systems subject to uncertain grades of membership[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2005, 35(6): 1322-1325.
- [9] CARLOS A, ANTONIO S. Extensions to "stability analysis of fuzzy control systems subject to uncertain grades of membership"[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2008, 38(2): 558-563.
- [10] LU X, ZHANG Q. New approaches to control designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI[J]. Automatica, 2003, 39: 1571-1582.

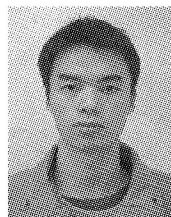
作者简介:



李东升,男,1984年生,硕士研究生,主要研究方向为模糊系统、智能控制等。



邵山,男,1972年生,高级工程师,主持型号及预研项目多项,主要研究方向为先进飞行控制、智能控制等。



陈军,男,1984年生,硕士研究生,主要研究方向为模糊控制、智能信息处理、多机器人协同控制等。



魏晨,女,1972年生,副教授、硕士生导师,主要研究方向为模糊系统、网络控制、非线性鲁棒控制等。主持国家自然科学基金、航空科学基金等课题多项。发表学术论文20余篇。



段海滨,男,1976年生,副教授、博士生导师,IEEE Senior Member。主要研究方向为智能飞行控制与制导、多飞行器协同控制与智能决策、仿生智能计算理论及应用、计算机视觉等。主持国家自然科学基金、国家"863"项目、航空科学基金等多项课题。曾获中国航空学会科学技术一等奖、国防科学技术进步三等奖,北航优秀硕士学位论文指导教师,江苏省优秀博士学位论文获得者。授权发明专利5项、实用新型专利2项。发表学术论文多篇,其中被SCI检索10余篇、EI检索20余篇。

第5届智能计算及应用国际会议

The 5th International Symposium on Intelligence Computation and Applications

The 5th International Symposium on Intelligence Computation and Applications (ISICA 2010) will be held on October 22-24, 2010, in Wuhan, China. ISICA 2010 will present current progress of theories and methodologies in the field of computational intelligence and their applications.

The accepted papers will be collected into the two volumes of the proceedings that will be published by Springer, including one volume in Lecture Notes in Computer Science (LNCS), and the other volume in Communications in Computer and Information Science (CCIS). Both LNCS and CCIS should be indexed by EI and/or ISTP according to the previous ISICA proceedings index results.

Important Dates

Submission deadline: April 15, 2010

Acceptance notification: June 1, 2010

Camera-ready submission: June 15, 2010

Website: <http://isica.cug.edu.cn>.